I numeri

Premessa: Che cosa sono e a che servono i numeri?

Come ti sarai reso conto, i numeri occupano un ruolo importante nella tua vita: dai numeri che esprimono il prezzo degli oggetti venduti in un qualsiasi negozio al numero d'ordine che ti è stato assegnato sul registro di classe. I primi numeri che hai incontrato nella tua "carriera" scolastica sono, quasi sicuramente, i *numeri naturali*, cioè i numeri che servono per contare.
Riesci a pensare a qualcosa di più naturale che contare un insieme di oggetti? In effetti, una delle scoperte archeologiche più importanti fu quella effettuata da Karl Absolom, che nel 1937 trovò un osso di lupo preistorico, che poteva risalire a 30000 anni prima, su cui erano intagliate cinquantacinque tacche, a gruppi di cinque, e le prime 25 erano separate dalle altre da una lunghezza doppia. È ragionevole supporre che un uomo preistorico abbia deliberatamente prodotto queste tacche allo scopo di contare gli oggetti appartenenti all'insieme che stava considerando. Questa scoperta mette in evidenza due importanti concetti matematici: 1) la *corrispondenza biunivoca* tra le tacche sull'osso e gli oggetti che l'uomo preistorico stava contando; 2) la disposizione delle tacche in gruppi di 5 e 25 = 5^2 indica una comprensione rudimentale di un sistema di numerazione in base 5.

I Numeri naturali e le loro operazioni

(si prevedono circa ... ore di lavoro in classe)

Prerequisiti: saper eseguire le quattro operazioni

I numeri naturali, come è stato detto nell'introduzione, servono prima di tutto per contare degli oggetti. Come probabilmente già sai il loro insieme si indica con N, cioè N = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ...}. Questo mostra, implicitamente, la scelta della base 10 a cui sei abituato. Inoltre è comodo inserire tra i numeri che servono per contare anche quel numero un po' speciale che è lo *zero*. In effetti, se i numeri naturali servono per identificare la "numerosità" di un insieme, allora lo zero può essere utilizzato per identificare l'insieme vuoto, che non contiene alcun elemento.
Come probabilmente già sai, i numeri naturali si possono rappresentare geometricamente su una retta, utilizzando un metodo analogo a quello che incontri in un comune righello e nel "metro" del sarto. Per tale rappresentazione occorre fissare sulla retta un primo punto, detto *origine*, a cui si fa corrispondere il numero 0 e un secondo punto a cui si fa corrispondere il numero 1: tutto questo serve a fissare una unità di misura (che potrebbe essere, ad esempio, il centimetro) dei numeri naturali sulla retta numerica. Con Cabri, quando disegni

una retta, il primo punto (a cui farai corrispondere il numero 0) viene inserito automaticamente, mentre se vuoi inserire altri punti devi farlo esplicitamente, utilizzando, per esempio, il comando "punto su un oggetto". Usiamo ora Cabri per costruire la retta numerica: disegna innanzitutto una retta e inserisci su di essa un secondo punto a cui far corrispondere il numero 1 in modo da identificare l'unità di misura (il segmento individuato dai numeri 0 e 1); utilizzando ora il comando "circonferenza" puoi "riportare" sulla retta l'unità di misura fissata e far corrispondere ai nuovi punti così individuati i numeri 2, 3, 4, 5, ... come mostra la seguente figura 1 , infine puoi "nascondere" le diverse circonferenze e ottenere la retta numerica rappesentata nella figura 2 .
Che cosa succede quando "trascini" il punto corrispondente al numero 0? E quando trascini il punto corrispondente al numero 1? Come spieghi questi risultati?

La mia risposta

Scheda 1 (L'addizione di numeri naturali)

La prima operazione tra i numeri i numeri naturali che avete imparato ad effettuare è sicuramente l'*addizione*. D'altra parte anche contare degli oggetti non è altro che una particolare addizione in cui viene addizionata ogni volta una unità.

Che significato date all'operazione 7 + 5?

La nostra risposta

Supponete di poter effettuare solo l'addizione di un'unità alla volta: come potreste scrivere l'addizione 7 + 5? E quali proprietà dell'addizione giustificano tale scrittura?

La nostra risposta

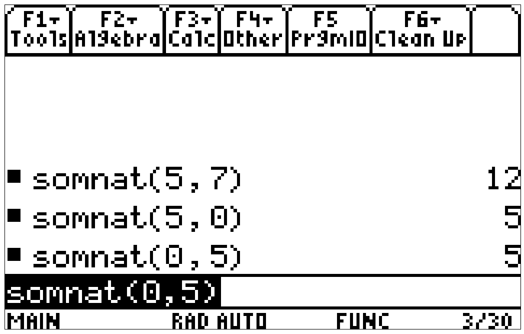
Un *algoritmo* di calcolo per eseguire l'addizione 7 + 5 può essere quello di addizionare al primo numero 7 tante unità quante sono quelle che costituiscono il secondo numero 5. Questo algoritmo sembra convincente e facilmente generalizzabile, tuttavia da questo procedimento di calcolo resta escluso il caso (peraltro molto importante!) in cui il secondo numero è uguale a zero. D'altra parte, come ben sapete, 7 + 0 = 7, cioè, in generale, ogni numero naturale addizionato a zero dà come somma il numero stesso: è questo il motivo per cui 0

prende il nome di elemento *neutro* rispetto all'addizione. [È bene ricordare che i due numeri su cui si effettua l'addizione, in questo caso 7 e 5, vengono chiamati *addendi*, mentre il risultato dell'operazione di addizione, in questo caso 12, viene chiamato la *somma* di 7 e 5.]
Possiamo dunque completare il nostro algoritmo di calcolo imponendo che, quando il secondo numero è zero, la somma sia uguale al primo numero. In definitiva l'algoritmo per l'addizione di due numeri naturali *n e* m si può schematizzare nel modo seguente:

Inizio
leggi *n* e *m*
poni la somma uguale a *n* e il contatore uguale a 0
se *m* = 0 allora scrivi somma
altrimenti
finché $k \neq m$
aumenta di 1 la somma
aumenta di 1 il contatore
scrivi somma
Fine

Quello che risulta interessante è la possibilità di tradurre il precedente algoritmo in un *programma* che realizzi in pratica tale algoritmo; cioè è possibile costruire una *funzione* che prenda in ingresso due numeri naturali e produca in uscita la loro somma.

Le seguenti schermate mostrano la realizzazione di tale funzione su una calcolatrice grafico-simbolica.



È possibile rappresentare sulla retta numerica un'addizione come 2 + 3? La risposta è affermativa come mostra la seguente figura effettuata con Cabri.

[Figura 3](#)

Si parte dal punto 0 e ci si muove di due unità verso destra fino al punto 2, poi ci si muove di altre 3 unità verso destra e si termina nel punto 5. Pertanto 2 + 3 = 5. Mostra ora sulla retta numerica che 3 + 2 = 5.

La tua ultima figura e la precedente mettono in evidenza che 2 + 3 = 3 + 2 = 5. È vero che anche 7 + 5 = 5 + 7? Che cosa ci dice a questo proposito la calcolatrice di TI-Interactive!?

$$a + b = b + a$$

true

Quale proprietà dell'addizione viene messa in evidenza dalla precedente schermata?

La mia risposta

Come probabilmente già sai la *proprietà commutativa* dell'addizione dei numeri naturali precedentemente considerata si può anche esprimere dicendo che, in un'addizione, cambiado l'ordine degli addendi, la somma non cambia. Questa proprietà può sembrare del tutto banale. Tuttavia risulta meno banale quando ci si rende conto che molte operazioni non sono commutative. In generale, quando fai qualcosa seguendo un certo ordine, puoi non ottenere lo stesso risultato quando operi nell'ordine inverso (pensa, ad esempio, alle ricette di cucina!). Sapresti fare qualche esempio, nel campo matematico, di operazione matematica non commutativa?

La mia risposta

Come avrai osservato la proprietà commutativa dell'addizione è stata espressa in forma compatta utilizzando nuovi simboli. Precisamente con le lettere *a* e *b* è stato rappresentato un qualsiasi elemento dell'insieme dei numeri naturali. In questo modo è stato possibile esprimere una proprietà generale di una qualsiasi

coppia di numeri naturali. Il significato di $a + b = b + a$ corrisponde all'elenco infinito di uguaglianze:

$$1 + 1 = 1 + 1$$
$$1 + 2 = 2 + 1$$
$$1 + 3 = 3 + 1$$
$$\bullet$$
$$\bullet$$
$$\bullet$$
$$2 + 2 = 2 + 2$$
$$2 + 3 = 3 + 2$$
$$2 + 4 = 4 + 2$$
$$\bullet$$
$$\bullet$$
$$\bullet$$
$$285 + 783 = 783 + 285$$
$$285 + 784 = 784 + 285$$
$$285 + 785 = 785 + 285$$
$$\bullet$$
$$\bullet$$
$$\bullet$$

Si potrebbe esprimere la proprietà commutativa dell'addizione anche nella forma

numero naturale1 + *numero naturale2* = *numero naturale2* + *numero naturale1*

o anche

addendo1 + *addendo2* = *addendo2* + *addendo1*,

tuttavia è molto più semplice ed elegante esprimere questa proprietà di tutte le coppie di numeri naturali mediante un unico enunciato (in forma simbolica): se a, $b \in$ N, allora $a + b = b + a$.

Chiaramente non è necessario limitarsi alle lettere a e b per rappresentare dei numeri. Si può utilizzare ogni lettera (di qualsiasi alfabeto); anzi non è nemmeno necessario che i simboli utilizzati siano delle lettere. Ad esempio, si potrebbe scrivere la proprietà commutativa nella forma $\Delta + \Box = \Box + \Delta$. È comunque della massima importanza aver ben chiaro che cosa rappresentano le lettere o gli altri simboli impiegati.

Le lettere a, b, ... utilizzate per esprimere le proprietà delle operazioni dei numeri naturali sono simboli che rappresentano elementi dell'insieme in esame (ad esempio dell'insieme N). Come già sottolineato non è affatto obbligatorio usare quelle particolari lettere; ogni altro simbolo sarebbe andato altrettanto bene. Quindi si può esprimere la proprietà commutativa dell'addizione di numeri naturali nella forma: Se x e y sono numeri naturali, allora $x + y = y + x$; o anche come: Se Δ e $\Box$ sono numeri naturali, allora $\Delta + \Box = \Box + \Delta$. In ogni caso i simboli non sono altro che dei "segna posto"; essi indicano il posto in cui devi inserire i due numeri che ti interessano. Dopo che hai inserito i due numeri naturali al posto di ognuno di questi simboli, ottieni come risultato una proposizione, cioè

una frase di cui puoi dire che è *vera* o *falsa*. Ad esempio se sostituisci 7 al posto di *x* (o al posto di Δ) e 9 al posto di *y* (o al posto di □), ottieni 7 + 9 = 9 + 7 (che è chiaramente un'uguaglianza vera).
Quando un simbolo come *a*, *b*, *x*, *y*, Δ o □ viene utilizzato in questo modo, prende il nome di *variabile*. Una variabile è un segna posto di nomi di oggetti. Gli oggetti sono gli elementi dell'insieme in esame. L'insieme a cui fa riferimento la variabile viene chiamato il *dominio* della variabile. Il dominio delle variabili utilizzate nei precedenti enunciati è l'insieme dei numeri naturali.
L'addizione di numeri naturali è un'operazione che associa a ogni coppia di numeri, i due addendi, la loro somma, cioè è un esempio di operazione *binaria* o, come si dice anche in matematica, la somma di due numeri naturali è *funzione* dei due addendi. Ma come ci si deve comportare quando gli addendi sono più di due?

La mia risposta

Supponi di dover effettuare la seguente addizione

25 + 14 + 37.

Chiaramente puoi operare in due modi diversi, cioè (25 + 14) + 37 oppure 25 + (14 + 37). In altre parole puoi eseguire prima l'addizione tra 25 e 14 e poi addizionare alla somma ottenuta 37 oppure addizionare 25 alla somma di 14 e 37. Come si scopre facilmente, in entrambi i casi si ottiene lo stesso risultato. Il manipolatore simbolico di TI-Interactive fornisce il seguente risultato

$$(25+14)+37=25+(14+37)$$

true

Quale proprietà dell'addizione viene messa in evidenza dalla precedente schermata?

La mia risposta

Come dovresti sapere questo è un esempio di un'altra importante proprietà dell'addizione di numeri naturali: la *proprietà associativa*. Analogamente a quanto visto per la proprietà commutativa, puoi esprimere questa nuova proprietà nel modo seguente: Dati tre numeri naturali qualsiasi *a*, *b*, *c* risulta (*a* + *b*) + *c* = *a* + (*b* + *c*).
Queste proprietà vengono usate spesso per semplificare i calcoli relativi all'addizione. Esamina ora i seguenti esempi cercando di giustificare le diverse uguaglianze mediante le proprietà dell'addizione.

ESEMPIO 1. Determinare (23 + 2) + 18,

$$\begin{aligned}(23 + 2) + 18 &= 23 + (2 + 18)\\ &= 23 + 20\\ &= 43\end{aligned}$$

ESEMPIO 2. Determinare (4 + 27) + 26.

$$
\begin{aligned}
(4 + 27) + 26 &= 26 + (4 + 27) \\
&= (26 + 4) + 27 \\
&= 30 + 27 \\
&= 57
\end{aligned}
$$

Prima di prendere in esame le altre operazioni tra i numeri naturali (che hai già incontrato nei tuoi precedenti studi) soffermati un momento a considerare un altro aspetto dell'addizione di numeri naturali. È stato tacitamente ipotizzato che, dati due numeri naturali, sia sempre possibile determinare la somma dei due numeri. Questo è sempre vero?

La mia risposta

La proprietà che hai appena discusso si esprime dicendo che l'insieme dei numeri naturali è "chiuso rispetto all'addizione". Questa proprietà vale anche per le altre operazioni che già conosci?

La mia risposta

OSSERVAZIONE. Il problema della chiusura di un'operazione si presenterà altre volte nel corso dei tuoi studi. Il concetto generale è il seguente: dati un certo insieme *S* e una certa operazione binaria su *S,* si deve scegliere un primo elemento *r* dall'insieme e poi un secondo elemento *s* (eventualmente coincidente col primo) e poi eseguire la data operazione; se il risultato è sempre un elemento di *S*, indipendentemente da come si scelgono gli elementi *r* e *s*, allora si dice che *S* è chiuso rispetto a quell'operazione.

Scheda 2 (La sottrazione nei numeri naturali)

Soffermati un attimo a considerare un'uguaglianza come la seguente

$$x + 2 = 6$$

in cui compare quella che abbiamo chiamato una *variabile*. Una tale espressione viene chiamata una *proposizione aperta* in quanto diventa una proposizione solo quando al posto della variabile viene sostituito un numero preso dal dominio della variabile. Un problema matematico importante è quello di determinare i numeri che sostituiti al posto della variabile trasformano la proposizione aperta in una proposizione vera, cioè quello che viene chiamato l'*insieme soluzione* della proposizione aperta. Nel caso in esame dovrebbe essere evidente che l'insieme soluzione contiene solo un elemento, il numero 4. In altre parole 4 è quel numero che addizionato a 2 dà come somma 6. Tutto questo si può esprimere più semplicemente scrivendo 4 = 6 − 2, cioè introducendo una nuova operazione detta *sottrazione*. Quindi possiamo dire che la sottrazione di due numeri naturali *a* e *b* è quel numero naturale *c* (se esiste) che addizionato a *b* dà come somma *a*. In simboli

$$a - b = c \text{ se e solo se } b + c = a.$$

Quali proprietà dell'addizione valgono anche per la sottrazione? E quali non valgono?

La nostra risposta

Qual è l'insieme soluzione della proposizione aperta *x* + 5 = 2?

La nostra risposta

OSSERVAZIONE. Cerchiamo di approfondire la relazione tra addizione e sottrazione. Osserva che se noi addizioniamo 2 a 6 e poi sottraiamo 2 otteniamo di nuovo 6. In generale, se addizioniamo il numero naturale *b* ad *a* e poi sottraiamo *b*, ci aspettiamo di ottenere come risultato *a*. Cioè, (*a* + *b*) − *b* = *a*. Cosa ci dice il manipolatore simbolico di TI-Interactive!?

$$(6+2)-2=6$$

true

$$(a+b)-b=a$$

true

Tutto è in accordo con le nostre previsioni. Questo è il motivo per cui la sottrazione viene spesso chiamata l'*operazione inversa* dell'addizione. Pertanto 8 − 6 deve essere un certo numero *x* tale che 6 + *x* = 8. Cioè *x* dev'essere uguale a 2 in quanto 6 + 2 = 8.
L'interpretazione della sottrazione come operazione inversa dell'addizione è utile anche nella rappresentazione geometrica sulla retta numerica. Trovare il risultato della sottrazione 7 − 4 equivale a rispondere alla domanda "Che cosa devo aggiungere a 4 per ottenere 7?" e si può rappresentare graficamente come nella seguente figura effettuata con Cabri.

Figura 4

Cioè, 7 − 4 = *k* è equivalente a 4 + *k* = 7.
È bene ricordare che i due numeri su cui si effettua la sottrazione, ad esempio 6 − 2 = 4, vengono chiamati rispettivamente *minuendo* (6) e *sottraendo* (2), mentre il risultato dell'operazione di sottrazione, in questo caso 4, viene chiamato la *differenza* di 6 e 2. Perché si è sentita la necessità di usare due nomi diversi per i due numeri coinvolti nella sottrazione?

La mia risposta

Scheda 3 (La moltiplicazione nei numeri naturali)

La moltiplicazione di numeri naturali spesso viene vista come una naturale estensione dell'addizione. Ad esempio, come potresti interpretare tramite l'addizione la moltiplicazione $3 \cdot 2$?

La mia risposta

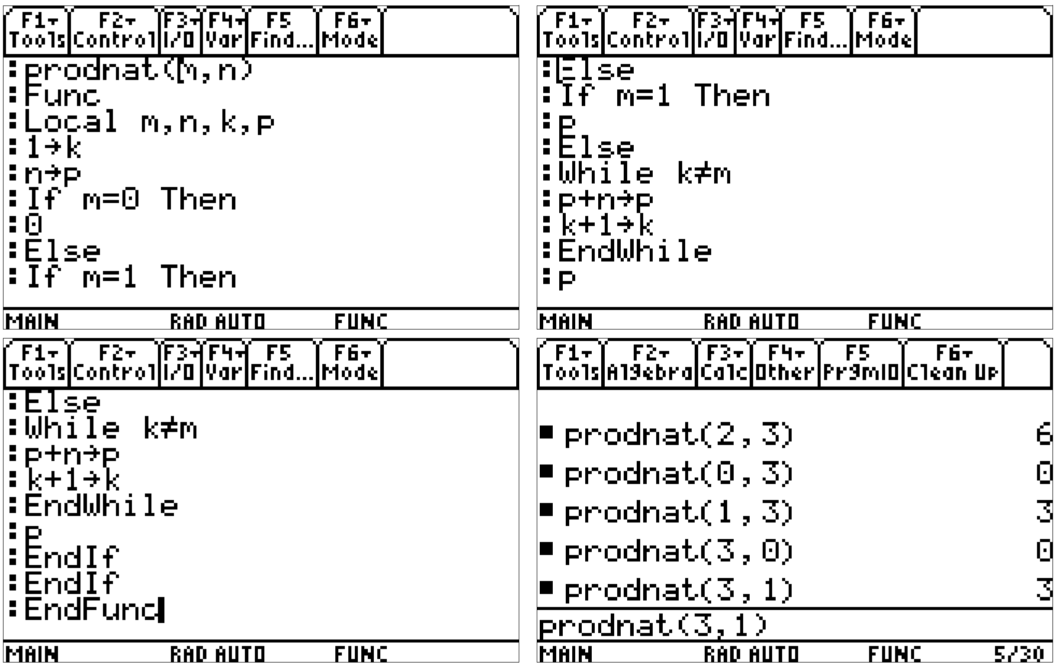
Una generalizzazione di questa interpretazione potrebbe essere la seguente: Se *a* e *b* rappresentano due numeri naturali qualsiasi, allora $a \cdot b = b + b + \cdot \cdot \cdot + b$ (*a* termini). D'altra parte un'addizione coinvolge almeno due addendi, quindi dalla precedente definizione restano esclusi due casi importati. Sapresti dire quali?

La mia risposta

Come potresti completare la precedente definizione in modo da considerare anche i casi esclusi?

La mia risposta

Anche nel caso della moltiplicazione è possibile costruire una funzione che prenda in ingresso due numeri naturali e produca in uscita il loro prodotto. [Ti ricordo che i due numeri coinvolti nella moltiplicazione si chiamano *fattori*, mentre il risultato prende il nome di *prodotto*.]
Le seguenti schermate mostrano la realizzazione di tale funzione su una calcolatrice grafico-simbolica.



Un'altra rappresentazione della moltiplicazione di due numeri potrebbe essere quella che utilizza un certo numero di righe sovrapposte. Ad esempio, il prodotto $3 \cdot 5$ si può visualizzare come tre righe sovrapposte di 5 elementi ciascuna

X X X X X
X X X X X
X X X X X

Questa disposizione "rettangolare" suggerisce in modo del tutto naturale l'interpretazione geometrica della moltiplicazione come area di un rettangolo le cui dimensioni, in una fissata unità di misura, corrspondono ai due numeri da moltiplicare come mostra la seguente figura fatta con Cabri.

Figura 5

Inoltre l'interpretazione geometrica risulta particolarmente appropriata nel mettere in evidenza certe proprietà della moltiplicazione. Nella seguente figura il rettangolo a destra è traslato e ruotato di un quarto di giro rispetto all'altro. I due rettangoli hanno evidentemente la stessa area.

Figura 6

Quale proprietà viene qui evidenziata?

La mia risposta

Nel caso dell'addizione abbiamo visto che il numero 0 agisce da elemento neutro, cioè per ogni numero naturale *a* risulta *a* + 0 = 0 + *a*. Nel caso della moltiplicazione esiste un numero che si comporta in modo analogo?

La mia risposta

Anche nel caso della moltiplicazione se i fattori sono più di due possiamo raggrupparli a due a due a nostro piacimento senza modificare il risultato [ad esempio (2·3)·4 = 2·(3·4)]. Quale proprietà si utilizza?

La mia risposta

Abbiamo già messo in evidenza il ruolo particolare dello 0 nella moltiplicazione, cioè, in generale, se *a* = 0 o *b* = 0, allora *a*·*b* = 0. Viceversa, se *a*·*b* = 0 , che cosa puoi dire sui due fattori?

La mia risposta

Considera ora la figura sotto riportata.

Figura 7

Chiaramente, per quanto riguarda le aree dei diversi rettangoli rappresentati, puoi scrivere che

Area(ABEF) + Area(BCDE) = Area(ACDF)

Se indichi con *a* l'altezza comune dei tre rettangoli e con *b* e *c* la base dei rettangoli ABEF e BCDE rispettivamente, come puoi esprimere simbolicamente la precedente uguaglianza?

La mia risposta

Quale proprietà della moltiplicazione viene così evidenziata?

La mia risposta

Considera ora il seguente esempio.
ESEMPIO.

$$\begin{aligned}3\cdot 245 &= 3\cdot(200 + 40 + 5)\\ &= (3\cdot 200) + (3\cdot 40) + (3\cdot 5)\\ &= 600 + 120 + 15\\ &= 735\end{aligned}$$

Quali proprietà delle operazioni giustificano i diversi passaggi?

La nostra risposta

Il precedente esempio è in qualche modo legato alla "moltiplicazione in colonna" che avete imparato alla Scuola Elementare?

La nostra risposta

Scheda 4 (La divisione nei numeri naturali)

La divisione tra due numeri naturali, analogamente a quanto visto per la moltiplicazione, si può interpretare in diversi modi. Un primo approccio importante è quello di considerare la divisione come una sottrazione ripetuta. Ad esempio 8 diviso 2 si può interpretare come "quanti 2 ci sono in 8?" o, in altre parole, "quante volte posso sottrarre 2 da 8?" Questo tipo di approccio, se ben ti ricordi, è quello impiegato nella pratica della divisione alla Scuola Elementare.
Un altro approccio, che ci sarà utile in futuro, considera la divisione come l'*operazione inversa* della moltiplicazione (analogamente a quanto visto per la sottrazione). Ad esempio 8 diviso 2 è quel numero c tale che $2\cdot c = 8$; quindi possiamo concludere che 8 diviso 2 è uguale a 4. Generalizzando possiamo dire che la divisione di due numeri naturali a e b (con $b \neq 0$) è quel numero naturale c (se esiste) che moltiplicato per b dà come prodotto a. In simboli

$$a : b = c \quad \text{se e solo se} \quad b\cdot c = a.$$

Perché è stata aggiunta la condizione $b \neq 0$?

La nostra risposta

Cosa succede se, oltre ad essere $b = 0$, è anche $a = 0$?

La nostra risposta

Quali proprietà della moltiplicazione valgono anche per la divisione? E quali non valgono?

La nostra risposta

È bene ricordare che i due numeri su cui si effettua la divisione, ad esempio 8 : 2 = 4, vengono chiamati rispettivamente *dividendo* (8) e *divisore* (2), mentre il risultato dell'operazione di divisione, in questo caso 4, viene chiamato il *quoziente* di 8 e 2.

OSSERVAZIONE. Come ti sarai reso conto (e come già sai dalla Scuola Elementare) la divisione come è stata definita (la cosiddetta divisione *esatta*) è raramente possibile, ma, data la sua importanza, verrà esaminata nella scheda riguardante la *divisibilità*. Quella che è sempre possibile (purché il divisore sia diverso da 0) è la *divisione con resto*. Consideriamo, per fissare le idee, la divisione 14 : 4. Operando tramite sottrazioni successive otteniamo

$$\begin{array}{r} 14\ - \\ 4 \\ \hline 10\ - \\ 4 \\ \hline 6\ - \\ 4 \\ \hline 2 \end{array}$$

A questo punto dobbiamo necessariamente fermarci, cioè non è più possibile sottrarre nuovamente 4. In definitiva abbiamo sottratto 4 tre volte e ci sono "rimaste" *due* unità. Diciamo allora che il *quoziente* della divisione è 3 e il *resto* della divisione è 2. Qual è la relazione che lega *dividendo* (12), *divisore* (4), *quoziente* (3) e *resto* (2)?

La mia risposta

Sapresti generalizzare il precedente risultato al caso di due numeri naturali qualsiasi *a* (dividendo) e *b* (divisore diverso da 0)?

La mia risposta

Che cosa succede quando il dividendo è minore del divisore?

La mia risposta

E quando il dividendo è uguale a 0?

La mia risposta

Scheda 5 (L'ordinamento dei numeri naturali)

Nelle precedenti schede abbiamo esaminato le quattro operazioni sui numeri naturali e abbiamo discusso le relative proprietà. Tuttavia non abbiamo ancora affrontato il problema di confrontare due numeri naturali, cioè di esaminare le due relazioni "minore di" e "maggiore di" (anche se abbiamo già utilizzato tali relazioni nelle schede precedenti tenendo presente quanto già conosci dalla Scuola Media). Supponiamo, per fissare le idee, di dover confrontare i numeri 379 e 385. Probabilmente ti viene spontaneo affermare che 379 è minore di 385 (in simboli $379 < 385$) o che 385 è maggiore di 379 (in simboli $385 > 379$). Ma cosa giustifica tali affermazioni?

La mia risposta

Proviamo a considerare le due potenziali differenze $385 - 379$ e $379 - 385$. Solo una di queste differenze ha senso nei numeri naturali, cioè $385 - 379 = 6$ e questo ci permette di concludere che $379 < 385$. Detto in altro modo: la differenza tra i due numeri è 6, quindi se 6 viene addizionato al "più piccolo" dei due numeri, allora la somma è uguale al numero "più grande". Ad esempio possiamo concludere che
$3 < 4$ perché $3 + 1 = 4$

Completa ora in modo analogo:
$5 < 12$ perché $5 + ... = 12$
$6 < 20$ perché $6 + ... = 20$
$784 < 846$ perché ......

In generale possiamo dire che, dati due numeri naturali a e b, risulta $a < b$ se esiste un numero naturale $k \neq 0$ tale che $b = a + k$.
Perché è necessario aggiungere la condizione $k \neq 0$?

La mia risposta

OSSERVAZIONE. Dire che 379 è minore di 385 è chiaramente equivalente a dire che 385 è maggiore di 379. In generale ogni volta che esaminerai una prorpietà della relazione "minore di" potrai supporre che esista una corrispondente proprietà della relazione "maggiore di".

Come è possibile interpretare le relazioni "minore di" e "maggiore di" sulla retta numerica?

La mia risposta

La precedente discussione dovrebbe aver messo in evidenza una proprietà dei numeri naturali dal nome altisonante: la *proprietà di tricotomia*. Tale proprietà afferma che, dati due numeri naturali a e b, deve essere vera una e una sola delle seguenti relazioni:
1. $a < b$ 2. $a = b$ 3. $a > b$
Come conseguenza di tale proprietà, se sappiamo che a non è minore di b, allora possiamo concludere che $a = b$ oppure $a > b$, che si scrive simbolicamente come $a \geq b$. Analogamente si scrive $a \leq b$ per intendere "$a < b$ oppure $a = b$". Ad esempio, nel caso della divisione tra due numeri naturali a e b ($a : b$) possiamo dire che per il resto r vale la relazione $0 \leq r < b$, intendendo con tale scrittura che devono essere vere le due relazioni $r \geq 0$ e $r < b$.
Dal fatto che $2 < 5$ e $5 < 11$, quale relazione puoi dedurre tra 2 e 11?

La mia risposta

Quale proprietà generale della relazione "minore di" esprime il precedente esempio?

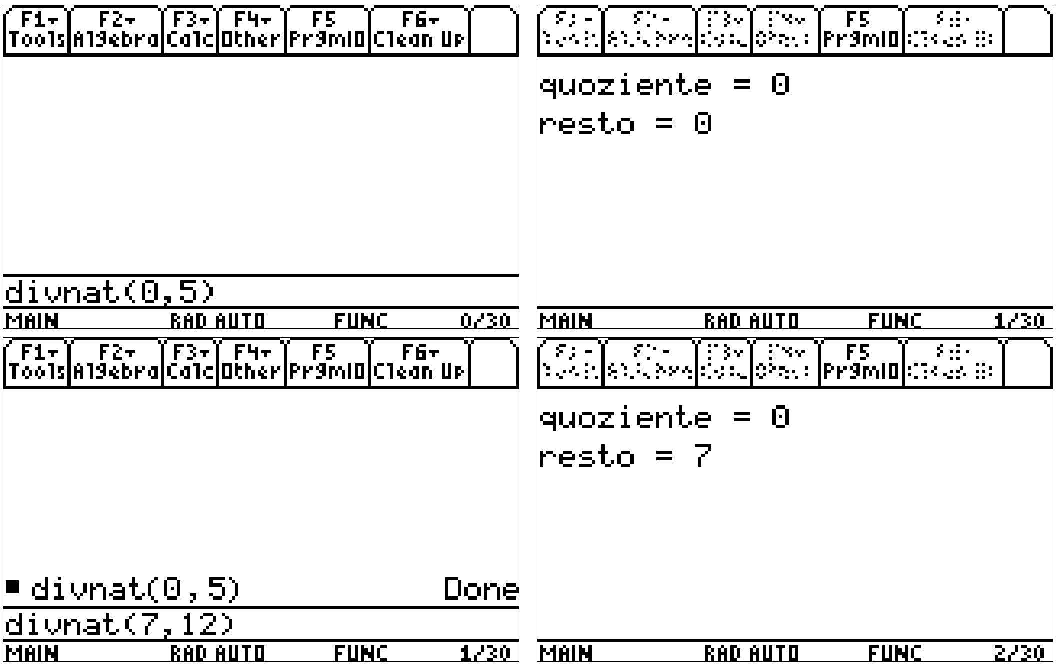
La mia risposta

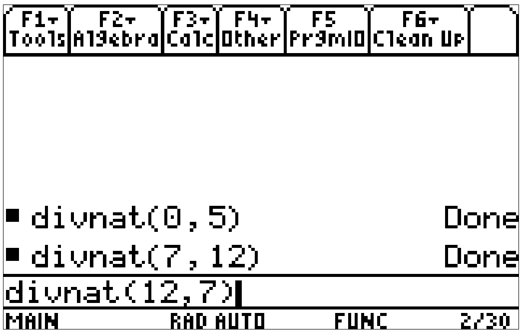
Avendo ora a disposizione le due relazioni "minore di" e "maggiore di", siamo in grado di costruire nuove proposizioni aperte che coinvolgono queste relazioni. Ad esempio per trovare l'insieme soluzione della proposizione aperta $x + 3 < 5$ si può procedere mediante sostituzioni. Se sostituiamo 0 al posto di x, allora otteniamo $0 + 3 < 5$, che è una proposizione vera; se sostituiamo 1 al posto di x, allora otteniamo $1 + 3 < 5$. Tuttavia nessun altro numero naturale, sostituito al posto di x, produrrà come risultato una proposizione vera. Quindi l'insieme soluzione è $S = \{0, 1\}$.

ESEMPIO. Determinare l'insieme soluzione di $2 \cdot x + 3 > 7$.
Se $2 \cdot x + 3$ deve essere maggiore di 7, allora $2 \cdot x$ deve essere maggiore di 4. Quindi x deve essere maggiore di 2. Pertanto $S = \{3, 4, 5, ...\}$.

Tenendo presente il precedente esempio, determina l'insieme soluzione di $3 \cdot x + 2 > 10$.
Avendo a disposizione anche l'ordinamento dei numeri naturali è ora possibile scrivere un programma che calcoli il quoziente e il resto della divisione tra numeri naturali [ovviamente la divisione *esatta* corrisponde al caso particolare in cui il resto vale 0]. Le seguenti schermate mostrano la realizzazione di tale programma su una calcolatrice grafico-simbolica.

Le seguenti schermate mostrano il funzionamento di tale programma nelle diverse situazioni





Scheda 6 (L'elevamento a potenza nei numeri naturali)

Come avete visto precedentemente, la moltiplicazione si può interpretare come un'addizione di addendi uguali. Quale operazione si può interpretare come la moltiplicazione di fattori uguali?

La nostra risposta

La precedente discussione aveva lo scopo dirichiamare alla mente il concetto di *elevamento a potenza* (o, semplicemente, *potenza*) noto dalla Scuola Media. Quello che ci preme sottolineare è l'utilità pratica di tale concetto. Vediamo come la calcolatrice di TI-InterActive! rappresenta i seguenti prodotti in cui uno dei fattori è sempre 10

$10000000 \cdot 10$

$$100000000$$

$\text{ans}(1) \cdot 10$

$$1000000000$$

$\text{ans}(1) \cdot 10$

$$10000000000$$

$\text{ans}(1) \cdot 10$

$$100000000000$$

Osservate che:
a) ans(1) rappresenta l'ultimo risultato calcolato
b) il numero ottenuto non è semplice da leggere (in questo caso rappresenta cento miliardi)
Ma che cosa accade se si utilizza una comune calcolatrice scientifica che può visualizzare solo 10 cifre?
Prendiamo come esempio la schermata della calcolatrice TI-84

```
        10000000
Ans*10
       100000000
Ans*10
      1000000000
Ans*10
            1E10
█
```

Perché è cambiata la rappresentazione e come si deve interpretare il simbolo 1E10?

La nostra risposta

Anche nell'elevamento a potenza sono coinvolti due numeri: il primo numero rappresenta il fattore che viene ripetuto e viene detto *base*, il secondo numero rappresenta il numero di volte in cui il fattore viene ripetuto e viene detto *esponente*. Pertanto anche l'elevamento a potenza è un'operazione binaria. Avendo presente come riferimento la moltiplicazione, di quali proprietà gode (o non gode) l'elevamento a potenza?

La nostra risposta

La notazione comunemente impiegata per indicare la potenza è a^n dove a rappresenta la base e n l'esponente. Ad esempio $10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$. Che cosa succede quando si moltiplicano tra loro due potenze che hanno la stessa base? Facciamo un esempio concreto

$$2^3 . 2^5 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8 = 2^{3+5}$$

Sapresti esprimere in modo simbolico la proprietà generale del prodotto di due potenze aventi la stessa base?

La mia risposta

Esiste una proprietà analoga per il prodotto di due potenze aventi basi diverse?

La mia risposta

E se le basi sono diverse, ma gli esponenti sono uguali?

La mia risposta

Consideriamo ora il caso della divisione di due potenze aventi la stessa base. Anche in questo caso consideriamo un esempio concreto

$$3^5 : 3^2 = 243 : 9 = 27 = 3^3 = 3^{5-2}$$

Sapresti esprimere in modo simbolico la proprietà generale del quoziente di due potenze aventi la stessa base?

La mia risposta

Esiste qualche limitazione sugli esponenti coinvolti nel quoziente di due potenze?

La mia risposta

Come già sottolineato il concetto di potenza nasce dalla considerazione della moltiplicazione di fattori uguali. Ma, come ben sai, una moltiplicazione coinvolge almeno due fattori, quindi in una potenza il minimo valore dell'esponente dovrebbe essere 2. Potresti dare significato alle seguenti "potenze" mantenendo le proprietà viste finora?

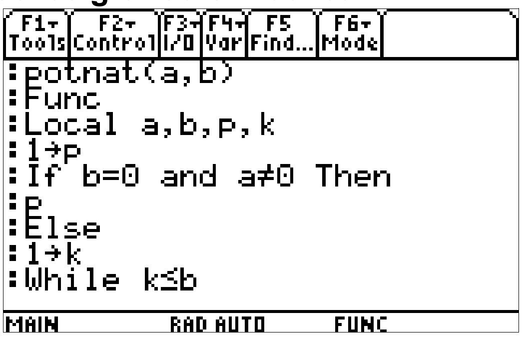
$$7^0 \qquad 7^1$$

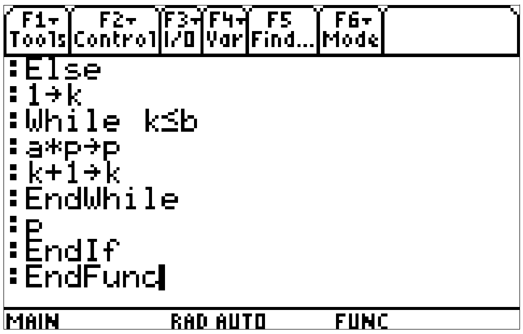
La mia risposta

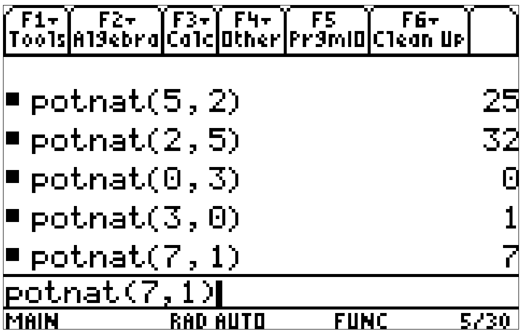
Sapresti generalizzare al caso di una base qualsiasi?

La mia risposta

Anche per l'elevamento a potenza è possibile costruire una funzione che prenda ingresso due numeri naturali (non entrambi nulli) e produca in uscita la loro potenza.
Le seguenti schermate mostrano la realizzazione di tale funzione su una calcolatrice grafico-simbolica.

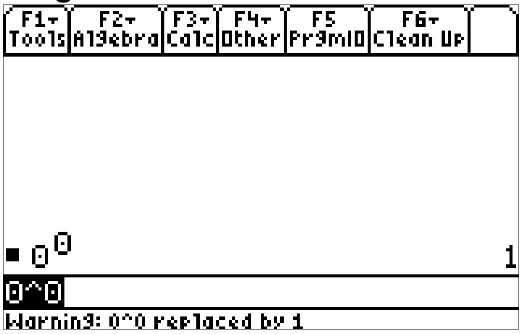






Nella realizzazione della nostra funzione abbiamo escluso il caso in cui sia la

base che l'esponente siano uguali a 0. Vediamo come si comporta in tale situazione una calcolatrice grafico-simbolica.



La calcolatrice mette in guardia che l'espressione 0^0 è stata sostituita da 1. Che cosa ci dice TI-Interactive!?

0^0

1

Warning: 0^0 replaced by 1

Anche TI-Interactive! fornisce la stessa risposta. Mentre una calcolatrice scientifica come la TI-84 produce quanto segue

Quindi la TI-84 segnala un errore nel dominio, cioè nei valori su cui è definita la funzione potenza. D'altra parte su molti libri di testo di matematica si trova scritto che non si riesce a dare significato all'espressione 0^0. Sapresti fornire una motivazione di tale scelta? Prima di rispondere considera la seguente divisione

$$0^3 : 0^3$$

La mia risposta

Come abbiamo visto, molte calcolatrici scientifiche, quando devono rappresentare numeri "molto grandi" (che, espressi come numeri decimali, superano la lunghezza della stringa di cifre rappresentabile sul display) passano alla cosiddetta "rappresentazione scientifica" che consiste nel rappresentare sotto forma di prodotto tra un numero *n* compreso tra 1 e 10 ($1 \le n < 10$) e una opportuna potenza di 10. In tal modo, come abbiamo visto, 100000000000 (cento miliardi) diventa $1 \cdot 10^{10}$. Questa potenza del 10 rappresenta quello che viene comunemente chiamato l'*ordine di grandezza* di un numero. Ad esempio il *numero di Avogadro* [il numero di unità elementari (atomi, molecole, ecc.) contenute in una *mole* di sostanza] vale (approssimativamente) $6 \cdot 10^{23}$ e il suo ordine di grandezza è quindi 10^{23}.

Prova ora a visualizzare il numero di Avogadro con la calcolatrice di

TI-Interactive!. Che cosa osservi?

La mia risposta

Scheda 7 (La divisibilità nei numeri naturali)

Dovresti esserti reso conto da quanto visto finora che la divisione tra due numeri naturali non è un'operazione sempre possibile. Perché?

La mia risposta

In ogni caso risulta spesso particolarmente importante sapere quando un numero è *divisibile* per un altro (nel senso di divisione esatta), cioè quando il resto della divisione vale 0. Ad esempio diciamo che 18 è divisibile per 3 in quanto, se eseguiamo la divisione tra 18 e 3 troviamo come quoziente il numero natuale 6 (e come resto 0). Quindi 6 è quel numero naturale che moltiplicato per 3 dà come risultato 18. Analogamente 15 è divisibile per 5 in quanto si può determinare il numero naturale 3 che moltiplicato per 5 dà 15. Generalizzando possiamo dire che un numero b è divisibile per un altro numero a se e solo se si può determinare un numero naturale k che moltiplicato per a dia b. Esiste qualche limitazione sui valori che può assumere a?

La mia risposta

OSSERVAZIONE. In matematica capita spesso (sfortunatamente!) che frasi diverse indichino la stessa cosa: questo vale, in particolare, per il concetto di divisibilità. Dire che "b è divisibile per a" equivale a dire che "a divide b", che "b è un multiplo di a", che "a è un divisore di b", che "a è un fattore di b".
La frase "a divide b" viene espressa simbolicamente come $a \mid b$.
ESEMPI. Dalla definizione di divisibilità segue che
$6 \mid 48$ perché esiste $k = 8$ tale che $6 \cdot 8 = 48$.
$3 \mid 12$ perché esiste $k = 4$ tale che $3 \cdot 4 = 12$.
$5 \mid 5$ perché esiste $k = 1$ tale che $5 \cdot 1 = 5$.
$1 \mid 4$ perché esiste $k = 4$ tale che $1 \cdot 4 = 4$.
2 non divide 9 perché non esiste alcun numero naturale k tale che $2 \cdot k = 9$.
4 è un fattore di 24 poiché $4 \cdot 6 = 24$.
56 è un multiplo di 7 poiché $7 \cdot 8 = 56$.
0 è un multiplo di 2 poiché $2 \cdot 0 = 0$.
7 divide 0 poiché $7 \cdot 0 = 0$.
$9 \mid 108$ perché $9 \cdot 12 = 108$.
45 non è un multiplo di 12 poiché non esiste alcun numero naturale k tale che $12 \cdot k = 45$.

Da tutto quello che precede si deduce che, in generale, un numero può avere più divisori. Esistono dei numeri che non hanno divisori? Un solo divisore? Due soli divisori?

La mia risposta

Nei confronti della relazione di divisibilità rivestono un ruolo particolare i numeri 0 e 1. Sapresti dire quale?

La mia risposta

Come puoi facilmente verificare $4 \mid 8$ e $8 \mid 48$. Che cosa puoi concludere riguardo alla relazione di divisibilità che lega 4 e 48?

La mia risposta

In generale, se b è un multiplo di a e c è un multiplo di b, che cosa puoi concludere?

La mia risposta

Sapresti esprimere questo risultato in forma simbolica?

La mia risposta

Ti ricorda qualche schema che hai già visto?

La mia risposta

Esaminiamo un'altra situazione. Sappiamo che $3 \mid 6$ e $3 \mid 30$. Siamo sicuri che $3 \mid (6 + 30)$? Perché?

La mia risposta

Possiamo anche concludere che $3 \mid (6 \cdot 30)$? La risposta è ancora affermativa, inoltre nell'ultimo esempio avremmo potuto utilizzare condizioni meno restrittive. Ad esempio, se a divide o b o c, allora possiamo concludere che $a \mid (b \cdot c)$. Quindi se $3 \mid 6$ o $3 \mid 5$ allora $3 \mid (6 \cdot 5)$.
OSSERVAZIONE. Si tenga presente che un enunciato costituito da due enunciati collegati dalla particella "o" risulta vero se è vero almeno uno dei due enunciati. In altre parole, questo uso di "o" sta a indicare in realtà "e/o". Pertanto nell'esempio appena considerato l'enunciato "$3 \mid 6$ o $3 \mid 5$" è vero poiché una parte ($3 \mid 6$) è vera. Esso sarebbe risultato vero anche se entrambe le parti fossero state vere.

Possiamo dunque riassumere quanto detto in precedenza affermando che: Dati tre numeri naturali a, b, c, con $a \neq 0$

1. Se $a \mid b$ e $a \mid c$, allora $a \mid (b + c)$.

2. Se $a \mid b$ o $a \mid c$, allora $a \mid (b \cdot c)$.

Come vedremo, risulta spesso utile (ad esempio nella semplificazione delle frazioni) poter decidere se un dato numero è divisibile per altri numeri. In molti casi esistono criteri che permettono di risolvere questo problema senza effettuare materialmente la divisione. Quando si discutono i criteri di divisibilità risulta opportuno usare la cosiddetta *notazione espansa* dei numeri. Ad esempio, ogni numero di due cifre si può rappresentare nella forma $10 \cdot b + a$, dove $a \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ e $b \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Quindi possiamo scrivere 57 come $10 \cdot 5 + 7$ e 73 come $10 \cdot 7 + 3$. I numeri di tre cifre si possono rappresentare come $100 \cdot c + 10 \cdot b + a$. I numeri di quattro cifre si possono rappresentare come $1000 \cdot d + 100 \cdot c + 10 \cdot b + a$ e così via. In generale le lettere a, b, c, ... rappresentano semplicemente delle cifre.

OSSERVAZIONE. La simbologia impiegata può sembrare in un primo momento fuorviante. Si noti che $7 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + 4 = 764$. Analogamente, se a, b, c sono cifre, possiamo scrivere $100 \cdot c + 10 \cdot b + a = cba$, dove cba è un numero di tre cifre. Questa notazione non implica il prodotto di c, b e a.

Come primo criterio di divisibilità consideriamo quello probabilmente più familiare - il criterio di divisibilità per 2. Siamo tutti convinti che 4468438 è divisibile per due perché l'ultima cifra è pari? Vediamo perché questa è effettivamente la motivazione corretta. Supponiamo, per semplicità, di avere un numero di tre cifre rappresentato da $100 \cdot c + 10 \cdot b + a$. Sappiamo che $2 \mid 100$, quindi, indipendentemente da quale cifra rappresenta c, per le proprietà della relazione di divisibilità, risulta $2 \mid 100 \cdot c$. Analogamente $2 \mid 10$ e quindi $2 \mid 10 \cdot b$. Pertanto, se $2 \mid a$, segue, sempre per le proprietà della relazione di divisibilità, che $2 \mid (100 \cdot c + 10 \cdot b + a)$, cioè 2 divide il numero di tre cifre cba. Invece, se 2 non divide a, allora 2 non divide $(100 \cdot c + 10 \cdot b + a)$, cioè 2 non divide il numero cba. Chiaramente è la cifra delle unità l'elemento chiave; se tale cifra è divisibile per 2 (cioè è pari), allora il numero è divisibile per 2. Poiché $2 \mid 1000$, $2 \mid 10000$ e così via, si deduce che questo criterio è valido qualunque sia il numero delle cifre. Risulta dunque dimostrato il seguente

<u>Criterio di divisibilità per 2</u>. Un numero è divisibile per 2 se e solo se la cifra delle unità è divisibile per 2.

Il criterio di divisibilità per 5 è simile a quello per 2 nel senso che anche in questo caso ci interessa solo la cifra delle unità. Poiché $5 \mid 10$, $5 \mid 100$ e così via, dato il numero di tre cifre cba, possiamo di nuovo scriverlo nella forma $100 \cdot c + 10 \cdot b + a$ e notare che $5 \mid 100 \cdot c$ e $5 \mid 10 \cdot b$. Quindi, se $5 \mid a$, allora $5 \mid (100 \cdot c + 10 \cdot b + a)$, cioè $5 \mid cba$. Invece, se 5 non divide a, allora 5 non divide $(100 \cdot c + 10 \cdot b + a)$, cioè 5 non

divide *cba*. Pertanto: Un numero è divisibile per 5 se e solo se la cifra delle unità è 0 o 5.
Esaminiamo ora il criterio di divisibilità per 3. Consideriamo ancora una volta il generico numero di tre cifre *cba*. Utilizziamo come sempre la forma espansa; notiamo che $cba = 100 \cdot c + 10 \cdot b + a = (99 + 1) \cdot c + (9 + 1) \cdot b + a$. Applichiamo la proprietà distributiva due volte e scriviamo $cba = (99 \cdot c + c) + (9 \cdot b + b) + a$. Riordianiamo poi i vari termini in modo da ottenere $cba = (99 \cdot c + 9 \cdot b) + (c + b + a)$. Dato che $3 \mid 99$ e $3 \mid 9$, segue che $3 \mid (99 \cdot c + 9 \cdot b)$. Quindi, se $3 \mid (c + b + a)$, allora $3 \mid [(99 \cdot c + 9 \cdot b) + (c + b + a)]$. Cioè, se 3 divide la somma delle cifre, allora divide il numero stesso. Inoltre, se 3 non divide $(c + b + a)$, allora 3 non divide $(100 \cdot c + 10 \cdot b + a)$. Questo criterio che abbiamo dimostrato per un numero di tre cifre si può estendere facilmente a un numero di cifre qualsiasi. Basta osservare che $1000 = 999 + 1$ e $3 \mid 999$, $10000 = 9999 + 1$ e $3 \mid 9999$ e così via. Possiamo dunque enunciare Il seguente criterio di divisibilità per 3.
<u>Criterio di divisibilità per 3</u>. Un numero è divisibile per 3 se e solo se la somma delle sue cifre è divisibile per 3.
ESEMPI.
$3 \mid 54$ perché $3 \mid (5 + 4)$
$3 \mid 672$ perché $3 \mid (6 + 7 + 2)$
3 non divide 4811 perché 3 non divide $(4 + 8 + 1 + 1)$
Possiamo sviluppare un criterio di divisibilità per 11 sulla falsariga di quanto fatto per il 3. Osserviamo innanzi tutto l'esistenza di uno schema che ci sarà di notevole aiuto.

$$10 = 11 - 1 \quad \text{e} \quad 11 \mid 11$$
$$100 = 99 + 1 \quad \text{e} \quad 11 \mid 99$$
$$1000 = 1001 - 1 \quad \text{e} \quad 11 \mid 1001$$
$$10000 = 9999 + 1 \quad \text{e} \quad 11 \mid 9999$$
$$100000 = 100001 - 1 \quad \text{e} \quad 11 \mid 100001$$

Quindi, dato un numero di cinque cifre *edcba*, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} edcba &= 10000 \cdot e + 1000 \cdot d + 100 \cdot c + 10 \cdot b + a \\ &= (9999 + 1) \cdot e + (1001 - 1) \cdot d + (99 + 1) \cdot c + (11 - 1) \cdot b + a \\ &= (9999 \cdot e + 1001 \cdot d + 99 \cdot c + 11 \cdot b) + (e - d + c - b + a) \\ &= (9999 \cdot e + 1001 \cdot d + 99 \cdot c + 11 \cdot b) + [(e + c + a) - (d + b)] \end{aligned}$$

Poiché $11 \mid 9999 \cdot e$, $11 \mid 1001 \cdot d$, $11 \mid 99 \cdot c$ e $11 \mid 11 \cdot b$, segue che $11 \mid (9999 \cdot e + 1001 \cdot d + 99 \cdot c + 11 \cdot b)$. Quindi, se $11 \mid [(e + c + a) - (d + b)]$, allora 11 divide il numero di cinque cifre *edcba*. Invece, se 11 non divide $[(e + c + a) - (d + b)]$, allora 11 non divide il numero *edcba*.
Pertanto: Un numero è divisibile per 11 se e solo se la differenza tra la somma delle cifre di posto dispari (contando da destra a sinistra) e la somma delle cifre di posto pari è divisibile per 11.
ESEMPI.
$11 \mid 4290$ perché $(9 + 4) - (0 + 2) = 11$ e $11 \mid 11$
$11 \mid 34562$ perché $(6 + 4) - (2 + 5 + 3) = 0$ e $11 \mid 0$

$11 \mid 7383926$ perché $(6 + 9 + 8 + 7) - (2 + 3 + 3) = 22$ e $11 \mid 22$

$11 \mid 548361$ perché $(6 + 8 + 5) - (1 + 3 + 4) = 11$ e $11 \mid 11$

11 non divide 6432 perché $(3 + 6) - (2 + 4) = 3$ e 11 non divide 3.

OSSERVAZIONE. Come si può notare il criterio di divisibilità per 11 non specifica se occorre effettuare la sottrazione tra la somma delle cifre di posto pari e la somma delle cifre di posto dispari o viceversa. Infatti, per essere sicuri di ottenere come differenza un numero naturale, diciamo semplicemente che, prima si determinano le due somme, poi, se i valori ottenuti sono diversi, si sottrae il minore dal maggiore. Dopo aver studiato gli interi relativi, risulterà chiaro perché questo metodo funziona.