La continuità puntuale, la derivabilità, il teorema fondamentale del calcolo (TFC) e il concetto di valore medio di una funzione su un intervallo

(si prevedono circa 16 ore di lavoro in classe)

Premessa

Nelle precedenti attività hai fatto conoscenza con i concetti di derivata di una funzione in un punto e di funzione derivata, vedendone anche alcune applicazioni allo studio della crescenza e della concavità di una funzione e al problema di approssimare localmente una funzione prima con una funzione lineare e poi con una funzione quadratica.
Fino ad ora, quando abbiamo parlato di derivate o di funzioni derivate, non ci siamo mai posti seriamente il problema di sapere se è possibile il calcolo della derivata di una funzione in un punto, ossia se la funzione che stiamo considerando è derivabile in quel punto.

Queste attività inizieranno con il precisare una condizione necessaria per la derivabilità di una funzione in un punto: la continuità puntuale. Tale concetto sarà introdotto e trattato con considerazioni di carattere numerico e grafico - percettive: esse costituiranno la base per dare senso e significato a (necessarie) considerazioni di carattere più formale che potresti affrontare nel prosieguo degli studi. Questa prima parte si concluderà con un tentativo di caratterizzazione della derivabilità di una funzione in un punto, utilizzando tutte le conoscenze a disposizione.

In seguito verrà ripresa in considerazione un'attività che hai già affrontato: lo studio delle relazioni tra una funzione *f* e le funzioni che hanno *f* come derivata. Ciò consentirà di introdurre quello che è noto come Teorema Fondamentale del Calcolo (TFC) che nei manuali viene presentato con una formulazione rigorosa, ma difficilmente comprensibile a chi lo legge per la prima volta e che, invece, afferma un fatto che, fra qualche settimana, dovrebbe iniziare a esserti chiaro: la descrizione dei cambiamenti di una quantità nei due termini di tassi di crescita (quanto velocemente cresce?) e di ammontare totale (quanto è cresciuta?) sono equivalenti.

Infine faremo qualche accenno al concetto di "valor medio di una funzione su un intervallo" che ci riporterà alla dialettica locale - globale che caratterizza intrinsecamente lo studio delle grandezze che variano.

Scheda 0 La continuità locale di una funzione

(Attività individuali e di gruppo. Tempo in classe: 3 ore)

Quando si parla di funzione continua come di una funzione il cui grafico può essere tracciato senza staccare la matita dal foglio, si intende un concetto globale di continuità, in sostanza quella che viene poi catturata tecnicamente dal concetto di continuità su intervalli. La continuità da un punto di vista globale è quindi un concetto che ha un'interpretazione grafica piuttosto semplice e intuitiva; d'altra parte hai già avuto modo di vedere che i concetti dell'analisi sono in genere caratterizzati dal fatto di poter essere affrontati sia da una prospettiva globale che da una locale.
Quali caratteristiche ha il concetto di continuità da un punto di vista locale? Il tracciare il grafico senza staccare la matita dal foglio non ci viene in aiuto, perché, per poter "tracciare un grafico senza staccare la matita dal foglio" abbiamo bisogno di un intervallo ben determinato e ritroveremmo, quindi, il punto di vista globale.
Può venire in mente di pensare che, se una funzione *f* è continua, quanto più ci si avvicina a un certo valore della variabile indipendente *x*, tanto più si devono ottenere informazioni precise sul valore di *f*(*x*).
Per esempio, se consideriamo

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

non ha nemmeno senso chiedersi se è continua in *x* = 0, perché in 0 non esiste e quindi non ha senso chiedersi quanto vale *f*(0).
Invece ha senso dire che

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & \text{else} \end{cases}$$

non è continua in *x* = 0. Infatti, per quanto ci si avvicini a 0, da sinistra o da destra, otteniamo sempre - 1 oppure +1, ossia valori che non si avvicinano a *f*(0)=0.
La funzione *f*(*x*) = x + 1 è continua in 0: quanto più sostituiamo a *x* valori vicini a 0, tanto più otteniamo valori di *f*(*x*) vicini a *f*(0), ossia a 1.
Queste considerazioni di carattere numerico suggeriscono che, se una funzione è continua, siamo sicuri che, avendo un algoritmo che consente di approssimare bene quanto vogliamo *x*, possiamo, almeno in teoria, approssimare *f(x)* bene quanto vogliamo.

Attività 1. (da svolgere in laboratorio di informatica, in piccoli gruppi o a coppie, per circa 1 ora)

Vi verrà chiesto di confrontare il comportamento di due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ per scoprire che cosa accade se una funzione è continua e che cosa può accadere se non lo è.

Iniziamo con la prima funzione.
Se disponete di Cabri II o di Cabri II plus, aprite, cliccando sull'hotword, il file continuità1 Se non disponete di Cabri potete effettuare la stessa esplorazione cliccando sull'hotword continuitàjava

In entrambi i casi vedrete sullo schermo il grafico della funzione
$f(x) = x^3 - 3 \cdot x^2 + x + 1$
Trovate poi in figura un punto x_0 che potete muovere sull'asse x e un altro punto x_0+r anch'esso mobile sull'asse x. Potete così osservare un segmento sull'asse x che ha estremi x_0-r e x_0+r; esso corrisponde a un intervallo che ha centro x_0 e ampiezza r.
Muovete il punto x_0 sull'asse x e osservate il corrispondente movimento del punto $f(x_0)$ sull'asse y. Riportate tutte le vostre osservazioni e soffermatevi in particolare a descrivere il ruolo del segmento blu sull'asse y.

Le nostre osservazioni

A questo punto muovete il punto x_0+r avvicinandolo ad x_0 e osservate che cosa accade sull'asse y. Ripetete questa esperienza per diverse posizioni di x_0 e riportate le vostre considerazioni.

Le nostre considerazioni

Adesso ripetete le stesse esperienze con la seconda funzione

$$g(x) = \begin{cases} x - 1 & x < 0 \\ x + 1 & \text{else} \end{cases}$$

Per farlo aprite la figura continuità2_ con Cabri, oppure il file continuitàjava2_ e muovete opportunamente i punti x_0 e x_0+r.

Le nostre osservazioni

Se non l'avete già fatto, fate in modo che il punto x_0 coincida con l'origine degli assi. Muovendo il punto x_0+r fate in modo che l'ampiezza r diventi sempre più piccola e osservate che cosa accade all'insieme evidenziato sull'asse *y*. Confrontate quello che accade se $x_0=0$ con quanto accade in tutti gli altri casi.

Le nostre osservazioni

Cercate di ricapitolare quanto avete visto fino ad ora, confrontando il comportamento delle due funzioni precedenti. In particolare, secondo voi:
1) le due funzioni sono continue in tutti i punti dell'asse x?
2) in che modo le due funzioni si comportano diversamente in $x_0=0$? Come fate a vedere questo comportamento diverso analizzando solamente le posizioni dei segmenti blu sull'asse y?

I nostri commenti

Adesso potete confrontare le due funzioni vicino a x_0=0, osservando quali valori numerici assumono.
Per fare questo abbiamo predisposto il foglio elettronico di TI-Interactive! in cui sono tabulati i valori di *f*(*x*), *g*(*x*) intorno a x_0=0.

Fate un doppio clic sulla figura qui sotto, si aprirà il foglio elettronico (Spreadsheat). Potete analizzare come è stato realizzato e poi potete diminuire il valore del passo (nella cella H1), attribuendogli i valori 0,01, poi 0,001, 0,001 e così via e guardate che cosa succede ai valori di *f*(*x*), *g*(*x*) intorno a x0=0.

	x	f(x)	g(x)			passo=	0,1	
x0-r	-0,7	-1,513	-1,7					
	-0,6	-0,896	-1,6					
	-0,5	-0,375	-1,5					
	-0,4	0,056	-1,4					
	-0,3	0,403	-1,3					
	-0,2	0,672	-1,2					
	-0,1	0,869	-1,1					
x0	0	1	0					
	0,1	1,071	1,1					
	0,2	1,088	1,2					
	0,3	1,057	1,3					
	0,4	0,984	1,4					
	0,5	0,875	1,5					
	0,6	0,736	1,6					
x0+r	0,7	0,573	1,7					

Le nostre osservazioni

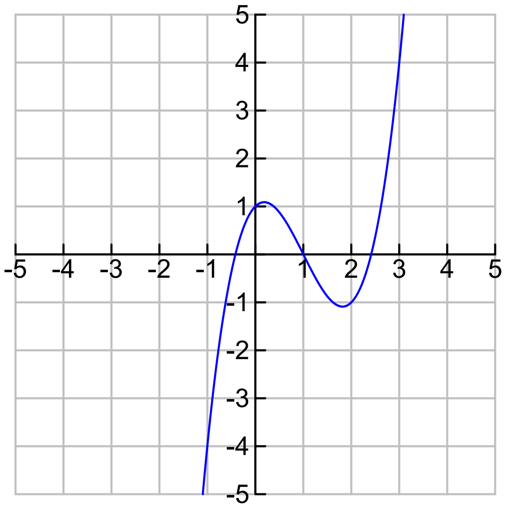
Queste osservazioni confermano quanto avevate scritto in precedenza analizzando i file di Cabri?

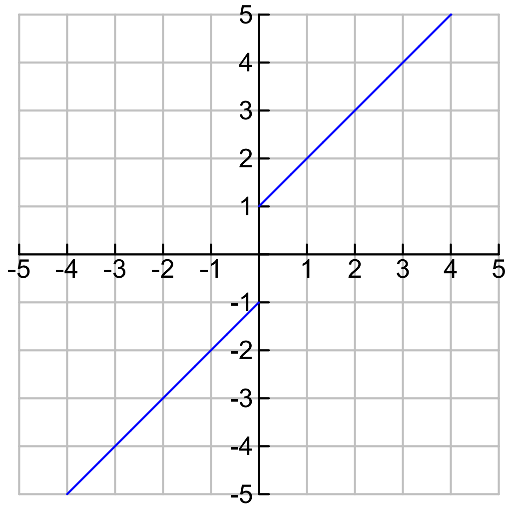
I nostri commenti

Attività 2. **(in laboratorio di informatica, in piccoli gruppi o a coppie, per circa 2 ore)**
Riprendiamo le due funzioni che avete studiato nell'attività precedente e continuiamo ad analizzare il loro comportamento quando $x_0 = 0$.
Questa volta però invece di avvicinarvi sempre di più a 0 (rimpicciolendo l'intervallo tra x_0-r e x_0+r), farete un'indagine un po' diversa.
Immaginate di stirare orizzontalmente il grafico della funzione, un po' come se questo grafico fosse stato tracciato su un foglio elastico che potete afferrare dai bordi e dilatare orizzontalmente.
Provate a pensare che cosa accadrebbe facendo questa operazione sui grafici di

$f(x) = x^3 - 3\cdot x^2 + x + 1$ **e di** $g(x) = \begin{cases} x - 1 & x < 0 \\ x + 1 & \text{else} \end{cases}$

rappresentati nelle seguenti finestre grafiche:





Le nostre ipotesi

Adesso potete farlo con Cabri:
1) aprite il file f(x) realizzato con Cabri, oppure il file f(x)java e muovete il punto giallo sull'asse *x*.
2) Ripetete la stessa esperienza con la funzione

$$g(x) = \begin{cases} x - 1 & x < 0 \\ x + 1 & \text{else} \end{cases}$$

aprendo il file g(x) di Cabri, oppure il file g(x)java.

Osservate in entrambi i casi qual è l'effetto del movimento del punto giallo su:
a) la griglia di Cabri,
b) i due assi cartesiani,

c) il grafico di ciascuna delle due funzioni.

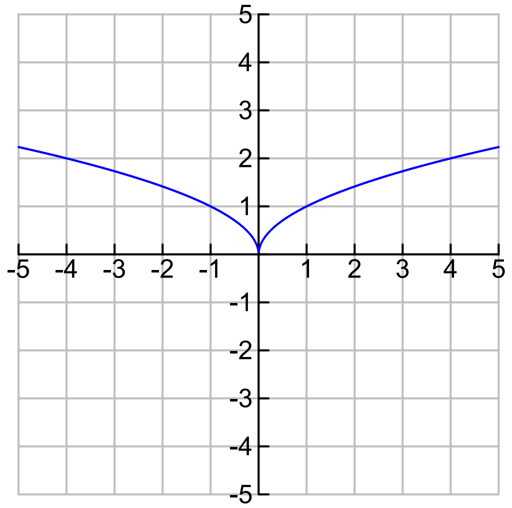
In particolare analizzate se ci sono differenze tra il comportamento dei due grafici

Le nostre osservazioni

Eventuali differenze rispetto a quanto ci attendevamo

L'esperienza precedente equivale ad effettuare uno zoom sull'asse delle *x*, lasciando invariata la scala sull'asse *y*. Il grafico della funzione può apparire completamente piatto (ossia ridursi a un segmento orizzontale) se e solo se, per ogni *x* dell'intervallo che costituisce l'ampiezza orizzontale della finestra grafica, i valori della funzione giacciono tutti all'interno di un pixel.
Cerchiamo di visualizzare quanto detto con qualche altro esempio. Consideriamo una funzione continua in *x* = 0, per esempio
$h(x) = \sqrt{|x|}$ **.**

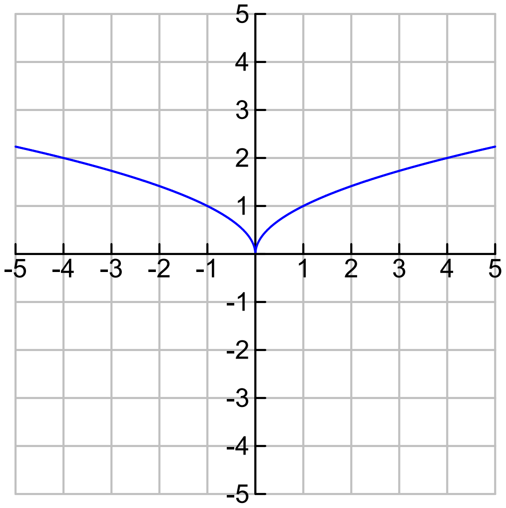
Guardatene il grafico in un intervallo centrato intorno all'origine, come quello della seguente finestra di TI-InterActive!:



I fattori di Zoom nella finestra grafica precedente sono stai posti uguale a 2 sull'asse *x* e uguale a 1 sull'asse *y*. Ciò vuol dire che la scala viene variata solo sull'asse *x* (ossia lo zoom viene effettuato solo lungo l'orizzontale).
Come vi aspettate che si trasformi il grafico? Prima di provare, producete una vostra congettura

La nostra congettura:

Provate ora a effettuare vari Zoom In (entrate nella seguete finestra grafica cliccando due volte su di essa) e verificate se accade proprio ciò che vi aspettavate



Eventuali differenze rispetto a quanto ci attendevamo

Eventuale richiesta di chiarimento da parte dell'insegnante

Considerate ora una funzione discontinua, per esempio la funzione che vale x^2+1 se x è negativo e -x^2 – 1 se x è positivo o nullo.
Per definire una funzione discontinua con TI InterActive! potete seguire il seguente metodo:

a) **Aprite la finestra di manipolazione simbolica (Math Box)**
b) **Accedete al menu "Math" e, successivamente, ai sotto menu "Variable" e "Define"**
c) **Scrivete Define k(x)= when(x < 0,x^2+1,-x^2-1)**
d) **Aprite la finestra grafica (Graph) e chiedete di disegnare y1(x) = k(x)**

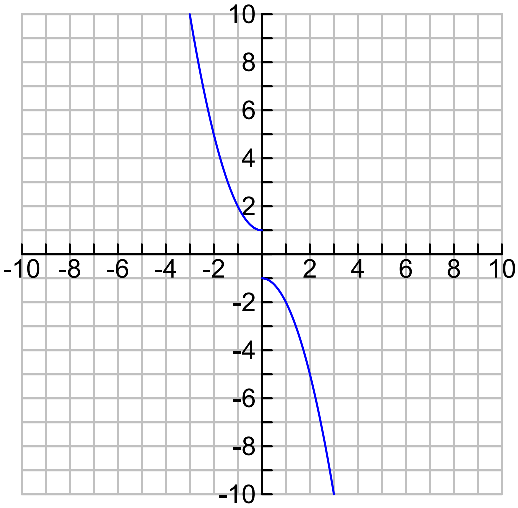
Oppure potete seguire quest'altro metodo:

a) **Aprite la finestra di manipolazione simbolica (Math Box)**

b) **Accedete al menu “Math” e, successivamente, ai sotto menu “Algebra” e “Piecewise”**
c) **Definite la funzione continua a tratti *k*(*x*) utilizzando la sintassi facilitata del sotto menu “Piecewise”**
d) **Aprite la finestra grafica (Graph) e chiedete di disegnare y1(x) = k(x).**

In entrambi i casi otterrete le due seguenti finestre

$$\text{Define } k(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < 0 \\ -(x^2) - 1 & \text{else} \end{cases}$$



Nelle opzioni di Zoom (Set zoom factors), ponete uguale a 2 sull'asse *x* e uguale a 1 sull'asse *y*. Ciò vuol dire che la scala viene variata solo sull'asse *x* (ossia lo zoom viene effettuato solo lungo l'orizzontale). Nella finestra grafica sopra riportata questa operazione è già stata fatta.
Provate a pensare (senza farlo) che cosa succederà al grafico se effettuate diversi Zoom In.

Le nostre congetture sui cambiamenti del grafico e le nostre spiegazoni

Verificate ora la correttezza delle congetture prodotte effettuando diversi Zoom In (per come è stata scelta la finestra grafica e per come funziona Zoom In, lo Zoom viene fatto intorno al valore 0).

Eventuali osservazioni inattese o non comprese

Eventuale richiesta di spiegazione da parte dell'insegnante

Considerate ora diverse funzioni, alcune continue e altre discontinue in qualche punto (per esempio: f(x) = x^2 + 2x − 3 in *x* = 0; g(x) = 1/*x* in *x* = 0; h(*x*) = x^3 − 3*x* + 1 in *x* = 1; *k*(*x*) = 3/(*x* + 1) in *x* = −1; *m*(*x*) = when(x < 0, 1, 2) in *x* = 0) e, per ciascuna di esse:

a) **tracciate il grafico;**
b) **impostate le opzioni di Zoom uguali a 2 sull'asse orizzontale e uguali a 1 su quello verticale (in modo tale che la scala verticale rimanga fissata, ossia la funzione non venga stirata verticalmente, ma solo orizzontalmente);**
c) **scegliete (definendo opportunamente la scala, ossia in modo che sia centrata intorno al punto in cui volete fare lo zoom) un punto sul quale effettuare Zoom In successivi**

Alla fine delle osservazioni dovreste concludere che le funzioni che sono continue nel punto considerato diventano, prima o poi, piatte, ossia si riducono a un segmento orizzontale, mentre quelle discontinue nel punto rispetto al quale si sono fatti i successivi Zoom si riducono a due segmenti orizzontali di differente quota o tendono a sfuggire dallo schermo, a seconda di quello che accade nel punto di discontinuità.

Un'ultima considerazione su quanto avete fatto nella prima attività e quanto avete fatto adesso.
Nella prima attività vi avvicinavate il più possibile a un punto x_0 sull'asse delle x

e osservavate che solo per le funzioni continue questo voleva dire individuare con sempre maggior precisione il punto $f(x_0)$.

Nella seconda attività effettuavate degli zoom sull'asse delle *x,*centrati in x_0 , e osservavate che solo le funzioni continue diventano piatte, ma questo equivale a dire che in quell'intorno di x_0 assumono valori che il computer non può distinguere da $f(x_0)$.

Si tratta quindi della stessa cosa.

Per averne conferma aprite il file di Excel Piattezza.xls Si tratta dello stesso foglio elettronico che avete utilizzato in precedenza con TI-Interactive!, ma questa volta trovate anche il grafico della funzione *f*(x). Modificate il passo nella cella F3, dandogli i valori: 0,1; 0,01; ... E osservate che cosa accade nella tabella e nel grafico.

Le nostre osservazioni

Eventuali punti non chiari sulla caratterizzazione di continuità locale (o puntuale) per una funzione

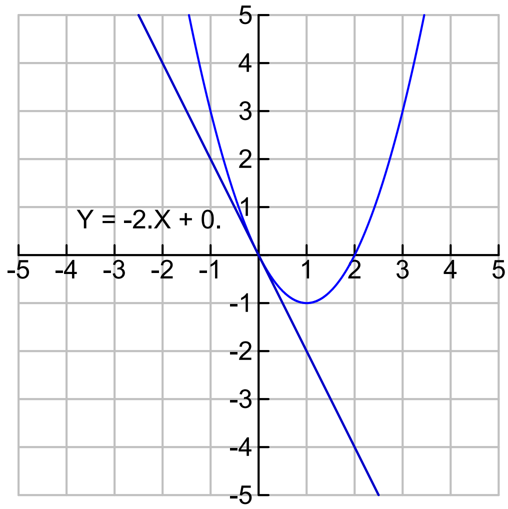
Scheda 1 Funzioni derivabili e funzioni continue

(Attività individuali e di gruppo. Tempo da dedicare in classe: 2 ore)

Nelle lezioni precedenti avete imparato che la derivata di una funzione y = f(x) in un punto di ascissa x_0 è la pendenza della funzione lineare che meglio approssima la funzione vicino a x_0; sapete anche che facendo ripetuti zoom sul grafico di una funzione, se questo grafico diventa una retta quella retta è la retta tangente al grafico in quel punto e la sua pendenza è la derivta di f(x) in x_0
Vediamo ora di riprendere questo discorso e di analizzare se tutte le funzioni sono derivabili e se esiste qualche legame tra derivabilità e continuità.

Attività 1 (in piccoli gruppi in circa un ora)

Considerate la funzione $f(x) = x^2 - 2 \cdot x$ e la sua tangente nell'origine.
Per fare questo andate nell'ambiente Graph di TI-Interactive! e nella casella y1(x):= digitate x^2-2x. Quindi utilizzate l'icona per disegnare la retta tangente nell'origine; ricordatevi di selezionare anche la casella "Show label" per mostrare l'equazione della retta tangente nel grafico.
Nella figura seguente trovate il lavoro già fatto:



Che cosa accade operando zoom successivi variando la scala allo stesso modo per l'asse x e per l'asse y?

Le nostre osservazioni

Adesso provate con un'altra funzione $g(x) = \left|x^2 - 2 \cdot x\right|$. Provate a tracciare il suo grafico con carta e penna e a immaginare che cosa accadrebbe zoomando con centro nell'oigine.

Le nostre ipotesi

Adesso fatelo con TI-Interactive!: riaprite la precedente finestra grafica in cui si trova la funzione y1(x)=x^2-2x; nella casella y2(x):= potete scrivere abs(y1(x)), oppure abs(x^2-2x). A questo punto zoomate e controllate che cosa accade nell'origine. Potete dire che c'è una sola retta tangente nell'origine? Cercate di fare tutte le considerazioni che potete e anche di scrivere l'equazione della/delle retta/rette tangenti.

Le nostre osservazioni

In un caso come questo si ha che la funzione non è derivabile in x=0 perchè a destra di zero la derivata assume un valore diverso di quello che assume a sinistra.

Attività 2 (da svolgere in laboratorio di informatica a piccoli gruppi per circa un'ora)

Adesso sapete che non tutte le funzioni sono derivabili e che non tutte le funzioni sono continue. Ci chiediamo adesso se esistono dei legami tra derivabilità e continuità, in particolare vorremmo rispondere a queste due domande:

1) Se abbiamo una funzione derivabile in un punto, sarà anche continua in quel punto?

2) E se abbiamo una funzione continua in un punto sarà anche derivabile?

Iniziamo a dare una risposta alla domanda 1).

Da un punto di vista visivo una funzione è derivabile quando stirando entrambi gli assi, con uno stesso fattore di stiramento, si ottiene una retta (la retta tangente), mentre una funzione è continua quando stirando il grafico solamente orizzontalmente si ottiene una retta orizzontale, un grafico piatto.

Provate a pensare alla funzione $f(x) = x^2 - 2 \cdot x$ **, avete visto che è derivabile: se la stirate allo stesso modo lungo i due assi essa diventa una retta (la retta tangente nell'origine); se poi stirate solamente in orizzontale il grafico ottenuto, che cosa pensate di ottenere?**

La nostra risposta

La nostra possibile risposta alla domanda 1)

Provate adesso a farlo con Cabri. Aprite il file deriv_cont , oppure se non avete Cabri aprite il file deriv_contJava .
Muovete prima il punto P in modo da ottenere il grafico di una retta; a questo punto lasciate dov'è P e muovete Q. Che cosa accade?

La nostra risposta

Eventuali differenze rispetto a quello che avevamo pensato prima

La nostra risposta alla domanda 1)

Eventuali punti da chiarire e da chiedere all'insegnante

Veniamo ora alla domanda 2.
Pensate di stirare orizzontalmente il grafico di una funzione e che in questo modo possiate renderla piatta. Stirando poi il grafico ottenuto verticalmente in modo da ritornare ad avere la stessa scala sui due assi, otterrete una retta?
La nostra ipotesi

Provate ora con Cabri. Aprite il file cont_deriv , oppure il file cont_derivjava . In figura trovate il grafico di $g(x) = |x^2 - 2 \cdot x|$; muovete prima il punto sull'asse x e rendete piatto il grafico. A questo punto lasciate dov'è il punto sull'asse x e muovete il punto sull'asse y sino ad avere le stesse unità di misura sui due assi.

Le nostre osservazioni

La nostra risposta alla domanda 2)

Eventuali punti da chiarire e da chiedere all'insegnante

Un'ultima indagine sulla funzione $g(x) = |x^2 - 2 \cdot x|$ **può essere fatta con Excel. Aprite il file cont der excel e modificate il passo nella casella H3 dandogli i valori 0,1; 0,0; 0,001; ....**
Osservate come cambiano i valori di g(x) nella colonna C e contemporaneamente come variano i valori del rapporto $\frac{g(x+h) - g(x)}{h}$ **nella colonna E.**

Le nostre osservazioni

I valori numerici confermano quanto avevate visto con Cabri?

La nostra risposta

Eventuali punti da chiarire

Riprendiamo le due domande iniziali:
1) Se abbiamo una funzione derivabile in un punto, sarà anche continua in quel punto?
2) E se abbiamo una funzione continua in un punto sarà anche derivabile?

La nostra risposta alle due domande

<u>Esercizio (da svolgersi individualmente)</u>
Prendi di nuovo in esame le funzioni che hai analizzato nella parte introduttiva di questa lezione. Scrivi per ognuna di esse se sono continue in x=0 e se sono derivabil in x=0. Motiva la risposta.
Le funzioni sono:

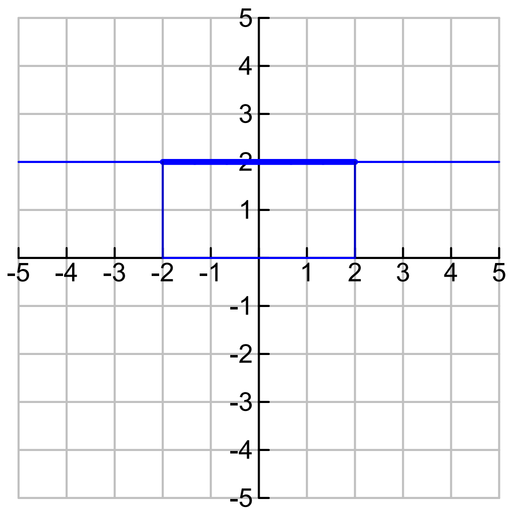
$f(x) = x^3 - 3 \cdot x^2 + x + 1$ $\quad g(x) = \begin{cases} x - 1 & x < 0 \\ x + 1 & \text{else} \end{cases}$ $\quad h(x) = \sqrt{|x|}$ $\quad k(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < 0 \\ -(x^2) - 1 & \text{else} \end{cases}$

Scheda 2 Dal concetto di area sottesa al grafico di una funzione continua al Teorema Fondamentale del Calcolo (TFC)

(Attività individuali e di gruppo. Tempo da dedicare in classe: 10 ore)

Attività 1(di gruppo, 2 ore circa)

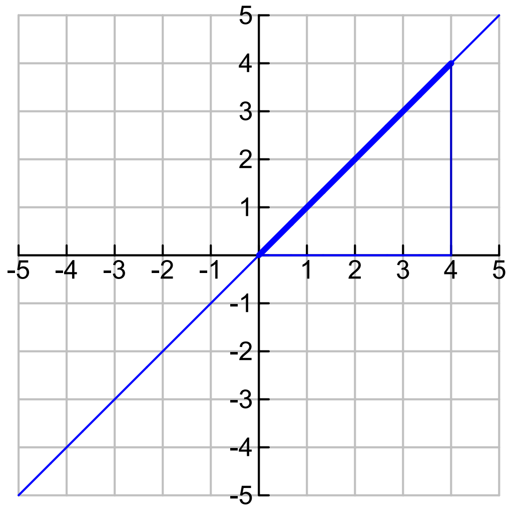
1) Osservate il grafico seguente si tratta della funzione f(x)=2, potete notare un rettangolo delimitato dal grafico, dall'asse x e dalle rette x=-2 e x=2. Indichiamo la sua area con A(2, [-2,2]).



Quanto vale l'area A(2, [-2,2]) ?

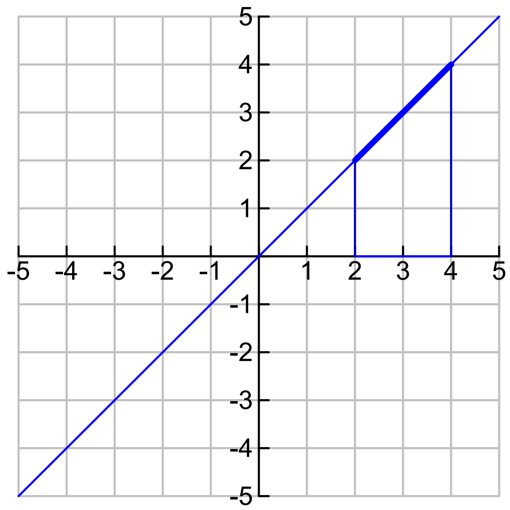
La nostra risposta

2) Calcolate ora l'area evidenziata nella figura seguente che scriviamo A(x,[0,4]); si tratta dell'area del triangolo individuato dalla retta y=x e dall'asse x quando x varia tra 0 e 4.



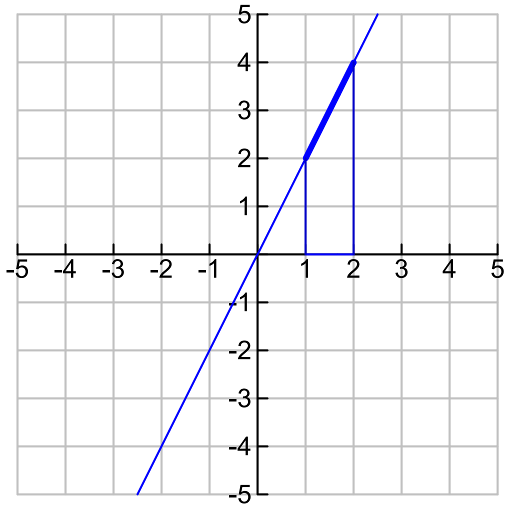
Quanto vale l'area A(x,[0,4]) ?
La nostra risposta

3) Considerate il grafico seguente



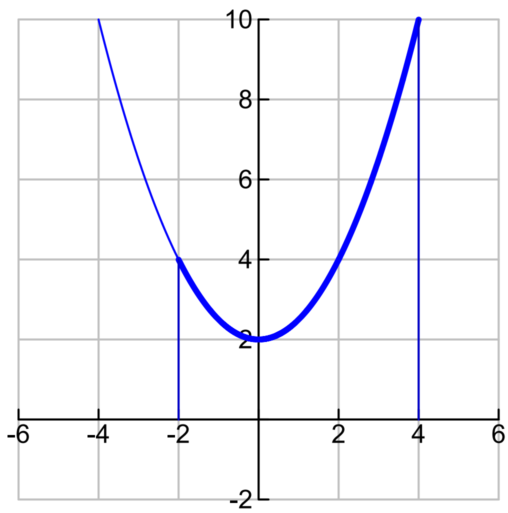
Quale notazione usereste per indicare l'area evidenziata in figura? Quanto misura quest'area?
La nostra risposta

4) Considerate il grafico qui sotto



Come indichereste l'area evidenziata e quanto misura?
La nostra risposta

4) Fino a ora avete calcolato aree di poligoni che conscete. Cerchiamo ora di capire come fare a trovare, o ad approssimare, l'area della figura compresa tra il grafico di una funzione e l'asse x anche in casi meno semplici.
In figura potete osservare il grafico della funzione f(x)=(1/2)x^2+1. Vogliamo valutare l'area A((1/2)x^2+1,[-2,4]).
Per farlo potete contare i quadretti; ciascun quadretto ha area 2*2=4.

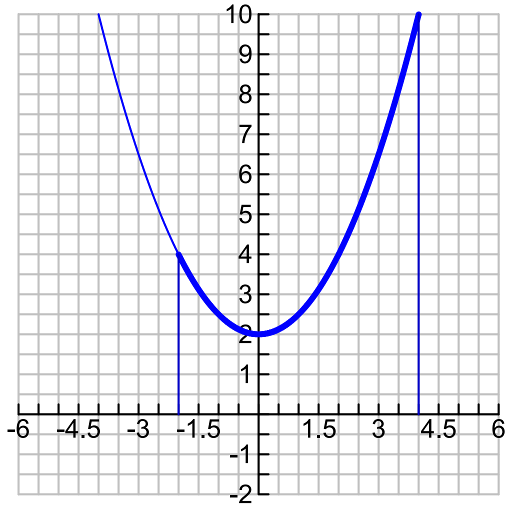


Come fate a dare una valutazione per difetto e una per eccesso dell'area?
La nostra risposta

Vediamo di migliorare l'approssimazione. Per farlo infittiamo il numero di quadratini.
Con un doppio clic aprite la figura precedente e cliccate sul tasto Format; nella casella XScale scrivete 1 e nella casella YScale scrivete ancora 1.
Descrivete che cosa è successo e come questo vi porta a migliorare l'approssimazione.
La nostra risposta

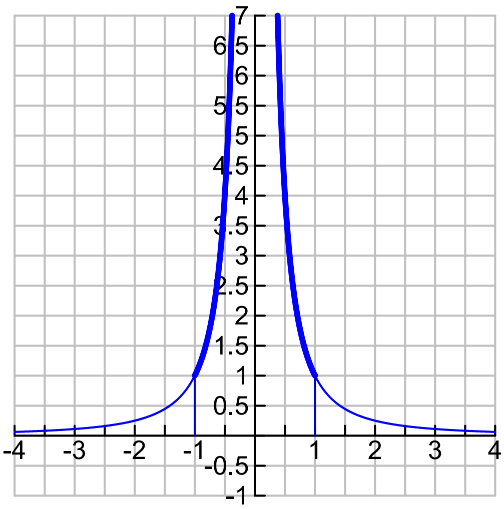
Potete continuare a migliorare l'approssimazione immettendo il valore 0.5 sia in XScale che in YScale. Ci vuole un po' di pazienza, ma se volete trovare dei risultati sempre migliori dovreste continuare su questa strada ...

Ci chiediamo se è sempre possibile effettuare questo tipo di approssimazione. Possiamo trovare una condizione che individua una classe di funzioni per cui questo è possibile.
Infittendo la griglia dovreste aver ottenuto un grafico come quello nella figura seguente. In questa figura son stati predisposti i seguenti fattori di zoom: 1 sulle y e 2 sulle x; operando degli zoom, il grafico viene così stirato orizzontalmente.
Fate un doppio clic sulla figura e operate zoom successivi; osservate che cosa accade alla figura. In particolare osservate che cosa accade se si pone -0.5 come xmin e 0.5 come xmax.



Le nostre osservazioni

Vediamo un altro caso.
In figura è rappresentata la funzione f(x)=1/x^2. Discutete se secondo voi è possibile fare lo stesso procedimento fatto per la parabola precedente per trovare l'area A(1/x^2, [⁻1,1]) e per quali funzioni quel procedimento è sicuramente possibile.



Le nostre ipotesi

Eventuale richiesta di chiarimento da parte dell'insegnante

Attività 2 (di gruppo, 1 ora circa)

Avete visto come, grazie all'area di tanti rettangoli, sia possibile approssimare l'area A(f(x),[a,b]), cioè l'area sottesa sottesa al grafico di una funzione continua

f(x).
Con questa attività indaghiamo ancora il legame tra l'area sottesa ad una curva e l'area di un rettangolo.

Se disponete di Cabri II Plus aprite, cliccando sull'hotword, il file rettangolo_plus.

Se, invece, non avete Cabri II plus, allora aprite il file rettangolo java che vi consentirà di eseguire, con un po' più di fatica, la stessa esplorazione.
Nella figura trovate il grafico di una cubica y=ax^3+bx^2+cx+d. Inizialmente però a=0, b=0.5, c=0 e d=1 così il grafico è quello di una parabola e in particolare della parabola y=(1/2)x^2+1 che avete già analizzato in precedenza.
In basso a destra potete muovere i cursori per modificare i coefficienti a, b, c, d della cubica, non fatelo però subito, o se lo fate tornate poi alla situazione iniziale con a=0, b=0.5, c=0 e d=1.
Sull'asse x trovate un segmento compreso tra h e k. All'inizio h=⁻2 e k=4 così siamo proprio nella stessa situazione già analizzata.
In alto a destra sono visualizzate:
- l'area della parte di grafico tratteggiata, cioè l'area A(y,[h,k]);
- l'area del rettangolo giallo che ha per base il segmento compreso tra h e k e la cui altezza potete modificare trascinando il punto P.

Siete pronti per incominciare l'attività.
Se avete trascinato qualche punto tornate nella situazione di partenza con la funzione y=0.5x^2+1 e l'intervallo [⁻2, 4] sull'asse x.
Muovete il punto P e:
a) Tra tutti i rettangoli interamente contenuti nella zona tratteggiata, individuate quello di area massima;
b) tra tutti i rettangoli che contengono interamente la zona tratteggiata, indivuduate quello di area minima;
c) Secondo voi è possibile trovare un rettangolo che ha la stessa area della zona tratteggiata? Provate spostando opportunamente il punto P. Ci riuscite? Provate a spiegare perché.

Le nostre risposte

Eventuali dubbi

Adesso potete sbizzarrirvi, modificando l'equazione della funzione, oppure l'intervallo [a,b] sull'asse x; poi muovete P come prima. Provate un po' di casi e vedete se secondo voi esiste in ogni caso un rettangolo che approssimi l'area tratteggiata per difetto, uno che l'approssimi per eccesso e uno che abbia la stessa area.

Le nostre risposte

Eventuale richiesta di chiarimento da parte dell'insegnante

Attività 3 (in gruppo, 3 ore circa)

Finora avete misurato (quando possibile) aree comprese tra il grafico di una funzione, l'asse x, e due rette x=h e x=k che individuavano un intervallo [h,k] sull'asse x. Questa misura è rappresentata da un numero.
Adesso introduciamo la funzione area: non consideriamo più un intervallo fissato sull'asse x, ma un intervallo [h,x] il cui secondo estremo x può variare; non troveremo così un numero, ma una nuova funzione che dipende da x. Indichiamo questa funzione A(f(t),[h,x]), oppure se è chiaro qual è la funzione e qual è il primo estremo usiamo più semplicemente con A(x). Nota che abbiamo usato la notazione f(t) per la funzione che sottende l'area da calcolare per non creare confusione tra la variabile x che indica il secondo estremo dell'intervallo [h,x] e la variabile indipendente della funzione f.

Ovviamente iniziamo con casi semplici in cui la funzione f(t) è una retta e l'estremo h è zero.

Prima esplorazione

Aprite il file Area(x) di Cabri. Oppure, se non disponi di Cabri, apri il file Area(x) java che permette di effettuare le stesse esplorazioni.
La figura è stata costruita a partire dai due punti A e B sulla griglia; viene poi creato un punto x sull'asse x e il poligono giallo di cui puoi visualizzare l'area.
Inizialmente A=(0,2) e B=(1,2).
Che equazione ha la retta AB?

La nostra risposta

Muovete ora x e osservate come varia l'area.
Disegnate su un foglio uno schizzo del grafico della funzione A(x) che ottenete al variare di x.
Rispondete poi alle seguenti domande.
1) Che tipo di grafico ottenete?
2) Siete in grado di scrivere la funzione A(x) che vi da questo grafico?
3) Ricordando che il poligono giallo è un rettangolo di cui un lato misura x, siete in grado di spiegare perchè l'area ha proprio quell'espressione?

Le nostre risposte

Avrete notato che ci sono casi in cui l'area è espressa da un numero negativo. Questo è un po' diverso da quello a cui siete abituati, in realtà non viene misurata l'area, ma l'*area con segno*.
Nell'esempio che avete appena considerato, in quali casi l'area è negativa ?

La nostra risposta

Seconda esplorazione

Riprendete ora la figura di Cabri e spostate A in modo che sia il punto (0,-1) e

spostate B in modo che sia (1,-1).
Ripetete la stessa indagine di prima: scrivete l'equazione della retta AB, disegnate il grafico della funzione A(x) e rispondete alle tre domande precedenti.
Le nostre risposte

Questa volta in quali casi l'area è espressa da un numero negativo?

La nostra risposta

Adesso passiamo a vedere che cosa accade se la retta non è costante. Vi proponiamo altre tre esplorazioni e in ognuna di esse dovrete:
1) scrivere l'equazione della retta AB,
2) indagare come varia l'area muovendo x
3) tracciare uno schizzo del grafico di A(x)
4) scrivete l'espressione analitica di A(x)
Provate anche a giustificate l'ultima risposta sfruttando le formule delle aree di triangoli o di trapezi: potrete osservare che in tutti i casi un lato del poligono è x e un altro lato è y, ma potete scrivere y in funzione di x perchè conoscete l'equazione della retta AB.

Terza esplorazione
Nella figura di Cabri muovete A e B e fate in modo che A=(0,0) e B=(1,1); rispondete quindi alle domande precedenti.

Le nostre risposte

Ulteriori possibili commenti

Quarta esplorazione

Fate ora in modo che A=(0,0) e B=(1,2) e rispondete alle stesse domande.

Le nostre risposte

Ulteriori possibili commenti

Quinta esplorazione

Infine spostate A e B in modo che A=(0,1) e B=(1,3)

Le nostre risposte

Ulteriori possibili commenti

Eventuali punti non chiari da richiedere all'insegnante:

Cabri vi può aiutare a verificare se le risposte precedenti erano corrette.
Se avete Cabri II Plus, potete effettuare la costruzione da soli: tenete aperto il file Area(x); selezionate il comando Trasporto di misura e cliccate prima sul numero che rappresenta l'area e quindi sull'asse y, avete così creato un punto sull'asse y che ha ordinata Area(x); da questo punto tracciate la parallela all'asse x; generate ora il punto di intersezione tra questa retta e la retta verticale passante per il punto x; il grafico di A(x) è il Luogo descritto da questo punto al variare del punto x. Col comando Coordinate o equazioni cliccate sulla retta di partenza e sul luogo per visualizzarne l'equazione. Potete salvare il file con il nome Area(x)sol.
Se invece non avete Cabri II Plus, ma avete Cabri, aprite direttamente il file Area(x)sol , oppure, se non avete nemmento Cabri, aprite Area(x)soljava ; in queste figure trovate già il luogo e le equazioni che vi servono.

Muovete i punti A e B per ricondurvi ai casi che avete studiato nelle precedenti esplorazioni. Per ognuno dei casi scrivete qui sotto le equazioni della retta di partenza e della funzione area.

Prima esplorazione: A=(0,2) e B=(1,2)
Le due equazioni:

Seconda esplorazione: A=(0,⁻1) e B=(1,⁻1)
Le due equazioni:

Terza esplorazione: A=(0,0) e B=(1,1)
Le due equazioni:

Quarta esplorazione: A=(0,0) e B=(1,2)
Le due equazioni:

Quinta esplorazione: A=(0,1) e B=(1,3)

Le due equazioni:

Se qualche risultato era diverso da quelli da voi previsti cercate di analizzarlo.

Casi differenti da quelli previsti e spiegazione dei risultati

Analizzate ancora le coppie di equazioni che avete scritto in precedenza.
Cercate di individuare eventuali relazioni tra l'equazione della funzione di partenza e quella dell'area A(x). Discutete tra di voi e fornite una risposta.

La nostra ipotesi

Attività 4 (in gruppo, 2 ore)

Avete indagato che cosa accade alla funzione area A(x) compresa tra il grafico di una funzione f(x) e l'asse x nel caso in cui f(x) è una funzione lineare.
È venuto il momento di capire che cosa capita se f(x) è una funzione quadratica, oppure una cubica.

Per questa attività è necessario aver installato Cabri II Plus. Aprite il file Area_gen.fig .
Nella figura trovate il grafico di f(x)=x^2. Una regione di piano compresa tra quel grafico e l'asse x che potete variare muovendo il punto di ascissa x. In alto viene

visualizzata l'area della regione azzurra. Quest'area è riportata sull'asse y e per mette di indivudare il punto P di coordinate (x,A(x)).

Per prima cosa avvicinatevi al numero che rappresenta l'area A(x), quando compare la scritta "Questo numero", cliccate col pulsante destro del mouse e scegliete la voce "Area con segno". In questo modo Cabri calcolerà l'area attribuendo un segno secondo le convenzioni che avete individuato nell'attività precedente.

A questo punto muovete il punto x e osservate la traiettoria descritta da P.
Tracciate uno schizzo del grafico descritto da P e aiutandovi coi valori numerici di x e di A(x) provate a scrivere l'espressione della funzione area A(x).

La nostra risposta.

Avvicinatevi ora all'espressione x^2 e quando comapare la scritta "Questa espressione" fate un doppio clic, cancellate x^2 e scrivete x^3.
Spiegate come è cambiata la figura e discutete anche questa volta su come sarà il grafico e l'espressione A(x).

Le nostre risposte.

Fate ora tracciare il grafico di A(x) a Cabri: selezionate il comando Luogo e cliccate prima su P e poi su x. Controllate che il grafico sia quello che vi aspettavate.
Ricambiate ora l'espressione di f(x), tornando a f(x)=x^2. Il luogo è cambiato, controllate anche questa volta che corrisponda al grafico che avevate ipotizzato.

Eventuali differenze rispetto a quanto previsto e loro spiegazione.

A questo punto potete anche verificare se le vostre equazioni erano corrette. Per fare questo, selezionate il comando Coordinate o equazioni e cliccate sul grafico di A(x); compare l'equazione, dalla modalità Puntatore afferratela e trascinatela in una zona libera dello schermo.
Controllate che l'equazione sia quella prevista e fate lo stesso nel caso in cui f(x)=x^3.

Eventuali differenze rispetto alla previsione e loro spiegazione.

Prima di farlo fare a Cabri, discutete di quale sarà l'equazione di A(x) nel caso in cui:
a) f(x)=3x^2
b) f(x)=6x^2
c) f(x)=4x^3
e) f(x)=4x^3+3x^2
f) f(x)=4x^3-6x^2
g) f(x)=x^2+2x
h) f(x)=x^2+2x+1
Dopo che ne avete discusso e siete arrivati a una conclusione comune, scrivete le vostre risposte e le strategie che avete utilizzato.

Le nostre risposte

Provate ora a cambiare l'equazione di f(x) nel file di Cabri e osservate se ritrovate i risultati che avevate ipotizzato

Eventuali differenze rispetto alle nostre risposte.

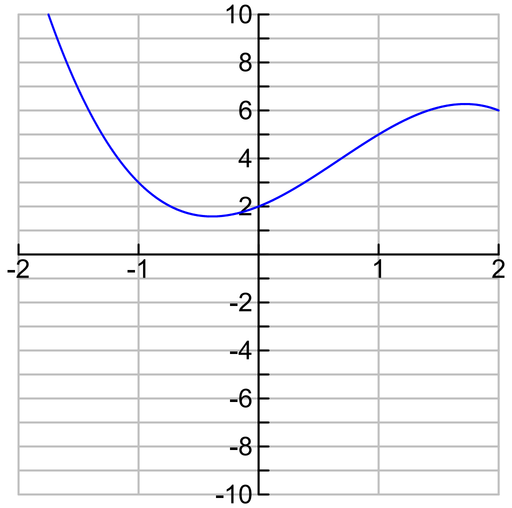
Ulteriori commenti o considerazioni.

Eventuali richieste di chiarimenti all'insegnante.

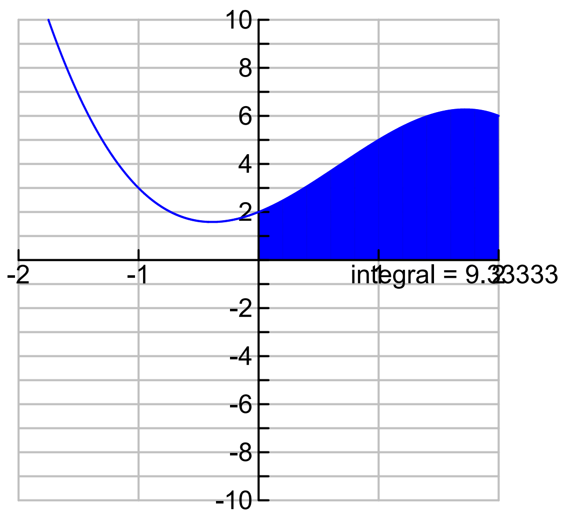
La funzione $f(x)=x^2+2x+1$ l'avete già incontrata più volte. In particolare l'avete incontrata nella lezione "Funzioni derivate e approssimazione locale di una funzione con una funzione quadratica". In quella lezione avete trovato una funzione g(x) tale che la sua derivata sia uguale a f(x) cioè $g'(x)=f(x)$.
Ricordando quel risultato e analizzando quanto avete visto in questa attività potete enunciare un altro risultato davvero significativo che lega la funzione area A(x) con la funzione di partenza f(x). Per la sua importanza questo risultato viene chiamato Teorema Fondamentale del Calcolo (TFC). Provate a scriverne l'enunciato

La nostra risposta

Una suggestiva giustificazione del TFC si può avere fondandosi sui due concetti di funzione area e di piattezza locale. Considerate una funzione continua in un intervallo, per esempio la funzione y = x^3 + 3x^2 +2 nell'intervallo [-2;2]



Poiché si tratta di funzione continua, essa può essere resa piatta nell'intorno di un qualunque suo punto; inoltre l'area sottesa dal grafico della fuzione nell'intervallo [0; x] è chiaramente funzione di x. Chiamiamo quest'area, come al solito, A(x).
Ci chiediamo qual è la relazione che lega A(x) alla funzione x^3+3x^2+2.
Notiamo che, essendo la funzione continua in 0, essa può essere resa piatta in un intorno di 0, come potete verificare nei modi già visti.
Allora, la differenza A(x+h) - A(x) tende a essere uguale all'area del rettangolo di altezza f(x) e di base h, come suggerisce la seguente figura (siete invitati a fare vari zoom in)



Quindi, per h che tende a 0,

$A(x+h) - A(x) = f(x) \cdot h$

ossia

$$\lim_{h \to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = f(x)$$

Ossia A'(x) = f(x) TFC

Attività 5 (in gruppo, 1 ora)

All'inizio di questa lezione avete considerato la funzione f(x)=(1/2)x^2+1. Determinate la funzione A(x), o meglio A(f(t),[0,x]).
Sfruttate questo risultato per trovare A(4)=A(f(t),[0,4]) e A(1)=A(f(t),[0,1]).
Servendovi di quanto avete fatto siete determinate A(f(t),[1,4])
Siete ora in grado di calcolare anche A(f(t),[-2,4]).
Confrontate questo risultato con quello trovato all'inizio della lezione approssimando l'area grazie alla quadrettatura.

Le vostre risposte

Scheda 3 Il grafico delle funzioni data la pendenza della tangente

(Attività di gruppo. Tempo da dedicare in classe: 2 ore)

Aprite il file vettorependenza di Cabri II Plus.
In alto a sinistra trovate una funzione indicata con y'=f(x). Nella figura viene dato un punto P (di cui indichiamo con x_P l'ascissa) e si è costruito un vettore che ha pendenza uguale a $f(x_P)$.
Nel seguito utilizzerete il comando Traccia; applicando questo comando al punto P e muovendolo, rimmarrà impressa sullo schermo la sua traiettoria.
Ricordate che per eliminare la traccia basta utilizzare il comando Ridisegna tutto nel menu Edita. Mentre se volete fare in modo che P non lasci più la traccia basta selezionare di nuovo il comando Traccia e applicarlo un'altra volta a P.

Spostate il punto P in modo che coincida con l'origine degli assi. Fate lasciare la traccia a P. Adesso muovetelo in modo da seguire la direzione indicata dal vettore.
Che tipo di grafico trovate? Ve lo aspettavate? Che cosa cambia se anzichè prendere come punto di partenza l'origine considerate il punto (0,1)? Quante funzioni esistono data la pendenza delle tangenti al loro grafico?

Le nostre risposte

Cambiate ora la funzione g(x) e ripetete l'esplorazione precedente nei seguenti casi:
a) g(x)=2
b) g(x)=2x
c) g(x)=x^3
d) g(x)=x^2+2x+1

Le nostre risposte

Data una funzione polinomiale f(x), quali sono le analogie e le eventuali differenze tra il problema di trovare la funzione area A(f(x),[0,x]) e quello di trovare la funzione di cui f(x) è la derivata? Discutete tra di voi e poi rispondete.

La nostra risposta

Eventuali punti da richiedere all'insegnante

Il problema del calcolo delle aree è stato uno dei primi problemi che si son trovati ad affrontare i matematici greci (e non solo).
Risolto il problema per i poligoni, Archimede_ trovò metodi geniali per determinare l'area di superfici dal contorno curvilineo.

Fu solo nel Rinascimento che gli studi dei Greci furono ripresi, in particolare da da due allievi di Galileo Galilei, B. Cavalieri_ (1598-1647) e E. Torricelli_ (1606-1647).
Così nel XVII secolo si svilupparono due problemi matematici, apparentemente molto lontani:

- **il calcolo di aree a contorno curvilineo**
- **la ricerca di una funzione di cui si conosce la pendenza della tangente in ogni punto**

Furono Torricelli e Isaac Barrow_ (1630-1677) a dare un impulso decisivo alla soluzione di questi problemi che portarono alla nascita di un nuovo ramo dell'analisi matematica: il calcolo integrale.
In realtà essi sono in qualche modo lo stesso problema, nel senso che risolto uno è risolto anche l'altro.

I. Newton_ (1642-1727) e G. Leibniz_ (1646-1716) hanno dato i contributi più innovativi, mentre la sistemazione di tecniche e concetti così innovativi fu un'opera molto lunga e laboriosa, che impegnò i matematici per circa centocinquant'anni. Fra i matematici che diedero profondi contributi ricordiamo A. L. Cauchy_ (1768-1857) e Karl Weierstrass_ (1815 - 1897).

Da completare eventualmente con

Scheda 3 Il valor medio di una funzione in un intervallo

(Attività individuali e di gruppo. Tempo da dedicare in classe: 2 ore)

e sicuramente con:

Test di autovalutazione

In sintesi

Esericizi di consolidamento