IL PROBLEMA DELLE PARTI: PRASSI DIDATTICA E STORIA DELLA MATEMATICA

Domingo Paola
Liceo scientifico "G. Bruno" Albenga
Dipartimento di Matematica Università di Genova

RIASSUNTO

In questo lavoro presento un'esperienza effettuata in una classe di quinta ginnasio nella quale ho utilizzato un problema classico del calcolo delle probabilità per avviare una riflessione sul concetto di "gioco equo". Mi soffermo, in particolare, sulle strategie risolutive scelte dai vari gruppi degli studenti per affrontare il problema e ne discuto le analogie con le soluzioni che via via hanno proposto, nel corso della storia, alcuni matematici che si sono occupati del problema. Spero che la descrizione e la discussione dell'esperienza possano offrire spunti e suggerimenti per attività analoghe che si intendano avvalersi della storia della matematica come fonte di problemi significativi.

INTRODUZIONE

Non è raro sentire esprimere pareri favorevoli a un'utilizzazione della storia della matematica nella pratica di insegnamento e apprendimento. In effetti la storia può essere motivante; può favorire la comprensione di concetti particolarmente importanti e delicati, presentandone genesi ed evoluzione; aiuta sicuramente a creare un contesto e quindi a dare significato agli argomenti oggetto di trattazione.

In questo lavoro descrivo un'esperienza, effettuata in una classe di quinta ginnasio, nella quale la storia della matematica ha fatto continuamente da sfondo all'attività di insegnamento e apprendimento durante la risoluzione di un problema classico del calcolo delle probabilità da parte degli studenti.

Il problema che è stato proposto è noto in letteratura come "problema della divisione della posta in gioco" o "problema delle parti". La prima versione del problema delle parti che ci è nota è presente in un manoscritto di anonimo del 1400 circa (Toti Rigatelli, 1985; Barra, 1992). La prima versione più nota è comunque quella di Luca Pacioli, che lo propone nel 1494 nella *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità*.

Questo problema riguarda la suddivisione della posta fra due (o più) giocatori di "uguale valore" (ossia che hanno la stessa probabilità di guadagnare un punto), che sono costretti a interrompere una partita prima che uno dei due giocatori abbia totalizzato il numero di punti necessari a vincere la partita. In riferimento a due giocatori A e B, i dati del problema sono: il numero n di punti necessari per vincere la partita; i numeri a e b di punti che hanno totalizzato, rispettivamente, A e B al momento dell'interruzione della partita. Tali dati possono essere riassunti con la notazione [*n*: *a* ; *b*] ove *a* e *b* sono numeri naturali minori di *n* (Garibaldi, 1982). Pacioli propone il problema [60: 50 ; 20], risolvendolo, come vedremo, in modo errato.

In questo articolo descrivo le strategie risolutive proposte dagli studenti e la loro evoluzione in seguito alla *discussione collettiva orchestrata dall'insegnante* (cioè da me), nel senso di (Bartolini Bussi, Boni & Ferri, 1995) .

Mi sembra particolarmente interessante il fatto che gli studenti abbiano inconsapevolmente riproposto alcune strategie risolutive che i matematici che si sono occupati del problema ci hanno fatto pervenire attraverso testi a stampa. Ciò mi ha permesso di utilizzare le fonti storiche in una specie di gioco *voci - eco*, nel senso di (Boero, Pedemente & Robotti, 19967), nel quale le *voci* della storia, ossia le soluzioni proposte dai matematici, hanno fatto *eco* alle *voci* della classe, ossia alle soluzioni proposte dagli studenti. In alcuni casi le voci della storia hanno dato dignità agli errori commessi dagli studenti; altre volte hanno contribuito a dar forza a idee espresse da alcuni studenti, consentendo che esse venissero riconosciute da tutta la classe e diventassero a tutti gli effetti oggetto di discussione. Ciò, oltre a consentire di creare atteggiamento riflessivo nei confronti del concetto di *gioco equo*, che era l'obiettivo didattico dell'attività, ha favorito l'instaurarsi e lo svilupparsi della discussione matematica con inevitabili benefici per la socializzazione e la condivisione del sapere.

LA PROPOSTA E LA METODOLOGIA DI LAVORO IN CLASSE

Agli studenti è stato proposto il seguente problema:

> Ariele e Calibano giocano a testa e croce con una moneta a due facce non truccata. A ogni lancio viene assegnato 1 punto al giocatore che indovina l'esito. Vince tutta la posta di 24 denari (12 dei quali sono di Ariele e 12 di Calibano) chi per primo totalizza 6 punti. La partita viene però interrotta dal gendarme Prospero sul 5 a 3 per Ariele. Si chiede come debbano dividersi la posta Ariele e Calibano in modo tale che la suddivisione sia equa.

Gli studenti sono invitati a trovare strategie di approccio al problema. la modalità di lavoro, inizialmente, è quella nei piccoli gruppi: quattro gruppi composti ciascuno da quattro studenti. In seguito, dopo un'ora al massimo di lavoro, i coordinatori dei vari gruppi devono esporre le strategie risolutive scelte: in questa seconda il mio ruolo è quello di *direttore d'orchestra* delle diverse *voci*, di quelle degli studenti e di quelle, evocate, della storia.

È bene precisare che gli studenti hanno affrontato i primi elementi di calcolo delle probabilità nella scuola media e nell'anno precedente (fino alle leggi delle probabilità totali e composta per eventi indipendenti). Il tutto si è svolto in una lezione di due ore.

DESCRIZIONE DEL LAVORO DI GRUPPO

In questa fase ho agito esclusivamente in qualità di osservatore: qui di seguito riporto alcune osservazioni effettuate.

La prima reazione della maggior parte degli studenti è stata di stupore, perché "il problema è troppo facile". Tutti i gruppi, in poco meno di venti minuti, hanno proposto di dividere la posta, ossia i 24 denari, per il numero totale di partite giocate, e di moltiplicare il risultato prima per 5, per ottenere i denari spettanti ad Ariele, poi per 3, in modo da ottenere quelli di Calibano.

I gruppi hanno però preferito non proporre subito alla discussione collettiva questa soluzione trovata "perché sembra troppo facile...può esserci un tranello o qualcosa che non abbiamo considerato" (Matteo, per esempio).

Io ho lasciato che i gruppi lavorassero altri venti minuti alla ricerca di soluzioni alternative. Tutti i gruppi, però, dopo alcuni tentativi che non riporto in questa nota, propendono per aver maggior fiducia nella prima soluzione fornita. A questo punto ritengo che gli studenti abbiano raggiunto un buon livello di fiducia nelle scelte effettuate e quindi propongo che si passi alla fase di discussione collettiva.

DISCUSSIONE COLLETTIVA: DESCRIZIONE DI ALCUNI MOMENTI E COMMENTO

Insegnante: *Bene, è il momento di confrontare le risoluzioni che ciascun gruppo ha proposto. Ho visto, passando tra i banchi, che avete lavorato bene, con impegno. Cercate anche in questa fase di discussione collettiva di essere particolarmente partecipi e attenti. È molto importante non solo che sappiate risolvere problemi, ma anche che sappiate difendere con argomentazioni corrette e convincenti le strategie risolutive che avete adottato. Inoltre è necessario che impariate ad ascoltare e a capire le soluzioni presentate dagli altri gruppi: solo comprendendole bene potete, se le ritenete non adeguate, trovarne ed evidenziarne gli eventuali punti deboli.*

Con questo intervento ho cercato di predisporre la classe alla discussione collettiva, sia lodando il lavoro fino ad allora svolto, sia ricordando che tra gli elementi di valutazione della discussione vi è la capacità di analisi critica delle idee altrui.

Matteo (scrivendo alla lavagna): 5+3= 8 *parti che sono da dividersi fra Ariele e Calibano*.

24 = posta
24:8=3
$5 \cdot 3=15 \rightarrow$ *vincita di Ariele*
$3 \cdot 3=9 \rightarrow$ *vincita di Calibano*

Ho riportato solo la soluzione del gruppo di Matteo, perché le altre proposte sono del tutto simili a questa. La discussione, per tale motivo, non si sviluppa. Gli studenti sono tutti d'accordo e quindi hanno perso ogni stimolo alla ricerca di soluzioni alternative. Il mio intervento, in questo momento, è necessario, per creare nuovo interesse nel problema.

Insegnante: *vedo che siete tutti d'accordo. L'idea che avete avuto, in sostanza, è quella di suddividere la posta in parti proporzionali al punteggio di ogni giocatore tenendo conto delle partite giocate*.

Ho pensato fosse importante precisare l'idea sulla quale gli studenti hanno basato la loro prima strategia risolutiva, introducendo alcuni termini (*parti proporzionali al punteggio di ogni giocatore tenendo conto delle partite giocate*) che mi sarebbero stati utili in seguito, e che, in questo frangente vengono naturalmente accettati dagli studenti, perché sono solo una precisazione, una sintesi di quanto detto dai vari gruppi. In tal senso questo iniziale intervento ha lo scopo di rafforzare ancora di più la convinzione degli studenti sul tipo di risoluzione proposta.

Insegnante: *il fatto che siate tutti d'accordo sembra rendere inutile una discussione...ma c'è qualcosa che non mi torna... mi sembra che se il punteggio non fosse di 5 a 3 le cose non andrebbero poi così bene...Eleonora, sei disposta a giocare con me a testa e croce?*
Eleonora: *va bene*.
Insegnante: *ci giochiamo, come Ariele e Calibano, 24 denari. Vince chi per primo arriva a 6 punti. Ecco una moneta da 500 lire....Che cosa scegli, testa o palazzo?*
Eleonora: *testa*.
Insegnante: *È uscito testa* (facendo vedere il risultato a tutti gli studenti)...*Attenzione! Sta arrivando la Preside! Dobbiamo interrompere il gioco...ci incontreremo dopo per suddividerci la posta in parti eque.*

Ricordo che sono partito da una condizione di totale accordo sulla risoluzione. Se avessi semplicemente rilevato che l'approccio risolutivo scelto non rispetta la condizione di equità richiesta avrei fatto cadere la soluzione dall'alto, correndo il rischio che gli studenti l'accettassero, perché espressa da fonte autorevole, magari senza averla capita. Ho pensato che fosse opportuno porre gli studenti di fronte a un caso limite nel quale la non equità della suddivisione della posta nel caso della soluzione prospettata dagli studenti fosse evidente. Se la partita viene interrotta sull'1 a 0, con l'approccio risolutivo scelto, tutta la posta andrebbe a Eleonora e nulla spetterebbe all'insegnante. Per mettere maggiormente in evidenza questo fatto ho ripetuto lo stesso gioco fatto con Eleonora, anche con Davide e con Emanuele. Quando ho chiesto a Emanuele, che ha vinto, se ritenesse equo che io vincessi tutta la posta, Emanuele, ma anche molti altri studenti, sono stati d'accordo nel dichiarare che la suddivisione non potesse essere ritenuta equa:

Stefania (per esempio): "*il giocatore che perde ha ancora molte possibilità di ribaltare la situazione ...anche sul 5 a 0 vi è la possibilità di ribaltare la situazione*".

Ho registrato ancora qualche sporadico tentativo di salvare la soluzione precedente. Per esempio Matteo suggerisce che la risoluzione precedente possa continuare a essere valida per il punteggio di 5 a 3 e, in generale, quando uno dei due giocatori abbia almeno un punto. Gli interventi, però, sono condotti con poca convinzione: in pratica, Matteo e i pochi altri studenti rimasti a difendere (debolmente) la strategia risolutiva proposta all'inizio, si convincono da soli che la loro soluzione non garantisce l'equa suddivisione della posta.

Alcuni studenti appaiono un po' sconfortati: la soluzione che credevano corretta è stata distrutta in pochi minuti! Per evitare che qualcuno fosse demotivato alla ricerca di soluzioni alternative ho fatto notare che

- il problema proposto era sufficientemente interessante all'epoca: i giochi d'azzardo, benché proibiti, erano praticati e spesso interrotti dall'intervento dei gendarmi. In tal caso, uno dei giocatori si incaricava di mettere al sicuro l'intera posta e, in seguito, tutti i giocatori si riunivano per dividerla in parti eque
- nonostante l'interesse per il problema e nonostante i tentativi di risoluzione di Pacioli, Cardano, Tartaglia e di Pietro Cataneo, si dovette attendere fino alla metà del

diciassettesimo secolo per avere una risposta corretta con Pascal e, indipendentemente, con Fermat

- Pacioli propose la stessa risoluzione proposta inizialmente dagli studenti, utilizzando la strategia di suddividere la posta in parti proporzionali al punteggio di ogni giocatore tenendo conto delle partite giocate (Barra, 1992, Garibaldi, 1982)

Punteggio totale : punteggio del giocatore A = posta : danari che spettano ad A

ossia, nel nostro caso:

$$8 : 5 = 24 : x$$

da cui si ottiene che, secondo tale modello, un'equa spartizione sarebbe di 15 danari ad Ariele e 9 a Calibano.

L'incursione nella storia ha avuto lo scopo di dare dignità all'errore commesso dagli studenti: non si trattava di un errore banale, visto che anche un matematico l'ha commesso. Il mio intervento è servito a dare dignità alla ricerca di una strategia risolutiva alternativa, che potesse soddisfare tutti i componenti della classe (insegnante compreso).

Dopo questo intervento, la discussione riprende con vivacità. Tutti gli studenti partecipano e il mio ruolo cambia nuovamente: da stimolatore a moderatore. Ora devo limitarmi a guidare il traffico delle idee e delle informazioni, ma, come ogni direttore d'orchestra che si rispetti, devo lasciare il giusto spazio ai miei "solisti", senza mai perdere mai il controllo della situazione.

Riporto alcune fasi della vivace discussione che si è prodotta.

Francesca: *Perché non si decide di dare tutta la posta al giocatore che sta vincendo?*
Sonia*: Ma in tal caso le parti non sono più eque! Uno che sta perdendo ha ancora possibilità di vincere. La partita non è finita, è solo stata interrotta dall'intervento di Prospero...*
Pamela: *Sono d'accordo. Dobbiamo tenere conto delle possibilità che Calibano ha ancora di vincere.*
Emanuele: *Sì, però si potrebbe stabilire che, in ogni caso, chi sta vincendo si prenda tutta la posta! È una scelta come un'altra*.
Carlo: *Allora si potrebbe anche stabilire che si continui a giocare un'altra volta ripartendo dal punto in cui sono rimasti*.
Sara: *Allora potremmo anche decidere di far fuori Prospero!*
Insegnante: *Tutte quelle proposte potrebbero essere valide strategie risolutive, se però ci si convince che si tratta di soluzioni eque. Forse quello che ancora non è stato esplorato a fondo è il concetto di equità. Che cosa vuol dire che una suddivisione è equa?*

A questo punto mi è sembrato opportuno introdurre uno spunto di riflessione, anche per evitare che la situazione mi sfuggisse di mano. Proprio per tale motivo ho cercato di mettere in evidenza la voce di Sonia, che fa riferimento all'equità. Il mio scopo è stato solo parzialmente raggiunto: gli studenti, infatti, hanno evitato di proporre altre soluzioni simili a quella di Sara, ma non hanno preso in seria considerazione il problema di stabilire che cosa si intenda effettivamente con *equa suddivisione*. Non ho insistito nella mia richiesta perché non ho ritenuto i tempi sufficientemente maturi. Riporto alcuni momenti del prosieguo della discussione.

Armando: *Il massimo punteggio ottenibile è 6. Allora faccio* 24 : 6 = 4. *Moltiplico* 4 *per* 5 *e poi per* 3 *e ottengo i soldi da dare ad Ariele e quelli da dare a Calibano*.
Matteo: *Non è possibile! Dovresti dare 32 denari, quando ne hai solo 24. Ottieni un numero più grande della posta!*
Silvia: *Dividiamo* 24 per 12. *Otteniamo* 2. *Quindi* 2·5= 10 *denari ad Ariele e* 2·3 = 6 *denari a Calibano*
Armando: *Sì, ha ragione, perché punti totali possibili sono* 12 (Armando si riferisce al massimo numero di partite che in linea di principio possono essere giocate prima che uno dei due giocatori arrivi a 6). *Il fatto è che rimangono* 8 (ossia 24-16= 8) *denari da spartire fra Ariele e Calibano. Questi, visto che non sono ancora stati assegnati, li possiamo dividere in parti eque, cioè metà per uno. Quindi* 10+4 = 14 *denari ad Ariele e* 6+4 = 10 *denari a Calibano*.
Isabella: *Perché dividi per 12? Non si può mai arrivare a 12 partite.*
Simona: *Il numero massimo di partite è 11.*
Matteo: *A Calibano mancano tre punti per vincere. Ad Ariele manca un punto per vincere.* 3+1=4. *La posta è* 24. 24:4 = 6.
6·3 = 18 *denari ad Ariele* e 6·1 = 6 *denari a Calibano*.
Simona: *Ma no, perché moltiplichi i punti che mancano a Calibano per ottenere i denari di Ariele e quelli che mancano ad Ariele per ottenere quelli di Calibano*?
Armando: 24: 11. *Faccio* 24: 11, *perché i punti totali possibili sono* 11.
Simona: *Sì è giusto, ma* 24: *11 non è un valore esatto. Allora dobbiamo dare una soluzione approssimata*.
Davide: *Ma basta lasciare la frazione....*
Emanuele: *Sì, lasciamo la frazione. Calcoliamo quanto vale in denari ogni partita. Poi se uno ha vinto* x *partite moltiplichiamo* x *per il numero massimo di denari che possiamo attribuire a una partita. Quelli che rimangono li dividiamo in parti uguali.*

La discussione, a questo punto, procede in modo piuttosto confuso. Li lascio fare per qualche minuto. Poi consiglio di ritornare a riflettere, per non più di una decina di minuti, nei singoli gruppi per chiarirsi un po' le idee. Prima che riprenda la discussione faccio notare che i tentativi di soluzione proposti hanno avuto almeno due meriti:

- mettere in evidenza che una suddivisione equa deve tenere conto non solo delle partite giocate, ma anche di quelle che rimangono da giocare (come suggerito esplicitamente dall'intervento di Matteo, che addirittura tiene conto solo di quelle che ancora rimangono da giocare)
- ribadire, anche se non esplicitamente, che non si è ancora analizzato a fondo e chiarito che cosa si intende per *equa suddivisione*.

Intervengo anche per sottolineare che in una divisione equa della posta di deve tenere conto delle possibilità di vittoria che ciascun giocatore ha al momento in cui la partita è stata interrotta. E per far questo bisogna esplorare le varie possibilità che rimangono quando la partita viene interrotta. Come si può notare, non ho ancora introdotto il termine *probabilità*.
Infine faccio presente che dopo il tentativo scorretto di Pacioli, altri matematici hanno provato a risolvere il problema. Per esempio Tartaglia contesta la soluzione di Pacioli proprio considerando il caso in cui la partita sia interrotta quando uno dei due giocatori abbia 0 punti. La soluzione proposta da Tartaglia, però, è anch'essa scorretta, perché rende equivalenti le due situazioni [100: 99; 86] e [100: 13; 0], che sono differenti (Barra, 1992). Pietro Cataneo e Filippo Calandri, per esempio, iniziano a tenere conto, per suddividere equamente la posta, anche delle partite che rimangono da giocare. Più tardi, Lorenzo Florestani preciserà che la strategia di Pacioli è criticabile perché, al momento dell'interruzione, la parte di posta non ancora giocata viene suddivisa *per rata de' colpi fatti, i quali non vi hanno parte alcuna*

(Simi, 1996). La voce della storia viene nuovamente evocata dall'insegnante per dare dignità alle soluzioni degli studenti che effettivamente ripercorrono quelle suggerite da alcuni matematici prima di Pascal e Fermat.

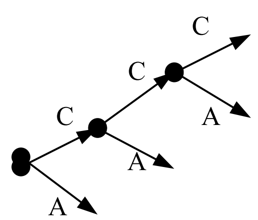
A questo punto Matteo interviene per proporre una soluzione pensata durante il secondo lavoro in gruppo.

Matteo: *Siamo d'accordo sul fatto che si debba tenere conto sia delle partite che rimangono da giocare, sia di quelle già giocate. Per tenere conto di queste ultime abbiamo diviso* 24 *per* 12, *che è il numero massimo di possibilità, non di partite che si possono giocare. In questo modo abbiamo ottenuto* 2, *che è il numero massimo di denari a punto. Allora ad Ariele vanno* 10 *denari e a Calibano ne vanno* 6. *I restanti* 8 *denari li suddividiamo in parti proporzionali alle possibilità di vittoria che hanno i due giocatori. Ad Ariele basta una partita per vincere. A Calibano ne servono tre*. 3+1= 4 *Allora divido* 8 *in quattro parti e ne dò tre ad Ariele e una a Calibano*. *In definitiva, Ariele prende* 10+6 = 16 *denari e Calibano ne prende* 8.

Alcuni studenti non appartenenti al gruppo di Matteo, provano che cosa succede in casi diversi dal 5 a 3. Per esempio Emanuele chiede a Matteo di controllare la sua risoluzione sul punteggio di 1 a 0. In tal caso Ariele prenderebbe 2 denari per la partita giocata, mentre Calibano non ne prenderebbe nessuno. I restanti 22 denari dovrebbero essere suddivisi in 11 parti di cui 6 vanno ad Ariele e 5 a Calibano (Ariele per vincere deve vincere 5 partite, Calibano 6): 22:11=2 $2 \cdot 6$= 12 ad Ariele e 10 a Calibano. In definitiva ad Ariele vanno 14 denari e 10 a Calibano. Altre prove sono effettuate da altri studenti. Mi rendo conto, però, gli studenti non sono tutti sicuri e convinti della risoluzione proposta dal gruppo di Matteo, anche se non sono in grado di muovere critiche significative. Tra l'altro le due ore previste per la discussione del problema stanno per scadere e quindi decido di intervenire.

Insegnante: *È stata proposta una soluzione che sembra essere ragionevole. Anche a me sembra ragionevole e lo è sembrata anche ad alcuni matematici che hanno proposto qualcosa di simile. Ma come a quei matematici, anche a noi non convince del tutto; ci lascia un po' di amaro in bocca o forse solo un po' di incertezza. Siamo sicuri, per esempio, di aver preso in considerazione tutte le possibilità di vittoria che Ariele e Calibano hanno quando viene interrotta la partita? Vediamo: sul* 5 a 3 *quali potrebbero essere le varie possibilità? Vi chiedo, cioè, di prendere in considerazione, con me, tutti i casi possibili*.

A questo punto costruisco alla lavagna un diagramma ad albero per prendere in considerazione tutte le possibili situazioni che potrebbero verificarsi se la partita fosse continuata, invece di essere interrotta sul 5 a 3 per Ariele (A indica la vittoria di Ariele e C quella di Calibano).



Il diagramma ad albero consente di visualizzare lo spazio delle situazioni possibili: in questo caso è uno strumento particolarmente indicato, in quanto la partita è stata interrotta sul 5 a 3 e quindi lo spazio delle situazioni possibili non è eccessivamente complesso. Faccio notare agli studenti che, Calibano, per arrivare a sei punti prima di Ariele, deve vincere tre partite consecutive senza che Ariele ne vinca alcuna.

Quindi, suddividendo la lavagna in due parti sotto al diagramma ad albero, scrivo in una colonna la soluzione al problema, come l'avrebbe fornita Pascal (Boursin, 1992), e nell'altra colonna la traduzione in linguaggio moderno (utilizzando una forma più schematica di quella riportata qui di seguito).

Soluzione "alla Pascal"	Soluzione in termini moderni
Sul punteggio di 5 a 3 per Ariele, se si gioca un'altra partita e se Ariele vince, allora ad Ariele va l'intera posta, mentre se vince Calibano vanno sul 5 a 4. Allora ad Ariele spetta almeno metà della posta, ossia 12 denari. Sul 5 a 4 per Ariele, se si gioca un'altra partita e Ariele vince, allora ritira tutta la posta rimanente, mentre se vince Calibano vanno sul 5 a 5. Allora ad Ariele vanno, oltre ai 12 denari già stabiliti, almeno la metà dei 12 rimanenti, ossia 12+6= 18. Sul 5 a 5 si può giocare al più un'altra partita. Chi fra Ariele e Calibano vince ritira tutta la stessa posta rimanente. Quindi, se interrompono sul 5 a 5 devono dividersi la posta rimanente, ossia 3 denari a testa. Quindi, se il gioco viene interrotto sul 5 a 3 per Ariele, ad Ariele vanno 12+6+3=21 denari, mentre a Calibano ne spettano 24-21=3.	La speranza di vittoria di Ariele è legata al verificarsi di almeno una fra le seguenti successioni di eventi: E_1 ; E_2E_1 ; $E_2E_2E_1$ Ove: E_1 è l'evento "Ariele guadagna un punto"; E_2 è l'evento "Calibano guadagna un punto". Poiché E_1 ed E_2 hanno probabilità ½ , per la regola della probabilità composta di eventi indipendenti, si ha che E_1, E_2E_1, $E_2E_2E_1$ hanno, rispettivamente, probabilità uguali a 1/2 , 1/4, 1/8. Quindi la probabilità che Ariele ha di vincere è, per la regola sulla probabilità totale per eventi incompatibili, 1/2 + 1/4 + 1/8 = 7/8. Un'equa ripartizione dei 24 danari può essere effettuata suddividendo la posta in parti proporzionali alle probabilità di vittoria dei due giocatori: 21 danari ad Ariele e 3 a Calibano.

Ho fatto notare che il concetto di probabilità, che ha consentito di trovare una strategia risolutiva convincente è comparso proprio con Pascal e Fermat.

Come si può notare, ho utilizzato l'insicurezza di molti studenti nella soluzione proposta da Matteo per proporre la strategia risolutiva che fa uso del concetto di probabilità. Riflettendo con maggior attenzione, però, mi sembra che la mia azione avrebbe potuto risultare, in quest'ultima fase molto più incisiva. Infatti, con un impegno di un'altra ora di lezione, avrei potuto portare in classe il carteggio Pascal – Fermat sul problema di suddivisione della posta, leggerlo e commentarlo insieme agli studenti. Ciò avrebbe consentito di dare maggiore profondità alla voce della storia. Sarebbe stato interessante citare anche la soluzione (che porta allo stesso risultato ottenuto da Pascal) proposta da anonimo agli inizi del 1400 (Barra, 1992, Toti Rigatelli, 1985) e che, ovviamente, non fa uso del concetto di probabilità, ma utilizza solamente il calcolo delle equazioni.

Ulteriori spunti di discussione potrebbero essere introdotti riflettendo sulla condizione di equiprobabilità di vittoria e chiedendosi che cosa succederebbe se vi fossero motivi per mettere in dubbio tale condizione. In questo senso, come si afferma in (Barra, 1992), al quale rimando per ulteriori approfondimenti, si può dire che Fermat e Pascal hanno risolto il problema delle parti solo in condizioni particolari, quelle che prevedono, in ogni partita, uguali probabilità di vittoria per i due giocatori.

UNA CONSIDERAZIONE FINALE

L'esperienza che ho descritto è stata condotta all'inizio di quest'anno scolastico. Poiché mi è sembrato che il risultato fosse particolarmente felice ho provato a riprodurla in altre scuole, aiutato in questo da un esonero presso il Dipartimento di matematica dell'Università di Genova per svolgere attività di ricerca didattica. Devo confessare, però, che nonostante la disponibilità degli insegnanti a cui l'ho proposta, non sono riuscito a ottenere e osservare miglioramenti nell'utilizzazione delle voci storiche, alle quali, anzi, è stato dato spesso meno spazio di quello che hanno avuto nell'esperienza che ho descritto in questo lavoro.

Ho voluto concludere la descrizione e l'analisi dell'esperienza con questa nota per evidenziare che l'uso delle fonti storiche suggerito in quest'esperienza richiede un forte coinvolgimento dell'insegnante nel lavoro di progettazione, nella fase di osservazione (per poter avere poi argomenti di discussione che siano pertinenti alle proposte degli studenti) e in quella di discussione, dove l'insegnante deve riuscire a cogliere il momento in cui è opportuno cambiare ruolo, trasformandosi da moderatore in stimolatore o, talvolta, in conduttore della discussione. Inoltre richiede che la capacità di lavorare in gruppo, di ascoltare le idee espresse da altri, di condurre una discussione senza prevaricare i compagni, di riflettere sulle proprie conoscenze divengano oggetti specifici di didattica, con tutte le conseguenze che ciò comporta, innanzitutto quella di investire in tali attività parte del tempo che spesso viene dedicato all'acquisizione di competenze di carattere tecnico.

BIBLIOGRAFIA

Barra, M.: 1992, Il "problema della divisione della posta in gioco" e delle valutazioni di probabilità: 500 anni di storia - Soluzione bayesiana, in Atti del Convegno *Il pensiero matematico nella ricerca storica italiana*, Ancona, p. 143-174.

Bartolini Bussi, M., Boni, M., Ferri, F.: 1995, *Interazione sociale e conoscenza a scuola: la discussione matematica*, Rapporto tecnico n. 21, Modena.

Boero, P., Pedemonte, B. & Robotti, E.: 1997, Approaching theoretical knowledge through voices and echoes: a Vygotskian perspective, *Proceedings of PME 21*, Lathi, vol 2 p. 81-88.

Boursin, J.L.: 1992, *Caso e probabilità*, Nardi, Firenze.

Garibaldi, A.C.: 1982, Sulla preistoria del calcolo delle probabilità, in *Atti del Convegno La Storia delle Matematiche in Italia*, Cagliari, p.377-384.

Simi, A.: 1996, *Il problema delle parti. Alcune soluzioni anteriori alla nascita del calcolo delle probabilità*, Dipartimento di matematica Università di Siena.

Toti Rigatelli, L.: 1985, Il problema delle parti in manoscritti del XIV e XV secolo, Mathemata, p. 229-236, *Boethius: Texte Abh. Gesch. Exact. Wissensch, XII, Steiner*, Wiesbaden.