Software di geometria dinamica per un *sensato* approccio alla dimostrazione in geometria: un esempio di *Laboratorio di Matematica*.

Domingo Paola

Riassunto In questo articolo, dopo una breve introduzione che si propone di precisare che cosa si intende con Laboratorio di Matematica, presento un esempio di Laboratorio di Matematica per un sensato approccio alla dimostrazione in geometria. L'aggettivo *sensato* è da intendersi in una triplice accezione: legato all'esperienza, alla percezione, ai sensi; allo sviluppo e all'uso del sapere teorico; ragionevole, ossia adeguata alle esigenze e alla situazione attuali della scuola.

Abstract In this paper, after a brief introduction, which has the aim to precise what must be intended with the term "Mathematics Laboratori", I present an example of Mathematics Laboratory as a meaningful approach to proof in geometry. The adjective "meaningful" had to be intended in the sense of tied to the perception, but also tied to the theoretical thought and reasonable for the actual school's situation.

Domingo Paola
Liceo scientifico Issel di Finale Ligure
G.R.E.M.G. Dipartimento di Matematica Università di Genova
domingo.paola@tin.it

Il *Laboratorio di Matematica*

Che cosa intendo per Laboratorio di Matematica? Non si tratta di un luogo fisico, se non per il fatto che ogni attività si realizza in uno spazio fisico; non si tratta nemmeno di *una* metodologia: infatti, anche se il *laboratorio* ha sicuramente connotazioni di carattere metodologico, in esso possono affiancarsi o alternarsi metodologie anche significativamente differenti. Il *Laboratorio*, almeno nell'accezione che a esso a voluto dare la Commissione UMI (Commissione UMI, 2003) che ha lavorato alla stesura delle indicazioni curricolari dei nuovi programmi di matematica per la scuola secondaria, è un ambiente di apprendimento nel quale si svolgono attività finalizzate alla costruzione di significati degli oggetti matematici. Le caratteristiche fondamentali di un *Laboratorio di Matematica* sono essenzialmente tre:

1) L'uso di strumenti (che possono essere nuovi o antichi, poveri o ricchi) come mediatori nei processi di insegnamento – apprendimento. Tali strumenti devono cioè essere criticamente studiati e consapevolmente utilizzati per favorire l'evoluzione dai *sensi personali* (preconcezioni, immagini mentali, significati posseduti dagli studenti prima dell'attività didattica) degli studenti verso i *significati istituzionali* (obiettivi di apprendimento) individuati dall'insegnante.
2) Una *didattica lunga*, volta alla costruzione di significato, quindi una didattica *sensata* nella triplice accezione di legato all'esperienza, alla percezione, ai sensi, ma anche allo sviluppo e all'uso del sapere teorico e, infine, ragionevole, ossia adeguata alle esigenze e alla situazione attuali delle scuola. Non si costruiscono significati se non si lascia il tempo agli studenti di provare, di fare, di riflettere individualmente e in piccoli gruppi, di condividere, sotto la guida dell'insegnante, responsabile e garante del processo di insegnamento – apprendimento, le conoscenze e i significati che via via si costruiscono ed evolvono.
3) Una specifica attenzione alle dinamiche di interazione sociale in classe, perché si costruisce conoscenza anche comunicando con gli altri.

La metafora a mio avviso più adeguata per descrivere l'ambiente di apprendimento tipico del *Laboratorio di Matematica* è quella della *Bottega Rinascimentale*, dove gli apprendisti imparavano facendo e vedendo fare, quindi non solo per tentativi ed errori, ma anche per imitazione dei compagni e del maestro. Nel *Laboratorio*, così come nella *Bottega*, si impara facendo e vedendo fare, per tentativi ed errori e anche per imitazione, dei compagni e dell'insegnante.

Naturalmente realizzare una didattica di tipo "laboratoriale" comporta il confronto con alcuni problemi non sempre risolvibili in ogni situazione particolare e che possono comportare ostacoli più o meno significativi alla realizzazione di un progetto didattico. Il seguente elenco contiene alcuni esempi dei principali problemi con cui ci si deve confrontar se si vuole realizzare una didattica di tipo "laboratoriale":

1) la consapevolezza e l'accettazione che nel *Laboratorio* si devono realizzare forme di insegnamento – apprendimento di tipo percettivo – motorio (per prove ripetute, per tentativi ed errori, legate fortemente all'esperienza) come necessaria premessa per un avvio graduale e *sensato* a forme di insegnamento – apprendimento di tipo ricostruttivo – simbolico (lettura, interpretazione e trasmissione di *testi*), tipiche della prassi didattica che si attua in genere nelle nostre scuole.

2) La *genesi strumentale*, nel senso di Verillon e Rabardel (Verillon & Rabardel, 1995), ossia la necessità che gli artefatti utilizzati nell'attività didattica diventino a tutti gli effetti *strumenti* di insegnamento – apprendimento e quindi le loro modalità di utilizzazione siano davvero consapevolmente coerenti con il progetto didattico e funzionali al conseguimento degli obiettivi. Vedremo nel prosieguo, per esempio, che l'uso di Cabri come mediatore nel processo di avvio alla dimostrazione, può essere uno strumento formidabile o addirittura controproducente, a seconda di come lo si utilizza e a seconda di quella che si ritiene debba essere la funzione della dimostrazione.

3) Gli spazi spesso poco adeguati a favorire l'interazione sociale, il lavoro in piccoli gruppi, l'uso flessibile degli strumenti informatici.

4) La credibilità dell'insegnante per le famiglie degli studenti: si devono trovare ragioni valide che coinvolgano studenti e loro famiglie nel progetto formativo soprattutto se l'ambiente di insegnamento – apprendimento che si propone comporta innovazioni significative.

5) La consapevolezza di doversi innanzitutto rivolgere al futuro cittadino e non al futuro matematico.

Gli ingredienti del *Laboratorio di Matematica* finalizzato all'avvio alla dimostrazione in geometria

Quali sono le caratteristiche del *Laboratorio di Matematica* finalizzato all'avvio alla dimostrazione in geometria che presento in questo articolo? Il seguente elenco costituisce una prima risposta alla domanda.

1) *Problemi aperti*, ossia problemi il cui enunciato è piuttosto breve, relativamente facile da comprendere e le consegne non sono ben precisate, nel senso che lasciano spazio e anzi favoriscono ricerche personali e attività di problem posing. Tali problemi dovrebbero favorire attività di esplorazione, osservazione, produzione di congetture e loro successiva validazione.

2) Riduzione di consegne del tipo “*dimostra che*”, in quanto, a mio avviso, rischiano di recidere quella necessaria continuità cognitiva che esiste tra fase di esplorazione, osservazione, produzione e formulazione di congetture e la successiva fase di ricerca e costruzione della dimostrazione.

3) Uso di un software di geometria dinamica come strumento che favorisce e potenzia le attività di esplorazione e osservazione.

4) Lavori a coppie (al computer, perché gli studenti hanno bisogno di passarsi frequentemente il mouse) e in piccoli gruppi (durante la ricerca della dimostrazione o il confronto fra coppie di coppie in classe).

5) Discussioni matematiche alla presenza dell’intera classe e orchestrate dall’insegnante per sistemazioni in itinere delle attività via via svolte (Bartolini Bussi & altri, 1995).

Quale *significato* della dimostrazione?

Concludo queste note introduttive con una precisazione che dovrebbe iniziare a chiarire quanto prima ho accennato relativamente all’uso dello strumento, che può essere d’aiuto, ma anche di ostacolo al conseguimento degli obiettivi dell’attività didattica. Uno dei problemi più delicati è quello del ruolo e della funzione della dimostrazione. Se l’insegnante ritiene (o anche se si limita a evidenziare questo aspetto) che la dimostrazione sia un’attività volta a *convincere* che una congettura funziona, allora Cabri, che spesso convince più di una dimostrazione, svuoterebbe di senso l’attività del dimostrare. Lo strumento, in questo caso, ben lungi dal favorire l’evoluzione dei sensi personali degli studenti verso il significato istituzionale individuato dall’insegnante, renderebbe inutile la dimostrazione agli occhi degli studenti. Se, invece, l’insegnante ritiene che la funzione della dimostrazione sia quella di spiegare *perché* una congettura funziona, dopo essersi convinti che funziona, allora Cabri diventa uno strumento formidabile di avvio alla dimostrazione, perché aiuta a produrre congetture e a convincersi che valgono, creando quindi quelle premesse che anche un matematico come Polya riteneva necessarie per far nascere la motivazione al dimostrare.

Tra l’altro assumere come obiettivo didattico quello di evidenziare il ruolo della dimostrazione come attività volta a spiegare *perché*, consente di far evolvere gradualmente i sensi degli studenti verso la dimostrazione come attività che consente di precisare la nozione di conseguenza logica che esiste tra i *fatti* osservati e le conoscenze che, in qualche modo, sono state assunte. La dimostrazione diventa quindi uno strumento per far compiere agli studenti piccole esperienze di costruzione di teorie locali, sulle quali è possibile avviare il processo di costruzione del significato di una teoria. Tra l’altro, proprio la sempre maggiore consapevolezza del ruolo e del significato di una teoria aiuta nella piena comprensione del ruolo e del significato di dimostrazione come attività che consente di precisare la nozione di conseguenza logica tra teoremi e assiomi della teoria..

Esempi di problemi posti nel *Laboratorio* per un avvio alla dimostrazione

In questa sezione presento una serie di problemi di difficoltà crescente, che possono essere posti a studenti di scuola secondaria, i primi tre - quattro più adeguati per studenti del biennio, gli ultimi due, invece, più appropriati per studenti del triennio. Ricordo che le attività vogliono rivolgersi a *tutti* gli studenti e hanno il compito di motivare all'attività matematica soprattutto gli studenti che dimostrano meno interesse o più difficoltà: ciò vuol dire che nella prassi didattica non ci si aspetta, né si pretende che tutti gli studenti riescano a produrre risoluzioni come quelle qui di seguito proposte. Si deve essere soddisfatti se *tutti* gli studenti fanno attività matematica, esplorando le situazioni proposte, effettuando osservazioni, riconoscendo qualche invariante, producendo qualche congettura e, magari, qualche giustificazione a sostegno delle congetture prodotte.

<u>Problema 1</u> (Variazioni di grandezze; problemi di massimo e minimo)
Considerate un insieme di rettangoli che hanno perimetro costante, per esempio perimetro uguale a 12. Che cosa potete dire della loro area?

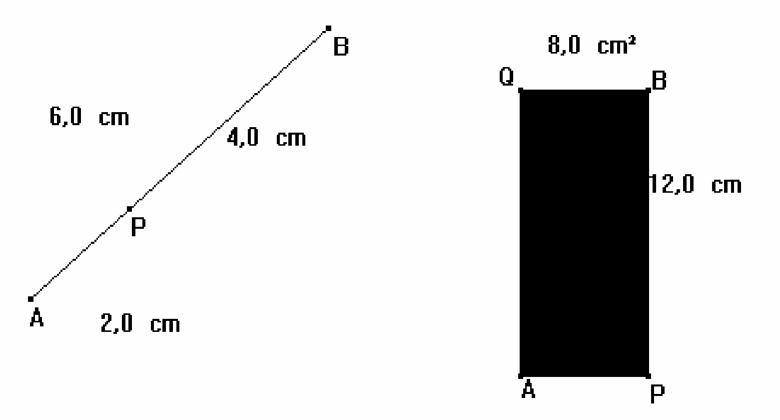


Fig. 1

A seconda dell'esperienza degli studenti nell'uso di Cabri, l'insegnante può preparare egli stesso il foglio di lavoro o farlo preparare agli studenti. Come suggerisce la figura, è stato tracciato un segmento AB che rappresenta il semiperimetro del rettangolo. Su di esso è stato messo un punto P che può variare fra A e B. AP e PB possono quindi rappresentare le dimensioni di un rettangolo di perimetro 12. Su una semiretta di origine A si trasporta la misura di AP; su una semiretta perpendicolare ad AP si trasporta la misura del segmento PB, quindi si chiude il rettangolo e, al variare del punto P sul segmento AB, lo studente vedrà il rettangolo modificarsi, mantenendo il perimetro costante, mentre la sua area varierà assumendo nei casi limite in cui P coincide con A o con B il valore 0.

Le prime osservazioni possono essere a livello esclusivamente percettivo: si muove P e il rettangolo si muove; si può però poi passare a un livello *relazionale*: l'area dipende dalla lunghezza di AP. Queste prime osservazioni possono essere arricchite dalla comparsa dei numeri che rappresentano le misure di AP, PB, dell'area e del perimetro. Con opportune animazioni o con l'uso di uno strumento come il foglio elettronico è anche possibile cercare di precisare *come* varia l'area al variare di AP. Gli studenti abituati a lavorare con lo strumento delle differenze prime e delle differenze seconde o che dimostrano una particolare sensibilità alle variazioni numeriche possono cercare di fare ipotesi su come è il grafico della funzione che lega la variazione dell'area del rettangolo alla variazione della lunghezza di AP. Tutto ciò può poi essere verificato in Cabri con le seguenti operazioni:

a) inserendo gli assi cartesiani

b) riportando sull'asse x la lunghezza di AP, sull'asse y le misure del perimetro e dell'area

c) individuando il punto che ha come coordinate numeri che rappresentano, rispettivamente, la lunghezza di AP e l'area del rettangolo

d) individuando il punto che ha come coordinate numeri che rappresentano, rispettivamente, la lunghezza di AP e il perimetro

e) infine, utilizzando il comando "traccia".

Ciò che si ottiene è una figura come la seguente:

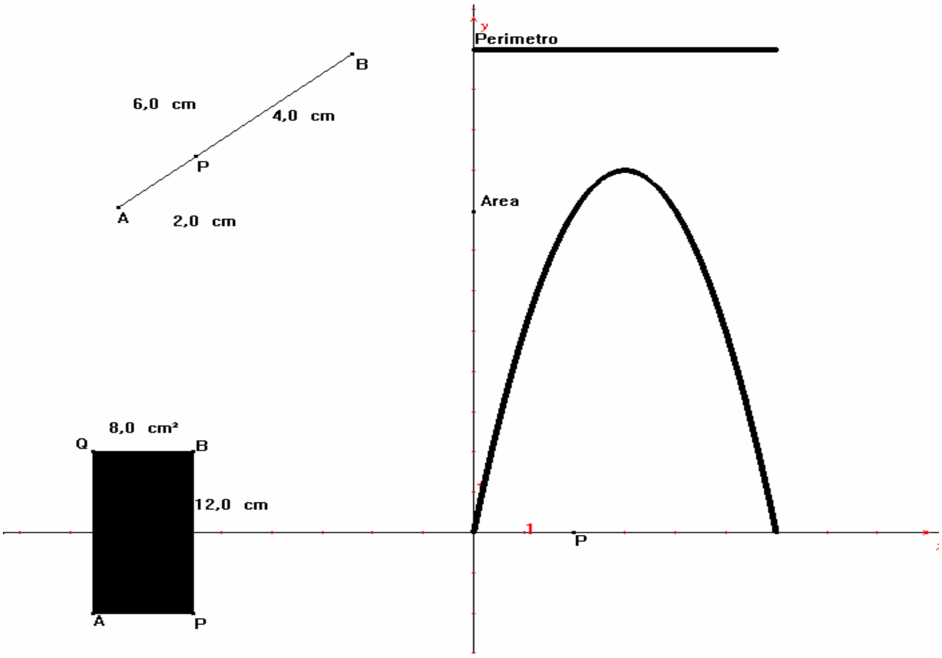


Fig. 2

Può essere interessante chiedere agli studenti, che ormai sono convinti che il massimo dell'area si ha nel caso del quadrato, *perché* avviene ciò. In genere i primi tentativi di spiegazione sono in effetti affermazioni del tipo: *è così perché è così*. Mi è capitato una volta un gruppo di studenti che mi hanno detto: "Vede prof., se mi metto nel punto medio e mi sposto un po' a sinistra e un po' a destra, l'area diminuisce…" È chiaro che non è una dimostrazione e nemmeno una spiegazione, ma questa frase dà all'insegnante la possibilità di agire in una sorta di zona di sviluppo prossimale: "Come possiamo tradurre in simboli e quindi in termini più operativi quello spostarsi un po' a sinistra e un po' a destra del punto medio? $3 - x$ e $3 + x$. Allora l'area del rettangolo è $(3 - x)\ (3+ x)$, ossia $9 - x^2$ " A questo punto gli studenti non hanno difficoltà a riconoscere che il massimo si ha per $x = 0$; compito dell'insegnante è quello di cogliere l'occasione per cercare di far capire perché quella appena fornita può essere ritenuta una *dimostrazione* e quindi una *spiegazione* del *perché* il quadrato è il rettangolo di area massima in un insieme di rettangoli isoperimetrici.

Problema 2 (Definire e classificare; definizioni e classificazioni dei quadrilateri)

Costruite in Cabri i vari quadrilateri particolari, un quadrato, un rombo, un rettangolo, un parallelogramma, un trapezio.

In tal caso l'attenzione è spostata sul ruolo delle definizioni, che hanno comunque molta importanza nell'attività di costruzione di una teoria. Se, infatti, è vero che, dal punto di vista strettamente logico, una definizione deve sempre poter essere eliminata da una teoria, dal punto di vista epistemologico e soprattutto cognitivo le cose non stanno assolutamente in questi termini. Dal punto di vista cognitivo il dare un nome a un oggetto e poi precisarne la definizione (dopo che se ne è costruito il significato) è un'attività di appropriazione di significato, di inclusione di un processo in un oggetto che può diventare strumento operativo per ulteriori e più complessi processi (Paola, 2000).

Tra l'altro un'attività come quella proposta in questo problema, per la sua semplicità, può essere proposta anche per avviare gli studenti all'uso di Cabri e alla comprensione della funzione di trascinamento (per farla diventare vero e proprio strumento di insegnamento – apprendimento).

Ciò che è interessante osservare sono le differenti modalità di costruzione dei vari quadrilateri. In alcuni casi gli studenti disegnano anche oggetti che non resistono alla modalità di trascinamento e che, quindi, non sono costruzioni geometriche. Qualche studente utilizza le proprietà del cerchio (per costruire un quadrato, per esempio); altri studenti usano l'uguaglianza di lati e angoli, altri ancora le simmetrie. L'insegnante può aiutare gli studenti a vedere la possibilità di differenti classificazioni (in base all'uguaglianza di lati o angoli; in base alle simmetrie; in base ai gradi di libertà dei vertici dei quadrilateri). Si possono fare anche interessanti digressioni. Per esempio, se si disegna in Cabri un trapezio, dal trascinamento risulta che un parallelogramma è un particolare trapezio. Se si chiede agli studenti che cos'è un trapezio isoscele, la maggior parte di essi risponde: "Un trapezio che ha i lati obliqui uguali". L'insegnante può far notare che tale definizione è in contraddizione con la proprietà del parallelogramma di essere un particolare trapezio. Infatti dalla definizione di trapezio isoscele, il parallelogramma risulterebbe un trapezio isoscele particolare, ma tutti trapezi isosceli hanno un asse di simmetria mentre il parallelogramma non ha un asse di simmetria. Se si vuole definire il parallelogramma come un particolare trapezio, si tratta allora di cambiare la definizione di trapezio isoscele. Per esempio si può definire isoscele un trapezio che ha gli angoli alla base uguali, oppure le diagonali uguali, o un asse si simmetria. Un'altra scelta è quella di dire che il parallelogramma non è un trapezio: l'insegnante può avviare una discussione sull'eleganza e su vantaggi e svantaggi di certe scelte rispetto ad altre. Insomma un'utile attività per far capire che l'arte del definire non è del tutto libera e arbitraria, ma deve essere invece particolarmente attenta a esigenze di coerenza.

Problema 3 (Problemi aperti in geometria).

Sia dato un quadrilatero ABCD e siano L, M, N e P rispettivamente i punti medi dei lati AB, BC, CD, DA. Che configurazioni assume il quadrilatero LMNP al variare di ABCD? Giustificare le risposte.

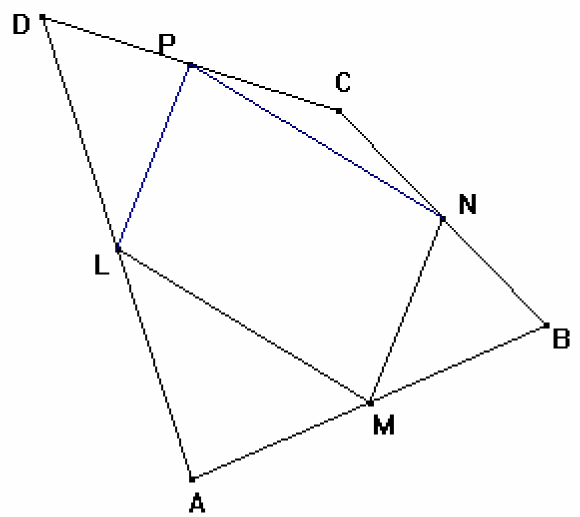


Fig. 3

In questo, come in tutti i problemi aperti che favoriscono osservazioni ed esplorazioni, è interessante osservare le modalità di trascinamento degli oggetti (Arzarello & altri, 2002) Tali modalità di trascinamento possono suggerire all'insegnante ipotesi significative sui processi mentali attivati dagli studenti durante il lavoro di esplorazione, osservazione e produzione di congetture. Per esempio gli studenti possono iniziare trascinando a caso un vertice della figura in modo veloce, guardando ciò che avviene sullo schermo come se fosse un film … Tale modalità di trascinamento suggerisce che gli studenti non abbiano ancora idee specifiche e chiedano allo strumento e alle sue potenzialità dinamiche un aiuto per *farsi venire qualche idea*. Gli studenti che trascinano la figura in modo da formare quadrilateri particolari stanno aggiungendo ipotesi, ossia esplorano situazioni del tipo "se è un rettangolo, allora…" Gli studenti che costruiscono un rettangolo, probabilmente stanno cercando di verificare qualche congettura … e così via. Se gli studenti hanno a disposizione l'inverso del teorema di Talete (per il triangolo[1]) avranno qualche possibilità di dimostrare che, qualunque sia il quadrilatero ABCD, PLMN è un parallelogramma (è possibile aiutarli suggerendo loro di tracciare una diagonale di ABCD). Se non conoscono tale teorema, possono fare attività di dimostrazione in casi particolari; per esempio possono dimostrare osservare che PLMN è, rispettivamente, un quadrato, un rettangolo, un rombo se ABCD è un quadrato, oppure un rombo, oppure un rettangolo. Anche senza riuscire a dimostrarlo, potrebbero poi osservare e congetturare che, qualunque sia il quadrilatero ABCD, PLMN è un parallelogramma. In questo caso potrebbe essere l'insegnante ad aggiungere alla teoria il teorema di Talete e il suo inverso come strumento utile a spiegare (a dimostrare) ciò che gli studenti hanno osservato: si tratta di una scelta particolarmente appropriata a evidenziare il ruolo di una teoria come ambiente nel quale si può spiegare *perché è vero* un fatto osservato. In questo senso l'attività del dimostrare è attività di ricerca di proposizioni che vengono poste a fondamento della teoria per giustificare le congetture prodotte nell'attività di esplorazione ed osservazione.

<u>Problema 4</u> (Problemi aperti in geometria)

Sia dato un quadrilatero ABCD. Tracciate gli assi *a* del lato AB, *b* del lato BC, *c* del lato CD, *d* del lato DA. Sia A' il punto di incontro degli assi *a* e *b*, B' il punto

---

[1] Come è noto, non esiste, in generale, un "inverso del teorema di Talete", nel senso che la proposizione "i segmenti staccati su due trasversali da un fascio di rette sono proporzionali" non è condizione sufficiente per concludere che "le rette del fascio sono parallele".
Un semplice controesempio si ottiene considerando su una delle due trasversali due punti *A*, *B* e il loro punto medio *M* e sull'altra trasversale due punti *A*', *B*' e il loro punto medio *M*' in modo tale che la lunghezza di *AB* sia diversa da quella di *A'B*'. In generale, anche se *AM : MB = A'M' : M'B'*, le rette *AA'* e *BB*' non sono parallele.
Qui si fa riferimento al teorema T:
"una retta che determina su due lati di un triangolo, o sui loro prolungamenti, segmenti proporzionali, è parallela al terzo lato".
Tale teorema può essere considerato come l'inverso del seguente corollario del teorema di Talete "una retta parallela a un lato di un triangolo determina sugli altri due lati, o sui loro prolungamenti, segmenti proporzionali".
Per dimostrare il seguente teorema, citato nell'articolo,
"il quadrilatero che ha per vertici i punti medi dei lati di un quadrilatero *ABCD* è un parallelogramma"
si usa proprio il teorema T impropriamente citato come "inverso del Teorema di Talete".
In effetti, in alcuni testi si cita un "inverso del teorema di Talete", ma, nell'enunciato di tale teorema, si aggiunge all'ipotesi
"i segmenti staccati su due trasversali da un fascio di rette sono proporzionali"
l'ipotesi
"almeno due rette del fascio sono fra loro parallele".

di incontro di *b* e *c*, C' il punto di incontro di *c* e *d*, D' il punto di incontro di *a* e *d*. Studiare come varia A'B'C'D' al variare di ABCD. Dimostrate le congetture prodotte durante l'esplorazione fatta in Cabri.

Per una approfondita discussione su come gli studenti affrontano questo problema, rimando a (Paola, 2004). Qui mi limito a far notare che le modalità con cui il problema viene affrontato sono abbastanza varie: da un'esplorazione condotta con un trascinamento casuale a esplorazioni sistematiche e attente di casi particolari. In genere il punto centrale dl processo di esplorazione risulta essere la constatazione che, in alcuni casi, gli assi si incontrano in un unico punto. Questa osservazione, che prima o poi viene fatta, costituisce, in genere, il perno attorno al quale ruota la successiva attività di esplorazione e produzione di congetture. Gli studenti, in genere, riescono a formulare la congettura *se ABCD è inscrivibile in una circonferenza, allora gli assi dei lati si incontrano nel centro della circonferenza circoscritta ad ABCD*. Il fatto che la maggior parte degli studenti che formula la congettura riesce poi a dimostrarla utilizzando proprio alcune osservazioni effettuate nella precedente attività di esplorazione, suggerisce che vi sia una continuità cognitiva tra le fasi di esplorazione, formulazione di congetture e successiva validazione.

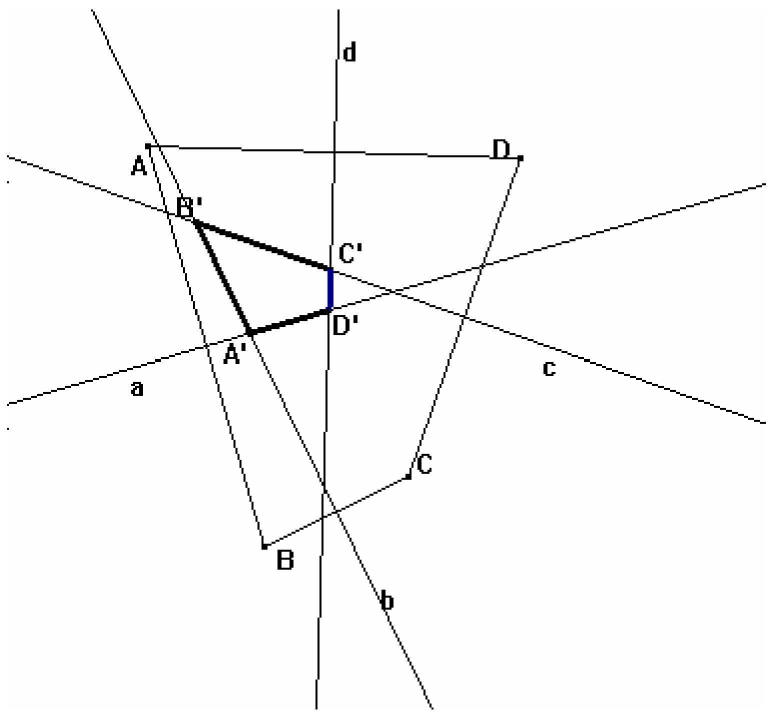


Fig 4

Problema 5 (Attività di problem solving)

È stata trovata una mappa del tesoro che riporta le seguenti indicazioni: vai sull'isola segnata sulla carta. Appena sceso sull'isola, che ha un solo approdo, troverai un melo M un pino P e una quercia Q. Da M dirigiti in linea retta fino a giungere in P. Qui gira verso la tua destra di 90 gradi e percorri un segmento di lunghezza uguale a quella di MP. Pianta in questa posizione un paletto P1. Quindi ritorna in M e da qui dirigiti verso Q in linea retta. Giunto in Q gira a sinistra di 90 gradi e percorri un segmento di lunghezza uguale a quella di MQ. Pianta, in questa posizione un paletto P2. Il tesoro T si trova nel punto medio del segmento P1P2.

Ariele, giunto sull'isola del tesoro, ha la brutta sorpresa di non trovare più il melo M. Ci sono P e Q ma non c'è M. Potrà trovare ugualmente il tesoro?

(Nota: è bene precisare un sistema di riferimento per dare significato univoco alle indicazioni “svolta a destra e a sinistra”, anche perché, altrimenti la soluzione non è unica, in quanto ne esiste un’altra simmetrica).

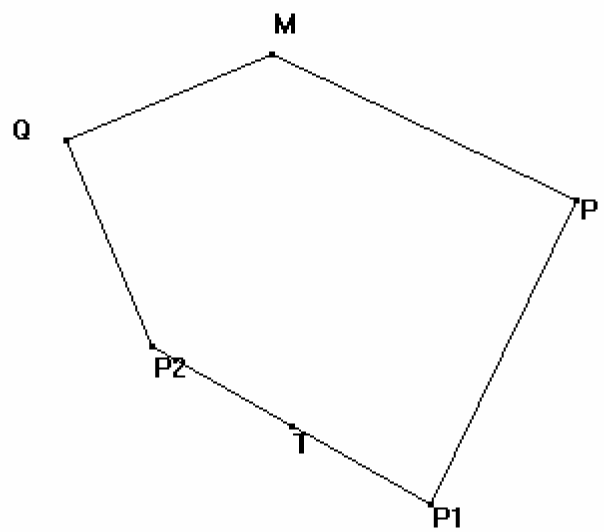


Fig. 5

Questo problema fu presentato e risolto con l'uso dei numeri complessi da George Gamow (Gamow, 1952). Per la discussione delle strategie risolutive adottate dagli studenti rimando anche a (Paola, 2000; 2001)

Qui mi limito a osservare che gli studenti che sono riusciti a dimostrare che è possibile trovare T anche senza avere M hanno utilizzato in fase di dimostrazione proprietà osservate e scoperte in fase di esplorazione. In particolare, il cenno di dimostrazione che riporto è stata preceduta da un'esplorazione che ha portato gli studenti a passare dall'osservazione (a livello percettivo) che se M si muove T sta fermo, alla considerazione (a livello *relazionale*) che T è indipendente da M, fino all'affermazione (a livello *logico*) che *qualunque* sia M, T si trova sempre nella stessa posizione. L'idea della dimostrazione di tre studenti di quarta liceo, Gabriele, Valentina e Vittorio viene così espressa dai tre ragazzi: "per dimostrare che, dovunque si trovi M, T rimane nella stessa posizione, è possibile prendere un punto M' a caso e dimostrare che il punto medio del segmento P1'P2' è lo stesso punto medio del segmento P1P2 ". I ragazzi si propongono quindi di dimostrare che i triangoli P2'P2T e P1'P1T sono congruenti (Fig. 6).

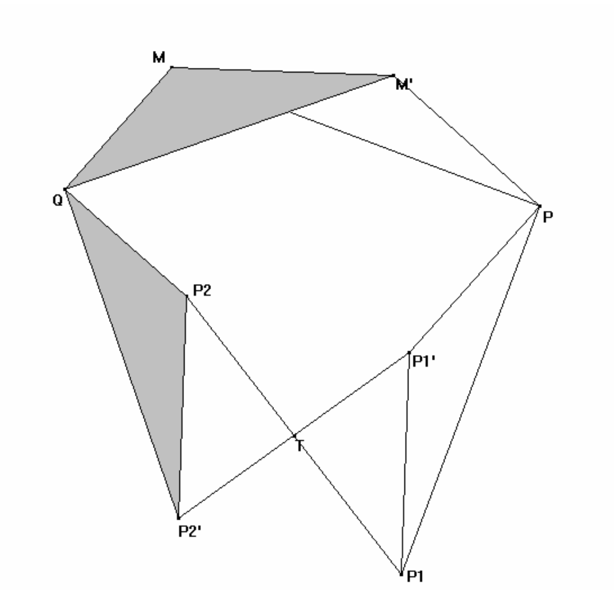


Fig. 6

Facendo riferimento alla figura 6 propongo, con mie parole, la dimostrazione costruita dagli studenti:

Consideriamo i triangoli MM’Q e QP2P2’. Essi hanno: M’Q=QP2’ per ipotesi; MQ=QP2 per ipotesi; inoltre gli angoli MQM’ e P2’QP2 sono congruenti perché complementari di uno stesso angolo. In base al primo criterio di congruenza dei triangoli, possiamo concludere che i due triangoli considerati sono congruenti. In particolare abbiamo che P2P2’ = MM’.

Con analoghe considerazioni è possibile dimostrare che i due triangoli MM'P e P1P1'P sono congruenti. In particolare abbiamo che MM’= P1P1’.

Per la proprietà transitiva della congruenza possiamo affermare che P2P2' = P1P1'. Inoltre gli angoli P2TP2’ e P1TP1’ sono congruenti perché opposti al vertice. Osserviamo ancora che P2 e P2’ sono i corrispondenti di M e M’ in una rotazione di 90°. Quindi P2P2’ è perpendicolare a MM’. Analogamente si può dimostrare che MM' è perpendicolare a P1P1’. Le rette su cui giacciono i segmenti P2P2’ e P1P1’ sono quindi parallele; ciò consente di affermare che gli angoli TP1'P1 e TP2'P2 sono congruenti, così come gli angoli TP2P2' e TP1P1'. Quindi, per il secondo criterio di congruenza i triangoli P2'P2T e P1'P1T sono congruenti. In particolare P2'T = P1'T e P2T=P1T; poiché ciò vale qualunque sia il punto M', possiamo concludere che la posizione di T è indipendente dalla scelta del punto M.In occasione del seminario annuale per gli insegnanti della Toscana, al quale ho partecipato nel 2003 parlando di questo problema, la collega Donata Foà ha prodotto una bella ed elegante dimostrazione che fa uso delle trasformazioni geometriche e che riproduco qui di seguito.

Dimostrazione

Considero le due rotazioni indicate nel problema (Fig. 7):

una r_1 di 90 gradi in senso orario con centro in P con la quale si ha:

M→ P_1 Q→A P resta fisso

Una r_2 di 90 gradi in senso antiorario con centro in Q con la quale si ha:

M→ P_2 P→B Q resta fisso

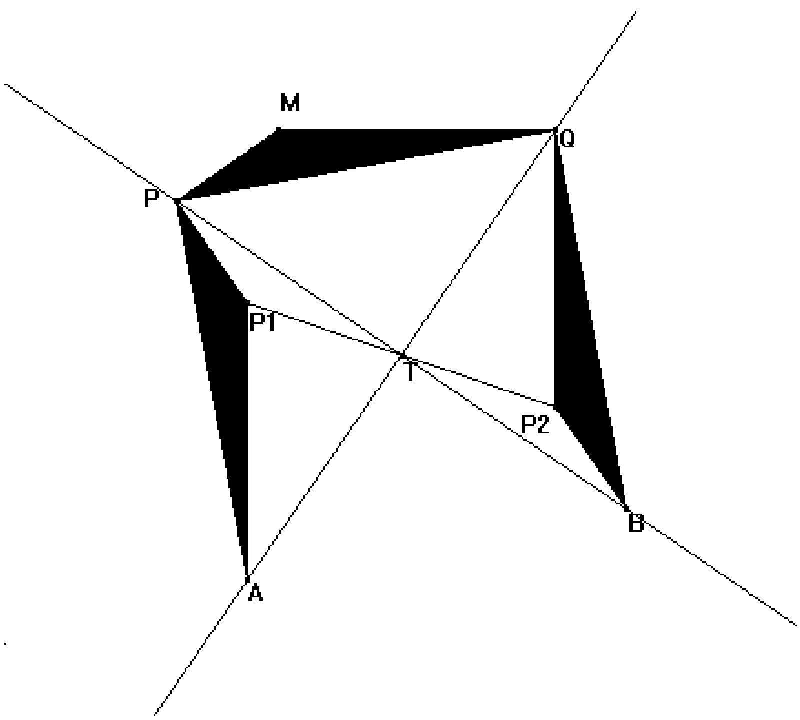


Fig. 7

La rotazione opposta a r_1 trasforma il triangolo AP_1P nel triangolo QMP mentre la rotazione r_2 trasforma il triangolo MPQ nel triangolo P_2BQ

Così la composizione delle due rotazioni manda AP_1P in P_2BQ.

La composizione di due rotazioni a centri distinti, se non è una traslazione (cosa che qui non avviene) è una rotazione il cui centro si può facilmente trovare come intersezione di due soli assi di simmetria; infatti ogni rotazione si ottiene componendo due simmetrie assiali e noi possiamo scegliere una di queste in modo che venga effettuata due volte dando luogo all'identità.

Le simmetrie in gioco per la prima rotazione sono le seguenti:

s_1 di asse la bisettrice dell'angolo APQ

s_2 di asse la retta PQ

Le simmetrie della seconda rotazione sono:

s_2 di asse la retta PQ

s_3 la bisettrice dell'angolo BQP

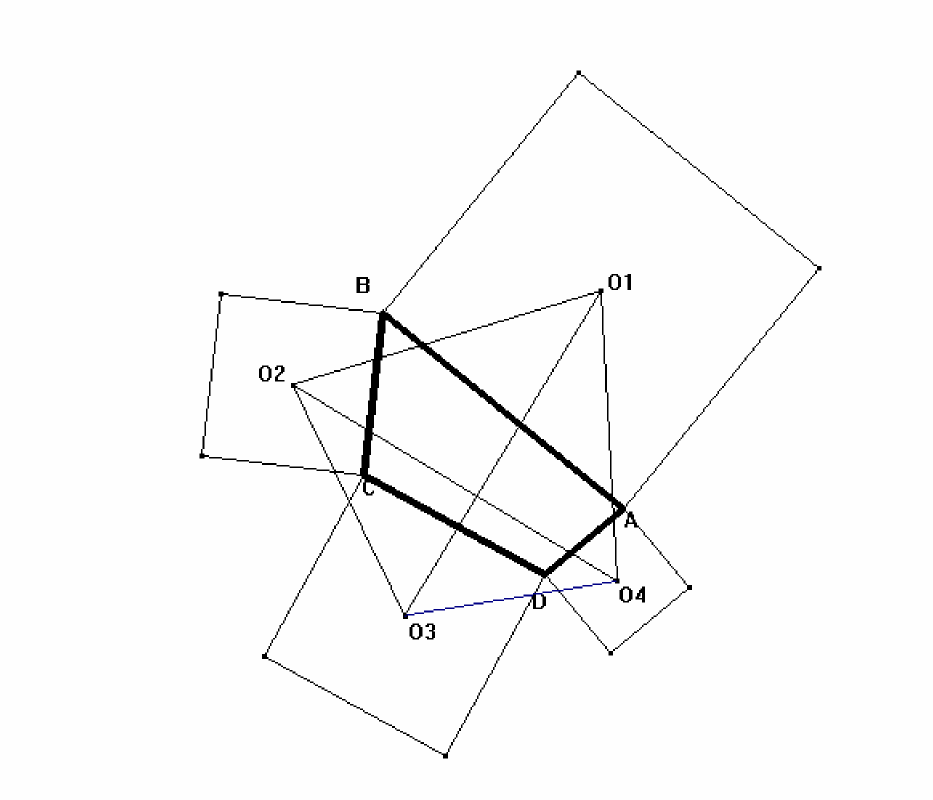
la composizione della quattro simmetrie $(s_3*s_2)*(s_2*s_1)$ si riduce alla composizione delle due simmetrie s_3*s_1

Ma questi gli assi di queste due simmetrie sono perpendicolari fra loro in quanto bisettrici dei due angoli retti APQ e PQB e quindi il loro punto di incontro è centro di simmetria che manda il triangolo P_1PA nel triangolo QBP_2.

Allora P_1 e P_2 si corrispondono anch'essi nella simmetria centrale e il punto medio T è il centro di simmetria e non dipende dalla posizione di M ma solo da P e da Q. cv.d.

Sarebbe interessante proporre il problema in una classe che è abituata all'uso delle trasformazioni e vedere se gli studenti (e sono tanti) che risolvono il problema notando che T è il centro del quadrato di lato PQ utilizzano la dimostrazione suggerita da Donata Foà.

Problema 6 (Problemi aperti in geometria)



Costruire un quadrato esternamente a ogni lato di un quadrilatero ABCD. Considerare il quadrilatero che si ottiene congiungendo i centri dei quattro quadrati così ottenuti. Che cosa accade a questo quadrilatero al variare di ABCD? (Fig.8)Fig. 8

Alcuni studenti, esplorando la situazione con Cabri, hanno anche osservato che O_2O_4 e O_3O_1 sono uguali e perpendicolari. Né io, né i miei studenti siamo riusciti a produrre autonomamente una dimostrazione sintetica di tale congettura. Recentemente ho trovato all'indirizzo web http://agutie.homestead.com/files/vanaubel.html una bella e semplice dimostrazione. Inoltre sul testo *Geometry Turned On* pubblicato dalla MAA, si trova un bellissimo articolo di Michael De Villiers, (De Villiers, 1997) nel quale si generalizza la questione e si dimostra che se al posto di quattro quadrati si costruiscono, come suggerito nella figura 9, quattro rettangoli simili, allora O_2O_4 e O_3O_1 pur non essendo più, in generale, uguali, rimangono perpendicolari.

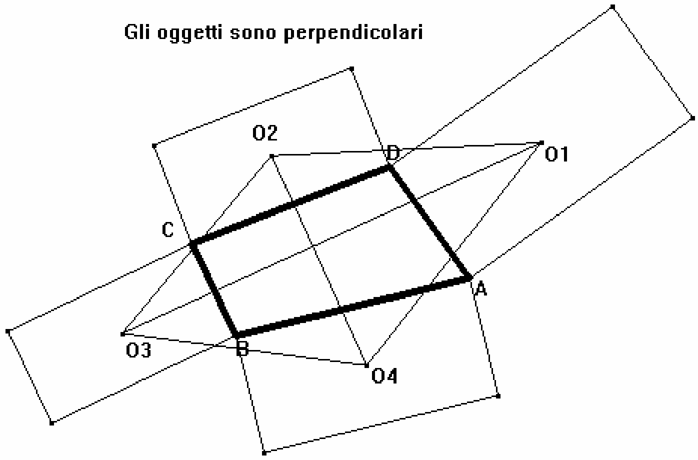


Fig. 9

Se, al posto dei quattro quadrati, si costruiscono quattro rombi simili, come suggerito dalla figura 10, le diagonali non sono più, in generale, perpendicolari, ma rimangono uguali.

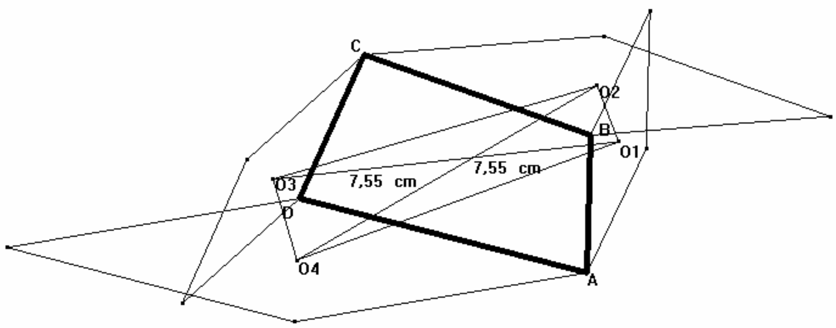


Fig. 10

È chiaro che il caso dei quadrati diventa un caso particolare dei due teoremi appena enunciati.

Qualche riflessione conclusiva

Le attività che sono state presentate devono essere considerate come possibili esempi di attività da proporre agli studenti, con sistematicità e con una certa costanza: il lavoro di avvio al sapere teorico, di costruzione del significato di una teoria e di che cosa voglia dire dimostrare in una teoria richiede una didattica paziente, non pressata da eccessive preoccupazioni di far conseguire agli studenti tutte quelle competenze tecniche che erano e sono ancora oggetto di attenzione nella prassi didattica. Richiede, inoltre, un lavoro di scelta, da parte dell'insegnante, delle proposizioni da porre a fondamento della teoria all'inizio dell'attività didattica. A mio avviso questa scelta deve tenere conto delle conoscenze condivise dagli studenti, soprattutto di quelle che sono state veramente fatte proprie. Penso sia opportuno fare in modo che quanto affermato dagli assiomi sia in un certo senso incorporato dagli studenti: per giovani studenti, principianti e non esperti nell'attività matematica, gli assiomi devono avere valore epistemico certo. Ciò dovrebbe favorire l'accettazione e la condivisione, da parte degli studenti, di quella razionalità matematica che spesso viene invece rifiutata. Gli studenti vivono in un ambiente che possiamo considerare pre – euclideo, possedendo varie conoscenze, sulle quali hanno diversi livelli di fiducia e che, soprattutto, sono ben lungi da essere organizzate in una teoria. Prima di poter apprezzare problemi raffinati e sottili che sono stati posti solamente nel XX secolo, devono poter fare esperienza di dimostrazioni in teorie locali che si costruiscono e si affinano anche attraverso l'attività dimostrativa e nelle quali gli assiomi sono scelti proprio in base alla fiducia che gli studenti hanno in ciò che affermano.

Bibliografia

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D. & Robutti, O., 2002, A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments' *ZDM*, v.43, n.3, 66-72.

Bartolini Bussi, M., Boni, M., Ferri, F., 1995, *Interazione sociale e conoscenza a scuola: la discussione matematica*, Rapporto tecnico n. 21, Modena

Commissione UMI, 2003, Ciclo secondario. La matematica per il cittadino, http://www.dm.unibo.it/umi/italiano/Didattica/2003/secondaria.pdf

De Villiers, M, 1997, The role of Proof in investigative, computer based geometry: some personal reflections, in *Geometry turned on, MAA*. L'articolo è anche accessibile collegandosi al sito

http://mathforum.org/dynamic/geometry_turned_on/download/02-vil/

Gamow, G., 1952, *Uno, due tre … infinito*, Arnoldo Mondatori, Milano

Paola, D., 2000, Le definizioni. Dalla parte degli studenti, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, v.23-B, 561-600.

Paola, D., 2001, 'L'uso delle tecnologie nella costruzione del significato in matematica. Analisi di alcune attività didattiche', in E. Gallo, L. Giacardi, O. Robutti (editors), *Conferenze e Seminari Mathesis* 2000-2001, 131–140.

Paola, D., 2004, Dimostrazione e ambienti di geometria dinamica. Quali relazioni?, *Didattica delle Scienze*, 229, 5 – 10.

Verillon, P. & Rabardel, P., 1995, Cognition and Artifacts: a Contribution to the Study of Tought in Relation to Intrumented Activity, *European Journal of Psychology in Education*, 9(3), 77-101.

Domingo Paola