LA DIMOSTRAZIONE ALLA PROVA

ITINERARI PER UN INSEGNAMENTO INTEGRATO DI ALGEBRA, LOGICA, INFORMATICA, GEOMETRIA

Domingo Paola. Liceo scientifico ‘G. Bruno’ (Albenga)
Gruppo Ricerca Educazione Matematica Genova. DIMA. Università di Genova

Ornella Robutti. Liceo scientifico ‘G. Ferraris’ (Torino)
Nucleo di ricerca didattica. D.M. Università di Torino

INDICE

PRESENTAZIONE

1. LA DIMOSTRAZIONE IN MATEMATICA

1.1 LA DIMOSTRAZIONE NELLA STORIA

1.2 LA DIMOSTRAZIONE NELLA RICERCA DIDATTICA

1.3 LA DIMOSTRAZIONE NEI PROGRAMMI

1.4 LA DIMOSTRAZIONE NELLA PRASSI DIDATTICA

2. UN PROGETTO DI RICERCA

2.1 IL NOSTRO PROGETTO

2.2 IL MODELLO TEORICO

2.3 IL TRASCINAMENTO IN CABRI

3. LA REALIZZAZIONE DEL PROGETTO

3.1 L'ATTIVITÀ DI SPERIMENTAZIONE IN CLASSE

3.2 STRUMENTI INFORMATICI NEI PROBLEMI DI GEOMETRIA

3.3 ANALISI DI PROTOCOLLI

3.4 PROPOSTA DI SCHEDE DI LAVORO

3.5 CONGETTURE IN ALTRI AMBIENTI

4. BIBLIOGRAFIA RAGIONATA

4.1 TESTI

4.2 ARTICOLI

APPENDICE

TEST INFORMATIVO SUI *SENSI* DEGLI STUDENTI NEI CONFRONTI DELLA DIMOSTRAZIONE

"Nella storia di ogni teoria matematica si possono distinguere chiaramente tre fasi: quella creativa, quella formale e infine quella critica"
David Hilbert

PRESENTAZIONE

Le pagine seguenti riassumono il lavoro e le esperienze che stiamo conducendo da vari anni sulla dimostrazione come oggetto di insegnamento e apprendimento.

Ci proponiamo l'obiettivo di fornire una descrizione di prototipi di attività volte a realizzare le indicazioni dei nuovi programmi, che suggeriscono di dare un'immagine della matematica come disciplina di forte valenza culturale e formativa, caratterizzata da una sostanziale unitarietà.

Le attività che presentiamo sono state sperimentate in varie classi di scuola secondaria superiore ad Albenga, Chieri, Chivasso, Cremona, Genova, Imperia e Torino.

Nella prima parte esponiamo alcune considerazioni relative alla dimostrazione. Si tratta, in particolare, di osservazioni:

- di carattere storico-epistemologico (*la dimostrazione nella storia*);
- riguardanti l'educazione matematica (*la dimostrazione nella ricerca didattica*);
- relative ai programmi della scuola secondaria superiore (*la dimostrazione nei programmi*);
- legate alla effettiva prassi didattica (*la dimostrazione nella prassi didattica*).

Nella seconda parte presentiamo le caratteristiche del nostro progetto, delineatosi nell'ambito delle iniziative di ricerca didattica del nucleo di Torino (coordinato da Ferdinando Arzarello) e di quello di Genova (coordinato da Fulvia Furinghetti) attivate durante il distacco UMI-MPI che abbiamo ottenuto per svolgere attività di ricerca presso i suddetti nuclei.

Nella terza parte presentiamo il lavoro di sperimentazione che abbiamo condotto nelle classi, attraverso l'analisi di alcuni protocolli degli studenti. Proponiamo inoltre alcune schede di lavoro assegnate agli studenti. Questa esemplificazione riguarda in particolare la dimostrazione nell'ambito della geometria euclidea con l'assistenza del software Cabri, perché negli ultimi due anni abbiamo lavorato con sistematicità proprio in tal senso. Presentiamo, però, alcune considerazioni sull'opportunità di dimostrare anche in altri ambiti e produciamo esempi di attività didattiche volte a favorire la produzione e la validazione di congetture nell'aritmetica.

Forniamo anche una bibliografia ragionata, che possa consentire, all'insegnante interessato, di approfondire alcune tematiche relative alla dimostrazione come oggetto di didattica. Nella scelta degli articoli da segnalare ci siamo fatti guidare da due principi essenziali, che sono la conoscenza diretta dell'articolo e la facilità di reperimento. La bibliografia ragionata non può quindi essere considerata il risultato di una sistematica analisi critica condotta sulle pubblicazioni esistenti relative alla dimostrazione.

Proponiamo infine un'appendice, nella quale riportiamo e commentiamo un questionario proposto a studenti di diverse classi per testare alcune ipotesi relative alle loro idee sull'attività dimostrativa e sul concetto di dimostrazione.

Molte idee che presentiamo nel nostro lavoro si ispirano alle linee di ricerca che sono state tratteggiate a Lahti, in occasione del XXI convegno PME. In particolare vogliamo ricordare i progetti di ricerca di Mariolina Bartolini Bussi, Paolo Boero e Maria Alessandra Mariotti.

In questo lavoro si fa per lo più riferimento al software Cabri. Teniamo però a precisare che ciò non significa in alcun modo affermare che altri software di geometria dinamica, già disponibili sul mercato, siano meno adatti allo scopo.

Ringraziamo, per i preziosi suggerimenti: Claudio Bernardi, Marco Borga, Carlo Marchini e tutti i docenti che hanno partecipato al seminario di validazione del nostro lavoro, tenutosi a Lugo; per la disponibilità con cui hanno accettato di sperimentare il progetto nelle

proprie classi: Pierangela Accomazzo, Giuliana Brun, Gemma Gallino, Nicoletta Gerlo, Daniela Nardin, Nicoletta Nolli, Salvatore Palma, Antonio Pippo, Silvia Porretti, Brunella Ricci.

Un ringraziamento particolare va a Lucia Ciarrapico, Ferdinando Arzarello e Fulvia Furinghetti, che ci hanno seguito e indirizzato nel nostro lavoro di ricerca.

Il presente lavoro è frutto di una stretta e costante collaborazione fra i due autori. In particolare, però, i paragrafi 1.1, 1.2, 1.3, 3.5 e l'Appendice sono stati curati da Domingo Paola; i paragrafi 1.4, 2.1, 2.2, 3.2, 3.3 sono stati curati da Ornella Robutti. Federica Olivero, che ha partecipato attivamente alla realizzazione di questo progetto, ha curato i paragrafi 2.3, 3.1 e 3.4. La bibliografia ragionata è stata curata da Domingo Paola e Ornella Robutti.

1. LA DIMOSTRAZIONE IN MATEMATICA

In questa sezione ci proponiamo di evidenziare la complessità del concetto di dimostrazione, che può assumere significati differenti sia quando venga considerato in diversi ambiti disciplinari (nella ricerca matematica, nella ricerca in didattica della matematica, nella storia, nella logica, nella prassi didattica...), sia quando venga analizzato in base alle sue differenti funzioni (dimostrare per convincere, per scoprire, per illuminare, per giustificare, per evidenziare la relazione di conseguenza logica tra assiomi e teoremi di una teoria...), sia quando venga adoperato in diversi contesti d'uso (esplorativo, di validazione, di sistemazione...), sia ancora quando venga considerato come strumento oppure come oggetto di studio.

Noi riteniamo che tutte queste differenti prospettive concorrano a delineare le immagini, le concezioni, le idee che ci costruiamo di tale concetto e che in qualche modo, attraverso l'azione didattica, trasferiamo ai nostri studenti. Chiameremo queste idee, queste concezioni che ci costruiamo della dimostrazione, i *sensi* (nostri o degli studenti) *verso* la dimostrazione. Utilizziamo il termine *sensi* nell'accezione di Leont'ev (1976), per precisare che non necessariamente tali concezioni coincidono o devono coincidere con uno dei significati attribuiti alla dimostrazione in determinati contesti, da una certa comunità. Soprattutto i nostri sensi verso la dimostrazione non si attivano con la definizione formale, data in logica matematica: semmai ci si può chiedere quali aspetti legati alla pratica matematica permangano nella definizione formale di dimostrazione.

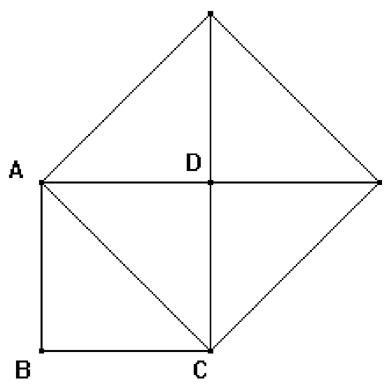
1.1 La dimostrazione nella storia

In Grecia la dimostrazione nasce in un contesto sociale e culturale in cui si attribuisce grande importanza alla discussione: l'attenzione al linguaggio parlato, all'argomentazione, accompagna gli affari economici e le scelte politiche della città. In matematica fioriscono vere e proprie attività dimostrative, assenti, per esempio, nella matematica egizia e babilonese.

Con la nascita della dimostrazione la matematica si trasforma, da un insieme di nozioni, regole e tecniche utili per risolvere problemi pratici, a una disciplina fortemente caratterizzata dalla preoccupazione di giustificare quelle nozioni, quelle regole, quelle tecniche, di riflettere su di esse e sulle loro conseguenze, indipendentemente dalla possibilità di applicarle.

Nella *polis* greca la dimostrazione appare come un atto sociale che mira a convincere l'interlocutore. Se la dimostrazione è un'argomentazione tesa a convincere, allora le persone coinvolte in questa argomentazione devono convenire su un certo numero di conoscenze, su cui l'argomentazione si fonda e che non devono, a loro volta, essere oggetto di ulteriore argomentazione.

Una delle prime testimonianze dirette di una dimostrazione si trova in un dialogo di Platone, il Menone, scritto nel quarto secolo a. C. In questo dialogo Socrate mostra a Menone come uno schiavo illetterato possa, se opportunamente guidato, giungere a ricostruire una dimostrazione di un risultato matematico e, cioè, che, dato un quadrato ABCD, il quadrato costruito sulla diagonale AC è il doppio di ABCD.



Il dialogo fra Socrate e lo schiavo si gioca tutto su una successione di domande, risposte e suggerimenti che portano alla fine lo schiavo alla risposta corretta. Le domande e i suggerimenti di Socrate hanno lo scopo di aiutare lo schiavo a 'ricordare' (nel senso platonico) le idee corrette, in modo da riconoscerle e condividerle con Socrate. L'idea di dimostrazione che emerge dal dialogo platonico sembra essere quella di un ragionamento mediante il quale si arriva a enunciati che possono ritenersi nozioni comuni, ossia noti a tutti e per accettare i quali non c'è più bisogno di argomentare.

Anche nell'attività matematica odierna si conducono alcune dimostrazioni sulla falsariga del dialogo platonico. Vi è però una differenza sostanziale: la dimostrazione di Socrate si basa su nozioni comuni che, però, non vengono esplicitate all'inizio del dialogo. Tali nozioni sono per così dire implicitamente condivise da Socrate, da Menone e dallo schiavo e vengono esplicitate solo nel momento in cui sono necessarie a proseguire nell'argomentazione, grazie all'azione maieutica di Socrate. Nella matematica moderna una dimostrazione è eseguita all'interno di una teoria nella quale gli enunciati condivisi sono esplicitati all'inizio dell'attività dimostrativa.

Questa preoccupazione di esplicitare fin dall'inizio le proposizioni poste a fondamento della teoria, ossia quegli enunciati su cui si fondano tutte le dimostrazioni eseguite nella teoria, non è peculiare della matematica dei nostri giorni, ma ha origine circa un secolo dopo i dialoghi platonici, con il matematico greco Euclide (terzo secolo a.C.), che riassume le principali ricerche e conoscenze dei matematici che lo avevano preceduto completandole in un'opera sistematica, gli *Elementi*, che rimarrà per molti secoli un punto di riferimento necessario per avviarsi allo studio della geometria. All'inizio degli *Elementi* troviamo tre tipi di enunciati: i *termini* (*ὅροι*), i *postulati* (*αιτηματα*) e gli *assiomi* (*κοιναι εννοιαι*). I termini hanno lo scopo di caratterizzare gli enti geometrici; per esempio, nel primo libro si dice che *punto è ciò che non ha parti*, che *linea è una lunghezza senza larghezza;* in seguito i termini sono vere e proprie definizioni. I postulati sono enunciati che garantiscono la possibilità di eseguire costruzioni geometriche. Per esempio, *da un qualsiasi punto si può condurre una retta a ogni altro punto*; oppure *con ogni centro e ogni distanza si può descrivere una circonferenza*. Gli assiomi sono enunciati di carattere più generale, non strettamente geometrico; per esempio, *le cose uguali a una stessa cosa sono anche uguali fra loro*; *il tutto è maggiore della parte*.

Assiomi e postulati sono le proposizioni scelte come premesse fondamentali, in quanto ritenute da Euclide *vere* per la loro stessa *evidenza* e che non hanno quindi bisogno di essere giustificate in alcun modo. Da queste proposizioni esplicitamente dichiarate come premesse della teoria si potranno ricavare, mediante dimostrazioni, altre proposizioni che sono dette *teoremi*. Per Euclide, quindi, la dimostrazione è un ragionamento che consente di stabilire la verità delle proposizioni della geometria, riconducendole agli assiomi e ai postulati.

Gli *Elementi* di Euclide sono il primo e per molti secoli insuperato esempio di *sistema assiomatico deduttivo*, ossia di teoria fondata su un insieme di proposizioni di partenza (assiomi o postulati) a partire dalle quali, mediante dimostrazioni, si *deducono*, ossia si ricavano, altre proposizioni dette teoremi.

La sistemazione assiomatica di Euclide fa scuola e il metodo assiomatico assume grande importanza in gran parte dell'attività matematica successiva. Il metodo assiomatico deduttivo, lo ribadiamo, consiste essenzialmente in questo: da certe proposizioni, ritenute vere senza alcun bisogno di dimostrazione (assiomi) si deducono altre proposizioni che, se non abbiamo commesso errori logici, sono ancora vere.

Il XVII secolo segna una profonda frattura nella concezione della dimostrazione: Torricelli, Descartes, Pascal, Wallis e altri contestano agli antichi il fatto di non chiarire quasi mai *come* sono arrivati a certe dimostrazioni, ossia il *metodo* che hanno seguito per scoprirle.

La principale preoccupazione dei matematici del XVII secolo è quella di sviluppare dei *metodi* che consentano di ottenere dei risultati, di scoprire proprietà significative, con riferimento ai nuovi enti matematici che la rivoluzione scientifica in corso richiedeva di studiare. Abbiamo così il metodo degli indivisibili, delle tangenti, il metodo cartesiano, il metodo proiettivo, che sono strumenti per risolvere classi molto grandi di problemi.

I difetti che Arnaud e Nicole (Barbin, 1988) contestano ad Euclide sono i seguenti:

- "di aver maggior cura della certezza che dell'evidenza e di convincere gli spiriti anziché di illuminarli";
- di dimostrare "delle cose che non hanno affatto bisogno di essere dimostrate";
- di fare largo uso delle "dimostrazioni per impossibile", che convincono lo spirito senza illuminarlo "poiché il nostro spirito non è affatto soddisfatto se non sa non solamente che una cosa è, ma anche perché è";
- di usare nelle dimostrazioni campi di conoscenza distanti da quello di cui parla la proposizione da dimostrare: "Euclide è pieno di queste dimostrazioni per vie estranee";
- di non avere esplicitamente dichiarato un *metodo* con cui condurre le dimostrazioni.

Vi sono due modi di produrre una dimostrazione: l'uno avviene per analisi[1] o risoluzione e l'altro per sintesi. L'analisi consente di

[1] Nell'analisi si affronta il problema come se fosse già risolto e si cercano le condizioni che ne permettono la risoluzione. Nella sintesi si segue il

seguire passo passo la scoperta della dimostrazione, in modo tale che chi la segue ha l'impressione di avere trovato egli stesso la dimostrazione. La sintesi, la dimostrazione alla Euclide, convince il lettore, ma non lo illumina. In un certo senso si può dire che la sintesi sembra più appropriata a convincere, a esporre, a verificare la verità di determinate proposizioni; l'analisi ha un valore più conoscitivo. La prima riguarda le relazioni di conseguenza logica tra assiomi e teoremi, la seconda riguarda la risoluzione dei problemi. Ma con la precisazione dei ruoli di analisi e sintesi la dimostrazione assume un duplice volto.

L'importanza del metodo viene proclamata da Descartes: "Il metodo è necessario per la ricerca della verità" (Barbin, 1988). E ancora: "Non vi è altro modo di acquisire naturalmente una conoscenza che traendola dall'idea o dalla definizione della cosa che si esamina. Quelle dimostrazioni da sole illuminano lo spirito, poiché quella che si utilizza per mostrare che non si può contestare ciò che si propone, o che non ne consegue una grande assurdità, quelle dimostrazioni, dico, convincono lo spirito, ma non lo illuminano" (Barbin, 1988).

Da argomentazione atta a convincere e poi a verificare la verità di determinate proposizioni, la dimostrazione diventa attività atta a illuminare, una sorta di metodo di scoperta nella matematica.

Il metodo di Descartes, quello che trova il maggior consenso sulla certezza dei risultati ottenuti, è uno strumento che sostituisce alla *verbosità* dell'argomentazione euclidea la manipolazione di espressioni algebriche. L'idea è quella di ridurre i problemi geometrici a equazioni algebriche. Ne *La Géométrie* Descartes scrive: "In tal modo, volendo risolvere qualche problema, si deve fin dal principio considerarlo come già risolto, e assegnare una lettera ad ogni linea che si ritiene necessaria per costruirlo, sia a quelle che non sono note, che alle altre. Poi, senza fare nessuna differenza tra quelle note e le ignote, bisogna svolgere il problema seguendo quell'ordine che più naturalmente di ogni altro mostra in qual modo le rette dipendano mutuamente le une dalle altre, fino a che non si sia riusciti a trovare il procedimento per esprimere una stessa quantità in due

---

procedimento inverso: partendo dai dati e dalle ipotesi si procede fino ad ottenere la risoluzione.

modi, cioè non si sia pervenuti a ciò che si chiama equazione". Secondo Descartes il metodo ha valore dimostrativo, poiché conduce alla certezza.

Un'altra profonda trasformazione nel concetto di dimostrazione è avvenuta agli inizi del '900: con Euclide una dimostrazione è un ragionamento che partendo da premesse *vere* arriva a conclusioni ancora *vere*. Il concetto è quindi fondato sul mantenimento della *verità* delle premesse, ossia su basi semantiche, che riguardano il significato di una proposizione. Verso la metà del secolo scorso e agli inizi del nostro secolo, le geometrie non euclidee e la scoperta dell'esistenza di antinomie nelle teorie matematiche formulate, portano all'esigenza di ripensare le conoscenze e le tecniche matematiche in uso, cercando di fondarle su basi sicure. Bisogna precisare i concetti di assioma, teorema, dimostrazione, teoria; bisogna essere sicuri che le tecniche utilizzate nella ricerca matematica non portino a contraddizioni.

Ma, come fa notare Ferro (1993) *dimostrazione, contraddizione, teorema* sono termini di un linguaggio e allora come precisarli se non si hanno chiari i limiti e le potenzialità del linguaggio con cui questi concetti vengono espressi? Ma di quali linguaggi si sta parlando? Non certo della lingua naturale, così ambigua, sfumata, in evoluzione. Si tratta di precisare il concetto stesso di linguaggio, di costruire linguaggi adeguati non solo a parlare degli oggetti di matematica, ma a definirli. Nascono così i linguaggi formali e nasce la necessità di un'analisi approfondita di nozioni quali assioma, verità, teoria e dei reciproci rapporti tra queste.

Si inizia a comprendere che occorre condurre l'analisi distinguendo il piano semantico, il significato di una proposizione, dal piano sintattico, considerando cioè la stessa proposizione come collezione di segni di un dato linguaggio. Sarà compito di un'ulteriore analisi precisare i rapporti tra la teoria, così costruita su basi sintattiche, e i modelli in cui queste vengono interpretate (semantica). Sulla base di questo cambiamento di prospettiva (certamente non semplice da accettare!) la dimostrazione non è più considerata come un ragionamento che conduce da premesse necessariamente vere a conclusioni vere: si parte, invece, da formule ben definite di un certo linguaggio (gli assiomi); si stabiliscono alcune regole di inferenza che, operando sulle formule di partenza, consentono di ottenere da queste altre formule, dette teoremi. Il processo che conduce dagli assiomi ai teoremi è proprio la dimostrazione.

La seguente definizione ci sembra caratterizzare il concetto di dimostrazione proprio della matematica moderna: in una teoria T si dice dimostrazione della tesi t dalle ipotesi $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ una sequenza finita e ordinata di enunciati che termina con la tesi t e tale che ogni enunciato soddisfa una delle seguenti condizioni:

- è un assioma della teoria T
- è una delle ipotesi $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$
- è dedotto da uno o più degli enunciati precedenti mediante applicazione delle regole logiche.

La scelta delle regole di inferenza è particolarmente delicata: innanzitutto, affinché il sistema sia *corretto*, ossia funzioni bene, è necessario che le regole mantengano la verità delle formule. Non può accadere, quindi, che da una formula vera le regole consentano di ottenere formule non vere. Anche da queste considerazioni si comprende l'importanza che assume la nozione di regola inferenziale. Ma l'importanza della nozione di regola inferenziale appare chiara solo quando la dimostrazione diventa un oggetto di studio della matematica e non solo uno strumento di verifica, di validazione o di scoperta. Basti pensare che lo stesso Peano non si è mai preoccupato delle regole: sono Frege, Hilbert e altri logici a enfatizzare la necessità di porre attenzione alle regole e questo è un fatto nuovo nell'evoluzione della matematica.

Possiamo dire che con Hilbert la dimostrazione diviene un calcolo logico che precisa la nozione di conseguenza logica tra assiomi e teoremi di una teoria. Nasce così il concetto di dimostrazione formale che precisa la nozione intuitiva di dimostrazione. La domanda che sorge spontanea è se la definizione (rigorosa) di dimostrazione formale riesce a catturare e a esprimere quella che è la nostra idea intuitiva di dimostrazione.

In altri termini, quando eseguiamo una dimostrazione informale, siamo sicuri che quella dimostrazione ha una corrispondente nel sistema formalizzato? Ha senso chiedersi se esiste un teorema che dimostra che per ogni dimostrazione non formale ne esiste una versione formalizzata? Posta in questi termini la domanda non ha senso, poiché pretenderebbe di stabilire un'equivalenza fra un concetto non ben definito come quello di dimostrazione non formale e quello di dimostrazione formale che è invece una nozione ben precisa e definita all'interno di una teoria. Quello che invece possiamo chiederci è se i matematici abbiano validi motivi per ritenere che il concetto di dimostrazione formale consegue l'obiettivo di definire rigorosamente quello che i matematici stessi pensano quando parlano di dimostrazioni.

Una risposta affermativa è stata data da David Hilbert ed è nota con il nome di *Tesi di Hilbert*. Essa può essere espressa nel modo seguente:

La nozione informale di dimostrazione è correttamente formalizzata dalla logica del primo ordine.

Quello della formalizzazione è un aspetto molto delicato: non vi sono dubbi sul fatto che la matematica abbia subito nel nostro secolo una forte spinta verso la formalizzazione, al tempo stesso non si può negare che il lavoro del matematico quasi mai si svolge interamente all'interno di un sistema formale. L'importante è sapere che c'è la possibilità di giungere al formalismo, non il giungervi effettivo. È un po' come quando si scrive che $25 \cdot 25=625$: significa che se contassi uno alla volta 25 righe di 25 gettoni arriverei al risultato; nessuno lo fa, ma guai se non si sapesse che, in teoria, ciò potrebbe essere fatto!

Come dice Gabriele Lolli, "La dimostrazione formale non è un ragionamento, ma è un oggetto finito e concreto da esibire. Una specie di etichetta da attaccare all'enunciato del teorema, un marchio di fabbrica" (Lolli, 1992).

Imre Lakatos, intorno agli anni sessanta, critica la tendenza alla formalizzazione, intesa come attività che rischia di ridurre la matematica a una disciplina scheletrica e fossilizzata. Egli propone un'immagine della matematica come disciplina fallibile, che si costruisce e cresce attraverso dimostrazioni e controesempi (Lakatos, 1979). Ma le dimostrazioni alle quali si riferisce Lakatos sono ben diverse dalle procedure meccaniche hilbertiane: esse sono piuttosto spiegazioni, giustificazioni, che non solo consentono di convincersi di certi risultati matematici, ma che guidano alla loro scoperta. Ogni passo di una dimostrazione viene sottoposto a critica, attraverso la ricerca di controesempi che contestino il singolo passo (controesempi locali) o la conclusione stessa della dimostrazione (controesempi globali). L'interesse di Lakatos è rivolto, quindi, alla matematica informale, quella che guida il processo di scoperta e di ricerca. Le idee di Lakatos, a questo proposito, possono essere così interpretate: si ha una teoria T_1 e un enunciato s. Si cerca se esiste un insieme di enunciati, diciamo $\{a_1, a_2, a_3, \ldots a_n\}$ tali che:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots a_n \rightarrow s$$

Si fallisce. Allora si hanno due possibilità: si cambia teoria e si ripete il tentativo nella nuova teoria; oppure si amplia il linguaggio con nuovi enti, in modo da ottenere un'estensione della teoria T_1. Tutto ciò, che ha il suo ambito di applicabilità nella dimostrazione informale, ricalca le idee di Popper relative alla logica della scoperta scientifica. In questo senso l'analisi di Lakatos evidenzia che la matematica, come le altre scienze naturali, è fallibile e cresce attraverso la critica e la correzione di teorie che non sono mai libere da ambiguità o dalla possibilità di errore o di dimenticanza (Davis & Hersh, 1985). L'influenza di Lakatos, molto profonda, causa, forse oltre i desideri dell'autore, un atteggiamento di avversione, di diffidenza nei confronti dei problemi fondazionali e della matematica formale. Di tale fatto, che ha ancora ripercussioni notevoli nella didattica della matematica, parleremo in modo più approfondito nel prossimo paragrafo.

BIBLIOGRAFIA

Barbin, É.: 1988, *La dimostrazione matematica: significati epistemologici e questioni didattiche*, *Quaderno di lavoro n.10A*, Centro di ricerche didattiche Ugo Morin, anche in *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 17B, 212-246; trad. it. con commento di 'La démostration mathématique: significations épistémologiques et questions didactiques', *Bulletin APMEP*, 366, 591-620.

Davis, P.J. & Hersh, R.: 1985, *L'esperienza matematica*, Edizioni Comunità, Milano.

Descartes, R.: 1983, *Opere scientifiche*, vol. 2, a cura di E. Lojacono, UTET, Torino.

Descartes, R.: 1991, *Discorso sul metodo*, Edizioni Studio Tesi, Pordenone.

Euclide: *Gli Elementi,* a cura di P. Frajesee Maccioni, UTET, 1977, Torino.

Ferro, R.: 1993, La logica dei logici, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, v. 16, 11/12, 987–1015.

Lakatos, I.: 1979, *Dimostrazioni e confutazioni. La logica della scoperta matematica*, trad. it. di *Proofs and Refutations*, a cura di D. Benelli, Feltrinelli, Milano.

Lolli, G.: 1992, *Che cos'è la logica matematica*, Muzzio, Padova.
Platone: *Menone*, in *Opere complete*, vol. V, Laterza, 1980, Bari.

1.2 La dimostrazione nella ricerca didattica

Abbiamo già accennato, nel precedente paragrafo, al fatto che le idee di Lakatos sulla fallibilità della matematica e sull'uso autoritario dell'attività dimostrativa hanno ispirato matematici e ricercatori in didattica della matematica. L'uso delle dimostrazioni assistite dal calcolatore, di quelle visive in particolare, l'uso di forme sperimentali nell'attività matematica, hanno rafforzato l'idea che la dimostrazione rigorosa abbia perduto il suo ruolo centrale per la pratica matematica, soprattutto per quel che concerne l'attività di scoperta e di validazione di nuovi risultati. La conseguenza di tali convinzioni è che, anche nell'insegnamento della matematica, la dimostrazione non si possa più considerare un'attività fondamentale.

Alcuni sono anzi arrivati a teorizzare, in un futuro ormai prossimo, la morte della dimostrazione (Horgan, 1993), ossia l'abbandono della dimostrazione come forma di validazione e sistemazione dei risultati (siano essi conseguiti nella pratica matematica, o introdotti nella prassi didattica), in favore di forme meno rigorose di giustificazione. C'è anche chi (Jaffe & Quinn, 1993) ha immaginato uno scenario in un prossimo futuro che preveda due linee di attività matematica fra loro separate, con differenti regole e statuti: una tradizionale, rigorosa, che non possa prescindere dalla dimostrazione dei risultati ottenuti; l'altra semi-rigorosa, che faccia uso di altre forme di giustificazione dei risultati raggiunti. Si badi bene: non si tratta di precisare due momenti del pensiero matematico, quello dell'esplorazione, della produzione di congetture e quello della sistemazione rigorosa. I due autori suggeriscono proprio la fondazione di due branche separate della matematica, che dovrebbero assumere nomi differenti, essere praticate da persone differenti e occuparsi non necessariamente delle stesse ricerche.

Altri hanno introdotto nuove forme di dimostrazione. Come si legge in Hanna (1996), Blum ha parlato di dimostrazioni a conoscenza zero (Blum, 1986), la cui caratteristica più significativa consiste nel fatto che chi dimostra deve fornire una testimonianza evidente del fatto che la dimostrazione esiste, ma non è tenuto in alcun modo a dare informazioni dirette sulla dimostrazione. L'idea di dimostrazione a conoscenza zero è completamente in contrasto con l'idea tradizionale di dimostrazione come un prodotto trasparente, completamente aperto al controllo e all'ispezione.

Molti matematici lavorano con metodi sempre più vicini a quelli sperimentali, per esempio facendosi aiutare dalla *computer graphics* per testare congetture ed esplorare situazioni. L'uso del calcolatore per eseguire dimostrazioni sempre più lunghe comporta anche problemi di limiti di risorse economiche e di tempo. Per tale motivo alcuni hanno ipotizzato che prima o poi si dovrà scegliere tra la volontà di produrre dimostrazioni rigorose e la necessità di accontentarsi di un *quasi rigore* per poter procedere nella ricerca matematica (Zeilberger, 1993).

Negli ultimi anni si sono levate voci che hanno posto la dimostrazione al centro dell'interesse della pratica matematica, in particolare della matematica matura, necessaria alla sistemazione dei risultati raggiunti, garanzia di forme di comunicazione che fanno uso di regole e standard già condivisi. Alcune di queste voci appartengono a matematici di professione (Thurston, 1995), altre sono quelle di logici (Lolli, 1997), altre ancora di ricercatori in didattica della matematica (Balacheff, 1988; AAVV, 1989; Duval, 1991; Duval, 1992; Barbin, 1993; Chazan, 1993; Moore, 1994; Boero, Garuti & Mariotti, 1996; AAVV, 1996; Hanna, 1996; Harel & Sowder, 1996; Simon, 1996; Bartolini Bussi, Boero, Ferri, Garuti & Mariotti, 1997; deVilliers & Furinghetti, 1997).

In particolare la ricerca didattica italiana si sta rivelando molto attiva, intervenendo con vari contributi che si caratterizzano sia per l'attenzione alla riflessione storica ed epistemologica, sia sulla messa a punto di ambienti di apprendimento che supportino gli studenti nel delicato passaggio dall'argomentazione alla dimostrazione (Boero, Garuti & Mariotti, 1996; Iaderosa, 1996; Arzarello, Micheletti, Olivero, Paola & Robutti, 1998; Arzarello, Gallino, Micheletti, Olivero, Paola & Robutti, 1998; Bartolini Bussi, Boero, Ferri, Garuti & Mariotti, 1997; Furinghetti & Paola, 1998; Olivero, Paola & Robutti, 1998). I contributi a cui si è sopra accennato, pur nella varietà e originalità delle esperienze, si caratterizzano per un campo di interessi e alcune linee guida comuni, riassumibili nei seguenti punti:

- analisi storico-epistemologica sul costituirsi del sapere relativo a teoremi e dimostrazioni;
- attenzione al dibattito sulla costruzione dei teoremi e delle dimostrazioni, distinguendo i problemi di adeguamento degli standard espositivi e di rigore, da quelli di costruzione, validazione e condivisione di un enunciato;
- precisazione delle modalità relative alla produzione dell'enunciato di un teorema e a quella della sua dimostrazione sia da parte di esperti, sia da parte di studenti non esperti;
- particolare attenzione alle dinamiche e agli ambienti che sembrano favorire la produzione di ipotesi e la loro formulazione in termini di concatenazione logica;
- possibilità di individuare un'unità cognitiva tra i processi di produzione e di esplorazione dell'enunciato di un teorema e la costruzione della sua dimostrazione, con particolare attenzione alle teorie di riferimento e ai salti non solo tra argomenti di una data teoria, ma anche tra diverse teorie;
- opportunità di nuove indagini, e di confronto con quelle già effettuate, sul ruolo della dimensione sociale dell'apprendimento per quanto riguarda il sapere sui teoremi e sulle dimostrazioni, con particolare riferimento alle discussioni matematiche in classe e alle modalità d'uso delle varie 'voci' della cultura matematica nel processo di insegnamento/apprendimento;
- importanza di nuove indagini, e confronto con quelle già effettuate, sul rapporto tra argomentazione e dimostrazione, con particolare attenzione alla possibilità di individuare mediatori e ambienti di apprendimento che consentano di costruire un percorso nel quale le discontinuità tra argomentazione e dimostrazione possano essere gestite nella prassi didattica.

Per chi voglia approfondire il dibattito sul valore della dimostrazione nella didattica e nella ricerca matematica, consigliamo la lettura di (AAVV, 1989; Brigaglia & Emmer, 1995; AAVV, 1996). Qui aggiungiamo solo che le argomentazioni alla Lakatos, che suggeriscono che la dimostrazione possa accentuare gli aspetti autoritari della matematica, sono facilmente opinabili. Come si legge in Hanna (1996), se può essere vero che la matematica è talvolta presentata come una disciplina infallibile ed è pensata in modo autoritario, non si può negare che la dimostrazione, per sua natura, come procedimento aperto al controllo, alla verifica e alla critica, favorisce tutt'altro che una visione autoritaria della pratica matematica. Anzi, è proprio la natura della dimostrazione a imporre che la validità delle conclusioni derivi dalla dimostrazione stessa e non da un'autorità esterna. Inoltre ripercorrendo la storia della matematica si può vedere come siano state spesso proprio le dimostrazioni a suggerire e a offrire controesempi a enunciati di una teoria. L'idea dei seguaci di Lakatos (Lakatos, 1979), che solo l'euristica e gli aspetti informali della matematica siano capaci di fornire controesempi si rivela piuttosto debole alla verifica dei fatti[2].

Il problema di fondo, semmai, è quello di evidenziare l'esistenza dei due versanti, quello della teoria e quello dell'esplorazione empirica. L'euristica e la dimostrazione vivono in questo ambiente a due facce. Non considerare il versante della teoria può far correre il rischio di un regresso antiscientifico: restare al piano dei fatti e dell'euristica (senza un quadro teorico di riferimento) significa tornare alla pura fenomenologia (nel migliore dei casi) o, addirittura a giustificare spinte irrazionalistiche che distruggerebbero il pensiero scientifico come è attualmente strutturato.

La dimostrazione, inoltre, coinvolge aspetti di carattere sociale particolarmente importanti dal punto di vista educazionale. Evelyn Barbin ha parlato della dimostrazione come di un atto sociale che si realizza in un microcosmo di interlocutori che condividono già una certa razionalità (Barbin, 1988).

BIBLIOGRAFIA

AAVV: 1989, La démonstration mathématique dans l'histoire, *Actes du 7 ème colloque inter-IREM épistémologie et histoire des mathématiques*, Besançon.

AAVV: 1996, Teaching Proof, *Mathematics teaching*, 155, 6-39.

Arzarello, F., Micheletti, C., Olivero, F., Paola, D. & Robutti, O.: 1998, A model for analysing the transition to formal proofs in geometry, *PME XXII*.

---

2 Facciamo notare che non tutti i sostenitori dell'euristica sono contrari alla dimostrazione: per esempio Polya (1954) considera i due aspetti come entrambi indispensabili all'attività del matematico, perché complementari tra loro.

Arzarello, F., Gallino, G., Micheletti, C., Olivero, F., Paola, D. & Robutti, O.: 1998, Dragging in Cabri and modalities of transition from conjectures to proofs in geometry, *PME XXII*.

Balacheff, N.: 1988, Une étude des processus de preuve en mathématique chez les élèves de collège, *Thèse d'état*, Université Scientifique de Grenoble.

Barbin, E.: 1988, *La dimostrazione matematica: significati epistemologici e questioni didattiche*, *Quaderno di lavoro n.10A*, Centro di ricerche didattiche Ugo Morin, anche in *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 17B, 212-246; trad. it. con commento di 'La démostration mathématique: significations épistémologiques et questions didactiques', *Bulletin APMEP*, 366, 591-620.

Barbin, E.: 1993, Quelles conceptions épistémologiques de la démonstration pour quels apprentissages?, *Repère IREM*, 12, 93-113.

Bartolini Bussi, M., Boero, P., Ferri, F., Garuti, R. & Mariotti, M.A.: 1997, Approaching geometry theorems in contexts: from history and epistemology to cognition, *Proceedings of PMEXXI*, Lathi, v.1, 180-195.

Blum, M: 1986, How to prove a theorem so no one else can claim it, *Proceedings of the International Congress of the Mathematician*, 1444-1451.

Boero, P., Garuti, R. & Mariotti, M.A.: 1996, Some dynamic mental process underlying producing and proving conjectures, *Proceedings of PME XX,* Valencia, v. 2, 121-128.

Brigaglia, A. & Emmer, M.: 1995, Congetture e dimostrazioni, *Lettera Pristem*, 18 Dossier, I-XX.

Chazan, D.: 1993, High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof, *Educational studies in mathematics*, 24, 359-387.

Cipra, B.: 1993, New computer insights from "transparent proofs", *What's happening in the mathematical sciences,* v. 1, 7-12.

de Villiers, M. & Furinghetti, F. (a cura di): 1997, *Proofs and proving: why, when and how*, ICME 8, Sevilla.

Duval, R.: 1991, Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration, *Educational studies in mathematics*, v.22, 231-261. trad. it. a cura di E. Daconto, in *La matematica e la sua didattica*, 4, 1996, 370-393.

Duval, R.: 1992, Argumenter, démontrer, expliquer: continuité ou rupture cognitive, *Petit X*, 31, 37-61.

Furinghetti, F. & Paola, D.: 1998, Context influence on mathematical reasoning, *PME XXII*.

Hanna, G.: 1996, The ongoing value of proof, *Proceedings of PME XX* Valencia, v. 1, 21-34, trad. it. a cura di F. Furinghetti & D. Paola, in *La matematica e la sua didattica*.

Harel, G. & Sowder, L.: 1996, Classifying processes of proving, *Proceedings of PME XX*, Valencia, v. 3, 59-66.
Horgan, J.: 1993, Morte della dimostrazione, *Le scienze*, 304, 82-91; trad. it. di The death of proof, *The scientific American*, v. 269 (1993), n.4, 74-103.
Jaffe, A. & Quinn, F.: 1993, Theoretical Mathematics: Toward a cultural synthesis of mathematics and theoretical physics, *Bulletin AMS*, 29, 1-13 tradotto su *Lettera Pristem*, 16, 1995.
Iaderosa, R.: 1996, L'avvio all'argomentazione e alla dimostrazione nella scuola media. In: L. Grugnetti, R. Iaderosa, & M. Reggiani, *Argomentare e dimostrare nella scuola media, Atti XV convegno nazionale dei nuclei di ricerca in didattica della matematica per la scuola media*, Salice Terme.
Lakatos, I.: 1979, *Dimostrazioni e confutazioni. La logica della scoperta matematica*, Feltrinelli, Milano, trad. it. di *Proofs and Refutations*, a cura di D. Benelli.
Lolli, G.: 1997, Morte e resurrezione della dimostrazione, *Le Scienze*, 345, 50-57.
Moore, R.C.: 1994, Making the transition to formal proof, *Educational studies in mathematics*, 27, 249-266.
Olivero, F., Paola, D. & Robutti, O.: 1998, Dalla congettura alla dimostrazione, *Quaderni del Dipartimento di Matematica*, Università di Torino.
Polya G.: 1954, *Induction and analogy in mathematics*, Princeton.
Simon, M.: 1996, Beyond inductive and deductive reasoning: the search for a sense of knowing, *Educational Studies in Mathematics*, 30, 197-210.
Thurston, W.P.: 1995, On proof and progress in mathematics, *For the learning of mathematics*, 15, 1, 29-37.
Zeilberger, D.: 1993, Theorems for a price: tomorrow's semi-rigorous mathematical culture, *Notices of the American Mathematical Society*, v. 40, n. 8, 978-981.

1.3 La dimostrazione nei programmi

I programmi del Piano Nazionale per l'Informatica (P.N.I.)[3] hanno introdotto nella matematica un'innovazione di carattere metodologico-contenutistica a disposizione degli insegnanti per la

---

[3] Tali programmi sono stati scritti per una sperimentazione di matematica e di fisica e non rientrano in un progetto di riforma globale della scuola. La prima formulazione dei programmi del biennio risale al 1985.

sperimentazione nelle scuole superiori di ogni tipo. I programmi precedenti (se si eccettuano le sperimentazioni autonome nate negli anni ‘70-‘80) sono in sostanza quelli della riforma gentiliana della scuola, che si può dire costituisca ancora oggi, per le scuole dell’ordine classico[4] (licei scientifici, classici e istituti magistrali), la normativa di riferimento.

Facciamo riferimento ai programmi del P.N.I., sia per il biennio che per il triennio, nella loro ultima versione: per il biennio, quella della circolare n°24 del 6/2/91 (che contiene due versioni: A e B, la prima di programma ‘debole’, la seconda di programma ‘forte’), per il triennio, quella della circolare n°615 del 27/9/96 (che contiene tre versioni: per il liceo classico, per il liceo scientifico e per l’istituto magistrale). La nostra scelta è dettata dal fatto che i programmi Brocca di matematica[5], sia di biennio che di triennio, per quanto riguarda gli aspetti che ci interessano in questa ricerca, non presentano sostanziali differenze con quelli del P.N.I.

Le innovazioni di maggiore rilevanza[6] introdotte dai nuovi programmi sono:

1. la rivisitazione di vecchi contenuti:

- una minor enfasi sugli aspetti di calcolo meccanico (frazioni algebriche, radicali, equazioni e disequazioni trigonometriche, discussioni di equazioni letterali...);
- un ridimensionamento di certi temi: radicali, trigonometria;
- un ampliamento di certi temi: geometria, con l’aggiunta della geometria delle trasformazioni e delle geometrie non-euclidee; algebra, con l’introduzione della risoluzione approssimata di equazioni; analisi, con le aperture sull’analisi numerica;

2. l’introduzione di nuovi contenuti:

---

4 Le scuole che fanno capo alla Direzione Tecnica (istituti tecnici industriali, commerciali, ...) sono state riformate, sia al biennio che al triennio, con il passaggio ad ordinamento delle strutture sperimentali. Le scuole che fanno capo alla Direzione Professionale (istituti professionali) sono state riformate con il Progetto 92.

5 Scritti successivamente alla prima versione dei programmi del P.N.I. e collocati in un progetto globale di riforma della scuola secondaria (1991-1992).

6 Non potremo qui essere esaurienti nell’analisi delle novità.

- logica;
- informatica;
- probabilità;
- statistica;

3. il ruolo dell'informatica nell'insegnamento della matematica[7]:

- non come disciplina a sé stante, ma fortemente integrata nel programma di matematica;
- l'insegnamento di un linguaggio strutturato come il Pascal;
- l'uso di pacchetti applicativi e software;

4. l'attenzione alla metodologia d'insegnamento:

- finalità e obiettivi in primo piano;
- continuità con la scuola media e nel passaggio biennio-triennio;
- indicazioni metodologiche nel commento ai temi;

5. il nuovo ruolo del docente:

- più mediatore di un sapere in evoluzione che trasmettitore di una conoscenza statica;
- progettista didattico di percorsi all'interno dei temi della propria disciplina;
- conduttore di gruppi di lavoro.

Tenendo conto del fatto che oggi circa l'80% delle scuole superiori (Ciarrapico, 1997) ha alcune sezioni (in certi casi anche tutte) con nuovi programmi, si vede come ci sia stata una diffusione ampia del progetto iniziale, da cui, secondo noi, non si dovrebbe prescindere per l'attuazione di una riforma della scuola.

Dopo questa premessa, presentiamo un'analisi dei programmi tradizionali e sperimentali di matematica, per mettere in evidenza quali argomenti, relativi alla dimostrazione, gli insegnanti dovrebbero introdurre in classe. Inoltre ci occupiamo di rilevare quali standard sono richiesti da un test d'ingresso alla scuola secondaria e quali obiettivi intende verificare una prova scritta al termine del ciclo di studi superiori.

---

[7] Non solo della matematica, ma anche della fisica, perché è il P.N.I. è nato come progetto che coinvolgeva entrambe le discipline.

a. Programmi tradizionali

La caratteristica principale dei programmi tradizionali è la loro struttura: sono articolati in una suddivisione per anni, ciascuno dei quali contiene un elenco dei contenuti, suddivisi a loro volta per argomenti: nel biennio aritmetica, algebra e geometria, nel triennio geometria analitica, trigonometria e analisi.

I programmi non contengono indicazioni riguardanti finalità, obiettivi e metodologie. Nell'introduzione sono presenti brevi suggerimenti sulla modalità di svolgimento di alcuni contenuti, diversi da un tipo di scuola all'altro. Per esempio, per quanto riguarda la geometria, si suggerisce di affrontarne le varie parti in modo più teorico nei licei e in modo più pratico negli istituti tecnici.

Non si evince in questi programmi un riferimento esplicito alla dimostrazione, ma solo implicito, attraverso i contenuti in cui viene tradizionalmente affrontata. La prassi didattica è stata negli anni influenzata dai libri di testo e dalle prove d'esame, e si è concentrata sulla richiesta di riprodurre dimostrazioni di geometria euclidea proposte sul libro di testo o dall'insegnante. Forse è bene evidenziare che nella prassi didattica si sono perse le indicazioni più significative e suggestive dei vecchi programmi, che sono presenti *fra le righe* e che possono essere ben sintetizzate dalle seguenti parole di Federigo Enriques (Enriques, 1921): " ...che di ogni dottrina si studi le origini, le connessioni, il divenire, non un qualsiasi assetto statico; e però che un grado di verità più alto serva ad illuminare il più basso da cui è uscito; che insomma - dopo aver studiato la scienza - ce ne valiamo per comprendere la storia. Quale modo più largo di comprensione, quale più vasta esperienza didattica, che l'annodarsi dei problemi e l'urtarsi delle difficoltà entro lo spirito di tutti gli studenti che hanno faticato prima di noi, nella scuola del mondo?"

L'attualità di queste parole induce alla riflessione e a una certa prudenza nelle attese degli effetti di innovazioni e riforme.

b. Programmi del biennio P.N.I.

Nell'introduzione ai programmi, laddove si parla delle finalità dell'insegnamento, viene messo in evidenza che "l'insegnamento della matematica si è sempre estrinsecato e continua a esplicitarsi in due distinte direzioni: a *leggere il libro della natura* ed a matematizzare la realtà esterna da una parte, a simboleggiare ed a formalizzare, attraverso la costruzione di modelli interpretativi, i propri strumenti di lettura dall'altra". Fa parte di questa seconda direzione l'attività di dimostrazione, che si colloca nel processo di formalizzazione e di giustificazione teorica in un sistema deduttivo, ma non è scollegata dall'attività di ricerca euristica di soluzione di problemi.

L'elenco delle finalità mette in evidenza i due aspetti dell'attività del matematico, che si propongono anche per il processo di insegnamento-apprendimento. Si legge che "lo studio della matematica:

- promuove facoltà sia intuitive che logiche,
- educa ai procedimenti euristici, ma anche ai processi di astrazione e di formazione dei concetti,
- esercita a ragionare induttivamente e deduttivamente,
- sviluppa le attitudini sia analitiche che sintetiche"

Tra gli obiettivi di apprendimento, consideriamo chiaramente indicativi per l'attività dello studente sulla dimostrazione in geometria durante il biennio i seguenti:

- individuare proprietà invarianti per trasformazioni semplici;
- dimostrare proprietà di figure geometriche;
- riconoscere le regole della logica e del corretto ragionare.

Ci sembra che a questo livello scolare l'attività di individuazione e di dimostrazione di proprietà privilegi l'ambito geometrico, trascurando quelli algebrico e analitico, come è tradizione della scuola italiana, (ma non solo italiana).

A livello formale, viene chiesto di riconoscere regole nell'ambito della logica, perché l'età degli studenti non permette ancora di spingersi oltre, verso l'applicazione autonoma di tali regole. È importante però che essi inizino ad avvicinarsi alla logica, continuando ad approfondirla per tutto il quinquennio di scuola secondaria, in maniera integrata con la matematica.

Nell'elenco dei contenuti, organizzati per grandi temi, la parola chiave 'proprietà' entra sia in ambito geometrico (Tema 1 Geometria del piano e dello spazio: "Piano euclideo: figure e loro proprietà...."), sia in ambito algebrico (Tema 2 Insiemi numerici e calcolo: "Operazione, ordinamento e loro proprietà negli insiemi dei numeri naturali, interi, razionali"); nel Tema 5 (Elementi di logica e informatica) viene citata sia la logica delle proposizioni che quella predicativa (“variabili, predicati e quantificatori”).

Maggiori precisazioni si trovano nel commento ai temi, in cui compaiono indicazioni di carattere metodologico per l’insegnante. Le idee portanti di questo commento relativo alla geometria sono:

1. una indicazione esplicita di tutte tre le fasi che caratterizzano l’attività dimostrativa: la intuizione-scoperta di proprietà, l’argomentazione, la dimostrazione;
2. un chiaro suggerimento a non sistematizzare tutta la geometria ‘alla Euclide o alla Hilbert’, ma di scegliere assiomatizzazioni locali;
3. la richiesta di esplicitare sempre chiaramente le ipotesi su cui ci si basa per una proprietà;
4. l’introduzione, a partire da situazioni affrontate con l’intuizione, (in continuità con la scuola media), di “limitate catene di deduzioni”;
5. un invito a non voler dimostrare tutto, ma ad effettuare una scelta di teoremi nell’ambito di un percorso programmato;
6. la possibilità di scegliere tra l’approccio euclideo e quello delle trasformazioni;
7. la progressiva introduzione della geometria analitica parallelamente a quella euclidea.

Nel commento relativo a logica e informatica spicca l’indicazione di non sviluppare la logica come una “premessa metodologica all’attività dimostrativa, ma come una riflessione che si sviluppa man mano che matura l’esperienza matematica dell’allievo.” Si sottolinea l’introduzione per gradi di un metodo di ragionamento, a partire dalla precisione di linguaggio, per passare a una concatenazione corretta delle proposizioni nell’attività dimostrativa, fino a introdurre regole di deduzione alla fine del biennio.

Molto importanti sono le note relative al laboratorio di informatica, che suggeriscono una duplice attività: quella di riflessione nel momento di analisi di un problema, per poter costruire, quando possibile, l’algoritmo di risoluzione e quella di esplorazione e di verifica di proprietà, “come momenti costitutivi del processo di apprendimento della matematica e delle sue successive sistematizzazioni”.

Nelle indicazioni metodologiche, tra le altre cose, viene evidenziato il carattere fondamentale dell'educazione matematica: "il porre e risolvere problemi", per collegare successivamente le varie nozioni che vengono introdotte e far scaturire infine una sintesi teorica.

c. Programmi del triennio P.N.I.

Nell'ultima[8] versione dei programmi sperimentali della Direzione Classica si nota, da una parte, un intento di continuità con i programmi del biennio per quanto riguarda l'insegnamento della matematica, dall'altra di integrazione con le altre discipline del triennio.

Relativamente alla dimostrazione, tra le finalità si precisa che lo studio della matematica cura e sviluppa:

- "l'acquisizione di conoscenze a livelli più elevati di astrazione e formalizzazione;
- l'attitudine a riesaminare criticamente e a sistemare logicamente le conoscenze via via acquisite".

Tra i numerosi obiettivi di apprendimento elencati, quelli significativi per un percorso sulla dimostrazione sono:

- "sviluppare dimostrazioni all'interno di sistemi assiomatici;
- operare con il simbolismo matematico riconoscendo le regole sintattiche di trasformazione di formule;
- affrontare situazioni problematiche di varia natura avvalendosi di modelli matematici atti alla loro rappresentazione;
- costruire procedure di risoluzione di un problema e, ove sia il caso, tradurle in programmi per il calcolatore;
- risolvere problemi geometrici nel piano per via sintetica o per via analitica;
- applicare le regole della logica in campo matematico".

Per quanto riguarda i contenuti, rispetto al biennio c'è, non solo per il liceo scientifico, ma anche per il liceo classico e l'istituto magistrale, una caratteristica di prescrittività degli stessi. Inoltre vengono dati suggerimenti (non prescrittivi) sulla suddivisione dei contenuti nei vari anni.

---

[8] Quella del 1996. La versione precedente è del 1991.

In analogia con il biennio, il Tema 1 è dedicato alla geometria, quasi a sottolinearne il ruolo fondamentale. Oltre a elencare i vari argomenti da trattare, il Tema si chiude con contenuti che hanno forti collegamenti con la logica matematica, quali la struttura del metodo ipotetico-deduttivo, i concetti di coerenza e indipendenza di un sistema di assiomi, la sistemazione assiomatica della geometria euclidea.

Nel Tema 5, dedicato alla logica, viene completato il corrispondente tema del biennio con l'introduzione di regole d'inferenza ed esempi di derivazione nella logica dei predicati.

Nel commento ai singoli temi si ribadisce di completare lo studio della geometria euclidea non limitandosi alla geometria piana ma considerando anche quella dello spazio, di chiarire il concetto di sistema ipotetico-deduttivo, di ampliare la geometria euclidea con la geometria analitica e la geometria delle trasformazioni. Si suggerisce la possibilità di introdurre le geometrie non-euclidee come esempio di sistema assiomatico e come occasione per confrontarne le proprietà con quelle dell'ambito euclideo. Si parla di dimostrazione raccomandando, però, di non tralasciare l'uso dell'intuizione e di metodi euristici.

Importante è la nota sulla conclusione a cui deve pervenire lo studente alla fine dei suoi studi secondari: una sistematizzazione concettuale della geometria, non mirante alla conoscenza mnemonica di tutti gli assiomi, bensì ad una visione critica del metodo assiomatico e della struttura di un sistema assiomatico.

Collegato al commento del Tema di geometria è quello del Tema di logica, in cui non viene richiesto agli studenti di saper dimostrare formalmente applicando le regole inferenziali agli assiomi, ma di saper cogliere l'aspetto formale del metodo deduttivo. Viene considerato assai "utile illustrare tali schemi con esempi di dimostrazioni, scelti anche tra quelli già noti allo studente."

Nelle indicazioni metodologiche si ribadisce l'importanza dell'insegnamento per problemi (come già fatto per il biennio), integrandolo qui con l'esigenza di arrivare a una revisione critica, oltre che a una sistemazione teorica dei concetti insegnati. Anche l'uso dell'elaboratore consente la verifica sperimentale di nozioni e proprietà.

d. Test Prometeo

Nato come sostegno all'innovazione e con lo scopo di verificare i processi di cambiamento (applicazione dei nuovi programmi), è costituito da un test d'ingresso alla scuola secondaria e da uno di uscita dal biennio. Si propone di analizzare la situazione d'ingresso e di uscita del singolo studente e della classe dal punto di vista dei contenuti e delle abilità possedute, al fine di limitare la dispersione scolastica nel biennio. Infatti si suppone che, dalla conoscenza delle capacità possedute dagli studenti, sia possibile effettuare un recupero precoce e costruire un itinerario formativo coerente.

Prometeo come progetto didattico ha dunque un duplice scopo: "da un lato, si presenta come strumento di rilevazione delle competenze in possesso degli studenti, in ingresso e in uscita dal biennio della scuola secondaria superiore, ed in tal senso si presta ad una utilizzazione su larga scala; dall'altro collega la ricerca valutativa ad una esplicita strategia di sostegno al curricolo, sollecitando l'azione docente a programmare secondo obiettivi funzionali al riequilibrio delle carenze di base" (Ciarrapico & Ciccarelli, 1996).

Si propone quindi di creare una cultura della valutazione in senso scientifico, utilizzando quesiti a risposta multipla, con analisi al calcolatore, tramite apposito programma, delle risposte e degli standard raggiunti dagli studenti e suggerendo, nella sua ultima versione, anche profili indicativi degli studenti.

La struttura su cui è costruito utilizza la tassonomia di Bloom degli obiettivi cognitivi: combina questi ultimi con i contenuti della matematica che lo studente dovrebbe conoscere all'inizio (fine) del biennio (aritmetica, algebra, geometria, statistica e probabilità), dando la possibilità di ottenere il profilo delle abilità del singolo studente e il grafico delle abilità della classe. "Dal quadro informativo analitico costituito dalle risposte degli studenti nelle varie aree disciplinari, il docente deve poter risalire ai processi logici che hanno guidato il giovane nelle risposte, sia in quelle corrette sia negli errori." (Ciarrapico & Ciccarelli, 1996).

Prometeo viene fornito alle scuole che ne fanno richiesta, sotto forma di istruzioni, copie dei test delle varie materie e dischetti.

Nella sezione d'ingresso non sono presenti domande relative alla dimostrazione.

Il test di uscita si differenzia in due versioni, A e B, corrispondenti rispettivamente al programma debole e a quello forte di matematica del biennio superiore.

Anche se non vengono richieste dimostrazioni vere e proprie (non sarebbe possibile in un test a risposta multipla) sono presenti numerose domande (ci riferiamo qui alla versione B) di:

- geometria e logica: "Dato un quadrilatero, quali delle seguenti condizioni sono *sufficienti* a identificarlo come quadrato?"
- collegamento di conoscenze: "Quale relazione sussiste tra la somma S degli angoli interni di un triangolo e la somma S' degli angoli interni di un pentagono?"
- ricerca di conseguenze logiche: "Sono dati in un piano un triangolo ABC ed un punto Q appartenente al semipiano, con origine la retta BC, che non contiene il triangolo. Affinché il quadrilatero convesso ABQC sia un parallelogramma, il punto Q deve essere il corrispondente di ...."
- riconoscimento di proprietà geometriche valide e non valide
- riconoscimento di equivalenza logica tra proposizioni: "Indica quale delle seguenti proposizioni è logicamente equivalente alla proposizione: *Se un numero è multiplo di 10, allora è pari.*"

e. Maturità scientifica tradizionale e sperimentale

Ci riferiamo alla prova scritta di maturità del liceo scientifico, perché, essendo presente ogni anno, è quella che dà un riferimento costante sugli obiettivi che il Ministero della Pubblica Istruzione intende verificare al termine di un percorso quinquennale di matematica, sia esso con i programmi tradizionali sia con quelli sperimentali (P.N.I. o Brocca). La maturità P.N.I. è nata nel 1992, quando sono arrivate in quinta le prime classi sperimentali, mentre quella Brocca solo nel 1996. Non sono riscontrabili particolari differenze tra le due prove per quanto riguarda i quesiti di matematica[9] negli anni passati. Ciò suggerisce che a livello ministeriale non si intenda differenziare i due programmi negli obiettivi e nei contenuti.

[9] Nella prova P.N.I. sono presenti tre quesiti di matematica, in quella Brocca due di matematica e due di informatica oppure di fisica.

Nei primi anni in cui si è presentata, la prova sperimentale del liceo scientifico differiva da quella tradizionale non solo per i contenuti ma anche per la struttura; negli ultimi anni, invece, si scorge la tendenza a uniformare la struttura delle due prove, costituite da quesiti con domande di difficoltà crescente (da 4 a 8 in media), quasi sempre dipendenti una dall'altra.

Sebbene siano più diffusi verbi come: 'verificare, studiare, calcolare, descrivere, determinare, ...', sono presenti anche richieste esplicite di dimostrazioni.

Questioni di carattere dimostrativo sono state richieste negli ultimi anni nelle seguenti prove di maturità scientifica P.N.I. (Nolli, Robutti & Santorum, 1998):

- suppletiva 1992: all'interno di un quesito di analisi con uso di trasformazioni, "Si dimostri che P e P' sono punti di flesso rispettivamente per C' e C. ... Si dimostri che le curve C e C'' si corrispondono in una trasformazione T."
- suppletiva 1993: all'interno di un quesito in cui si richiede l'approssimazione dell'area S sottesa da una funzione con il calcolo delle aree di trapezi T_n e di rettangoli R_n , "Si dimostri che $R_n < S < T_n$."
- ordinaria 1994: all'interno di un quesito sulle trasformazioni, "Si dimostri che i loro punti comuni sono vertici di un triangolo equilatero." Nel quesito successivo, riguardante l'intersezione di due curve, "Si dimostri che le due linee hanno un punto d'intersezione nel primo quadrante con ascissa x0 appartenente all'intervallo (0,4;0,8)."
- suppletiva 1994: in un quesito di geometria dello spazio con uso di trasformazioni, "Si dimostri che, se $\overline{S}$ è l'area di un triangolo descritto da $\overline{P}$ su β e S ed S' sono le aree dei triangoli descritti rispettivamente da P e da P' su α, si ha $S' = \frac{4}{9}S$. ... Si dimostri che dette x, y le coordinate di P e $\overline{x}$, $\overline{y}$ le coordinate di $\overline{P}$ risulta: ..."
- ordinaria 1995: in un quesito di geometria che tocca le progressioni, le successioni, le serie, "si dimostri che le

lunghezze dei lati della spezzata sono in progressione geometrica"

- suppletiva 1995: in un quesito di geometria solida, "si dimostri che la faccia A'B'C' del solido T di vertici ABCA'B'C' è un triangolo rettangolo". Nel quesito successivo, di geometria analitica, "si deduca che al variare di a le curve Γ e Σ sono bitangenti tra loro in due punti distinti B e C".
- ordinaria 1996: in un quesito di geometria piana e analisi, "si dimostri che il quadrilatero CDEF è un parallelogramma" e "si dimostri che l'area del parallelogramma CDEF è metà dell'area del quadrilatero OAPB."
- ordinaria 1997: in un quesito di geometria analitica e analisi, "dopo aver dimostrato analiticamente che p e k non hanno altri punti comuni oltre ad A e B"; in un quesito di geometria solida: "dimostrare il seguente teorema: Sia f(x) una funzione reale di variabile reale derivabile in un intervallo I. Condizione sufficiente ma non necessaria affinché f(x) sia decrescente in I è che risulti f'(x)<0 per ogni x appartenente ad I.

Come si vede da questa panoramica, le domande di tipo dimostrativo riguardano ambiti diversi del programma di matematica, non solo dell'ultimo anno: geometria euclidea del piano e dello spazio, geometria analitica, geometria delle trasformazioni, analisi ... Non fanno riferimento in genere a teoremi studiati, non chiedono quindi di ripetere dimostrazioni presenti sui manuali o spiegate dall'insegnante, ma inducono lo studente ad analizzare una situazione problematica nuova, a dedurre conclusioni da premesse fissate. A volte i quesiti lasciano libero lo studente di scegliere il metodo dimostrativo (geometria euclidea, geometria analitica, geometria delle trasformazioni), altre volte gli suggeriscono la strada da seguire, come nell'ultimo esempio, in cui si dice "dopo aver dimostrato analiticamente …".

Se vogliamo fare un confronto con quei quesiti un po' 'datati' di maturità tradizionale, si nota che in questi ultimi venivano richieste spesso dimostrazioni di teoremi studiati (teorema fondamentale del calcolo integrale), o analisi di casi particolari degli stessi (dire se una certa funzione soddisfa il teorema di Lagrange), o produzione di esempi (applicazioni del teorema di de L'Hôpital, ...); comunque l'argomento privilegiato per questo genere di domande era l'analisi, forse perché programma dell'ultimo anno.

Invece, analizzando le prove tradizionali più recenti, si nota un cambiamento di tendenza, da una parte verso la richiesta di dimostrazioni anche in campi diversi dall'analisi (e che quindi si riferiscono ad anni precedenti al quinto), dall'altra verso dimostrazioni all'interno di situazioni problematiche, che non facciano esplicito riferimento ai teoremi studiati. Per esempio:

- nella prova del 1992, "Dimostrare che i punti A, P e B sono allineati" in un quesito sui vettori;
- nella prova del 1994, in un quesito di geometria piana viene richiesto di dimostrare che un angolo è retto, e che una circonferenza passa per un determinato punto;
- nella prova suppletiva del 1994, si chiede di dimostrare che tutte le curve di un fascio passano per uno stesso punto e solo per quello;
- nella prova del 1995, in un quesito di geometria, si chiede di dimostrare che un esagono ha area 1/10 dell'area di un triangolo, e di dimostrare le formule del volume di un cono e di un tronco di cono con l'analisi (integrali per il calcolo dell'area di solidi di rotazione);
- nella prova del 1996, in un quesito di geometria viene richiesta una dimostrazione simile a quella del P.N.I., ossia che il quadrilatero con vertici nei punti medi di un altro quadrilatero è un parallelogramma. In un quesito di analisi, si richiede di dire se due affermazioni sono vere o false, giustificando esaurientemente la risposta. Le due affermazioni sono: "Una funzione reale di variabile reale non derivabile in un punto non è continua in quel punto." e "Una funzione reale di variabile reale non continua in un punto non è derivabile in quel punto." Questa domanda ci sembra particolarmente interessante, perché coinvolge, oltre alle conoscenze di analisi sulla continuità e la derivabilità delle funzioni, anche quelle di base di logica. L'ultimo quesito, di geometria euclidea dello spazio, richiede di dimostrare che la superficie laterale di una piramide è costituita da due triangoli rettangoli e da due isosceli e, a completamento del quesito, che se due numeri reali positivi variano mantenendo somma costante, il prodotto del quadrato del primo per il secondo è massimo quando

il primo è doppio del secondo. Anche questa domanda è interessante, perché, oltre a coinvolgere la capacità dimostrativa dello studente (che può scegliere tra dimostrazione elementare e dimostrazione con utilizzo dell'analisi) permette di verificare se lo studente riesce a collegare la questione numerica con quella geometrica precedentemente affrontata: la scomposizione del volume di un prisma.

- Nella prova del 1997 in un quesito di geometria analitica e analisi si chiede di verificare che l'equazione di un luogo corrisponde a quella data, di studiarla come funzione, e di dimostrare che le sue tangenti in determinati punti sono parallele all'asse y. Si tratta qui di studiare il limite della derivata prima della funzione, perché nei punti in questione la derivata non esiste. Vedendo che tende all'infinito, si conclude che le tangenti sono verticali. In un altro quesito, di geometria solida, si chiede di dimostrare che una retta seca due triangoli secondo due segmenti uguali, e che le sezioni di due coni con un piano sono due circonferenze.

Da questa breve e incompleta panoramica si può osservare che negli ultimi anni è cresciuto l'interesse per questioni di tipo deduttivo, che evidenzino la capacità degli studenti di ragionare autonomamente e non secondo schemi precostituiti dall'insegnante e pronti per essere ripetuti.

BIBLIOGRAFIA

M.P.I. circolare n°24 del 6/2/91.

M.P.I. circolare n°615 del 27/9/96.

AAVV: 1991, Piani di studio della scuola secondaria superiore e programmi dei primi due anni. Le proposte della commissione Brocca, *Studi e documenti degli Annali della Pubblica Istruzione*, n. 56, Le Monnier.

AAVV: 1992, Piani di studio della scuola secondaria superiore e programmi dei trienni. Le proposte della commissione Brocca, *Studi e documenti degli Annali della Pubblica Istruzione*, n. 59-60* e n. 59-60**, Le Monnier.

Ciarrapico, L. & Ciccarelli, M.: 1996, Un contributo per migliorare la qualità del servizio scolastico. Il progetto Prometeo, in *Atti del XVIII Convegno nazionale sull'insegnamento della matematica: Dalla Scuola Media alle Superiori: continuità nell'insegnamento della matematica*, Campobasso.

Ciarrapico, L.: 1997, *Situazione attuale e ... progetti futuri*, Convegno "Abbasso il cologaritmo! Cambiamo qualcosa nell'insegnamento della matematica?" Università Bocconi, Milano.

Enriques F.: 1921, L'insegnamento dinamico, *Periodico di matematiche*, 1, 6-16.
Nolli, N., Robutti, O. & Santorum, L.: 1998, *Smaturanda*, Il Capitello, Torino.

1.4 La dimostrazione nella prassi didattica

Per tradizione, la dimostrazione si ha in geometria. Questa posizione ha caratterizzato fortemente la prassi didattica: non solo in Italia, ma un po' ovunque, in classe, la dimostrazione viene introdotta con la geometria e, in particolare, con la geometria sintetica. Se ciò è in accordo con la tradizione, probabilmente è in minore accordo con strategie di insegnamento che propongano un approccio graduale alla dimostrazione. In geometria, infatti, molti sono i distrattori: il disegno, la misura, il grande numero di proposizioni assunte a fondamento della teoria...

In realtà, negli ultimi anni, nella scuola superiore italiana si sono andate rafforzando tendenze didattiche che si basano su un progressivo abbandono dell'insegnamento della geometria, soprattutto dell'insegnamento della dimostrazione in geometria, o dell'abitudine a risolvere problemi con dimostrazioni. D'altra parte, negli altri campi della matematica (se pensiamo all'algebra, alla teoria dei numeri, alla geometria analitica, alla trigonometria, un po' meno forse all'analisi), la dimostrazione è sempre stata poco diffusa nella scuola, se non addirittura assente.

Ciò che stupisce, in particolare, è che sia poco presente nella geometria analitica. Il metodo di Cartesio è fortemente legato alla dimostrazione: potrebbe anzi essere presentato proprio come un metodo per ricercare, per scoprire una dimostrazione. In fondo si potrebbe pensarlo come l'antico metodo di analisi (partire dall'oggetto cercato come se già fosse dato per risalire da esso alle ipotesi del problema) in cui si introducono e si applicano le nozioni e le tecniche dell'algebra. Di tutti questi aspetti passano, nella mente degli studenti, solo quelli strettamente legati al calcolo e alle tecniche risolutive di un problema: è raro che si utilizzi la geometria analitica per effettuare una dimostrazione o per cercarla. Non ci sembra che, nella prassi scolastica, emerga una particolare attenzione alla riflessione sulla dimostrazione come oggetto di studio nei suoi differenti aspetti, sia per quel che riguarda le funzioni (scoprire, convincere, validare, sistemare, precisare la nozione di conseguenza logica fra la proposizione da dimostrare e gli assiomi della teoria...), sia per quel che riguarda i vari aspetti (logici, epistemologici, cognitivi...), sia, infine, per quel che riguarda i contesti d'uso (argomentazione, generalizzazione, spiegazione, comunicazione....).

Non ci sembra che gli insegnanti siano sempre attenti a domande come le seguenti:

- Qual è il senso che gli studenti attribuiscono alla dimostrazione?[10]
- È possibile, e come, fare evolvere tale senso personale nella direzione dei significati attualmente condivisi dalla comunità scientifica?
- Che ruolo possono giocare, da un punto di vista didattico, i diversi significati che ha assunto storicamente la dimostrazione e i diversi statuti che, tramite essa, sono stati attribuiti agli enunciati matematici?
- Quale ruolo giocano, nella comprensione di una dimostrazione, il concetto di regola inferenziale e la condivisione delle varie regole inferenziali utilizzate? Tale problema non è marginale, soprattutto se è vero che l'esperto utilizza, e non solo nella fase di comunicazione della dimostrazione, le regole inferenziali della logica classica, per esempio quelle della deduzione naturale (Gentzen, 1935; Prawitz, 1965; 1971; Borga, 1995; Marchini, 1995a; 1995b), mentre il principiante e, quindi, lo studente, utilizza regole inferenziali che sono più vicine a quelle della logica della scoperta: generalizzazioni su casi particolari, tendenza a trarre solo conclusioni che non siano 'banalmente' contenute nelle premesse, uso di ragionamenti non monotoni (Girotto, 1994; Johnson Laird, 1993; Viale, 1990).
- Quali ambienti di apprendimento si rivelano utili per aiutare lo studente a percorrere il cammino che sembra separare l'argomentazione dalla dimostrazione? In tal senso acquistano particolare importanza i confronti tra attività effettuate in diversi

[10] Ricordiamo che in appendice riferiamo su un'indagine effettuata in alcune classi riguardante questo problema.

campi di esperienza, nel senso di Bartolini Bussi & Boero (1996), sia che si attinga anche all'esperienza extra-scolastica dello studente (ombre del sole, ingranaggi) sia che si attinga a campi di esperienza e ambienti di apprendimento costruiti durante l'attività scolastica (geometria, aritmetica, algebra, Cabri....).

- Qual è il ruolo del *controllo* nella produzione di una dimostrazione da parte dell'esperto e del principiante? E quali mediatori mettono a disposizione del principiante strumenti di controllo analoghi a quello che l'esperto possiede? In particolare, è possibile individuare ambienti che orientino e supportino in modo naturale il principiante verso successive azioni di scoperta e sistemazione, di analisi e sintesi che sembrano contraddistinguere il lavoro dell'esperto?
- È possibile sviluppare un'opportuna 'didattica della definizione' che renda compatibile ed accessibile agli allievi il delicato ruolo che le definizioni hanno nell'attività dimostrativa e nella costruzione di una teoria di riferimento (Tall & Vinner, 1981; Vinner, 1992; Fischbein & Mariotti, 1997)?

In definitiva, crediamo che, nell'insegnamento, il problema della dimostrazione non abbia la stessa considerazione che ha attualmente nella pratica matematica e nella ricerca didattica. Ci sembra che molti insegnanti cerchino di risolvere le difficoltà dell'attività dimostrativa semplicemente evitando di affrontarle e quindi richiedendo, al più, ai propri studenti, di ripetere alcune dimostrazioni fatte dall'insegnante o del tutto simili a quelle fatte dall'insegnante. Nella prassi didattica sono rarissimi, se non inesistenti, i momenti di produzione originale e di successiva validazione di enunciati, momenti che, d'altra parte, comportano numerose difficoltà.

Le difficoltà delle attività dimostrative sono acuite dalla scelta, tradizionale nella prassi didattica e mai abbandonata, di introdurre le dimostrazioni soltanto nel ricco ambiente della geometria euclidea (che risulta forse eccessivamente ricco). Inoltre le regole formali di deduzione implicitamente utilizzate nelle dimostrazioni presentate sui libri di testo o dall'insegnante, non sembrano sempre in consonanza con le regole usualmente utilizzate dagli studenti nell'argomentare. Effettuare una dimostrazione richiede inoltre capacità di organizzare strutture complesse; richiede capacità di controllo e quindi atteggiamenti di tipo metacognitivo sui quali la didattica tradizionale insiste poco (o magari dà per scontati). Soprattutto, però, richiede impegno, attenzione e condivisione degli obiettivi tra insegnante e allievo. Infine, ma non per ultimo, le discontinuità epistemologiche tra argomentazione e dimostrazione sono apparentemente mascherate e quindi sottovalutate a causa di un'organizzazione e una struttura del discorso che sembrano simili in superficie ma sono differenti in profondità (cioè accanto a elementi di continuità ve ne sono alcuni di forte discontinuità che non possono essere sottovalutati).

Eppure, nonostante queste difficoltà e, anzi, proprio per queste stesse difficoltà, l'attività di produzione e validazione di enunciati originali e altrui è attività didattica particolarmente significativa e culturalmente stimolante.

- L'opportunità di un percorso fondato sul concetto di dimostrazione è motivata da considerazioni di varia natura che richiamiamo brevemente qui di seguito e che sono approfondite in Ciceri, Furinghetti & Paola, (1996).
- Le abilità di tipo logico-deduttivo, i processi di generalizzazione e il controllo della validità di tali processi attraverso la dimostrazione sono considerati fondamentali nei curricula di matematica di molti paesi (Edwards, 1992; Barbin, 1993).
- Un itinerario fondato sul concetto di dimostrazione è culturalmente stimolante. "La dimostrazione è presente ovunque in matematica; ne è la caratteristica essenziale, nel bene e nel male" (Lolli, 1992, 21). "Non c'è matematica senza dimostrazione. È vero che la matematica non si esaurisce in dimostrazioni e neanche può ridursi a esse la comprensione della matematica. C'è l'euristica per la soluzione dei problemi, c'è la tecnica di calcolo in senso lato, e c'è l'aspetto della modellizzazione [...] Ma la dimostrazione segna in genere il passaggio alla matematica vera e propria da una fase propedeutica di acquisizione di abilità e nozioni che si dicono matematiche ma che sono solo il prolungamento della padronanza fisica dell'ambiente esterno e che servono a un controllo più efficiente dello stesso" (Lolli, 1988, 9).
- Il concetto di dimostrazione è naturalmente unificante e su di

esso è possibile costruire un percorso didattico organico che consenta di trattare concretamente molti degli argomenti di logica indicati nei nuovi programmi. Un tale percorso è strategicamente efficace in quanto, nonostante consenta di trattare gran parte degli argomenti previsti nei nuovi programmi, allo stesso tempo permette di non tralasciare temi cari alla tradizione, invitando solo ad osservarli da un differente punto di vista. In sintesi, si può dire che un percorso di tale tipo potrebbe costituire una sorta di cavallo di Troia nell'insegnamento tradizionale.

- La dimostrazione coinvolge importanti aspetti della vita di classe, quali la necessità di imparare ad argomentare rispettando regole esplicitate e condivise e l'opportunità di rimediare alla tendenza, che è propria dei giovani, ma non solo di essi, a sostenere argomentazioni basandosi unicamente sull'esperienza personale o su un numero limitato di casi.

BIBLIOGRAFIA

Barbin, É.: 1993, Quelles conceptions épistémologiques de la démonstration pour quels apprentissages?, *Repère IREM*, n.12, 93-113.

Bartolini Bussi, M. & Boero, P.: 1996, Teaching - Learning Geometry in Context, ICMI Study, *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century*.

Borga, M.: 1995, *Fondamenti di logica*, Franco Angeli, Milano.

Ciceri, C., Furinghetti, F. & Paola, D.: 1996, Analisi logica di dimostrazioni per entrare nella logica della dimostrazione, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, v.19B, 209-234.

Edwards, L. B.: 1992, Reasoning and representation in first year high school students, in W. Geeslin & K. Graham (editors), *Proceedings of PME XVI* (Durham), v.1, 209-216.

Fischbein, E. & Mariotti, M.A.: 1997, Defining in classroom activities, *Educational studies in mathematics*, 34, 219-248.

Gentzen, G.: 1935, Untersuchungen über das logische Schliessen, *Mathematische Zeitschrift*, v.39, 176-210, trad. it. parziale: 1981, Ricerche sulla deduzione logica. In D. Cagnoni (editor), *Teoria della dimostrazione*, Feltrinelli, Milano, 77-116.

Girotto, V.: 1994, *Il ragionamento*, Il Mulino.

Johnson-Laird, P. J.: 1993, *Human and machine thinking*, Erlbaum, Hillsdale; traduzione italiana: 1994, *Deduzione induzione creatività*, Il Mulino, Bologna.

Lolli, G.: 1988, *Capire una dimostrazione*, Il Mulino, Bologna.
Lolli, G.: 1992, *Che cos'è la logica matematica*, Muzzio, Padova.
Marchini, C.: 1995a, La deduzione: esperienze didattiche. In: L. Ciarrapico & D. Mundici (a cura di): 1995, *L'insegnamento della logica*, MPI-AILA, Lecce, 159-175.
Marchini, C.: 1995b, Schemi di deduzione. In: L. Ciarrapico, & D. Mundici, (a cura di): 1995, *L'insegnamento della logica*, MPI-AILA, Lecce, 107-125.
Prawitz, D.: 1965, *Natural deduction*, Almqvist and Wiksell, Stockholm, Göteborg, Uppsala.
Prawitz, D.: 1971, Ideas and results in proof theory. In: J. E. Fenstad (editor), *Proceedings of the second Scandinavian logic Symposium,* Amsterdam, 235-307; trad. it., 1981, Idee e risultati nella teoria della dimostrazione. In: D. Cagnoni (editor), *Teoria della dimostrazione*, Feltrinelli, Milano, 127-204.
Tall, D. & Vinner, S.: 1981, Concept image and concept definition, *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.
Viale, R: 1990, Epistemologia, cognizione e razionalità deduttiva in Viale, R. (a cura di) *Mente umana, mente artificiale,* Feltrinelli, Milano, 105-131.
Vinner, S.: 1992, The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In: D. Tall (editor), *Advanced mathematical thinking*, Kluwer, Dordrecht.

2. UN PROGETTO DI RICERCA

In questa sezione ci proponiamo di illustrare brevemente il nostro progetto e di discutere il modello teorico mediante il quale abbiamo interpretato i protocolli degli studenti, alcuni dei quali saranno presentati nella prossima sezione.

2.1 Il nostro progetto

La nostra ricerca si inserisce in modo naturale nel campo di interessi e nelle linee guida della ricerca didattica italiana sulla dimostrazione alla quale abbiamo già fatto cenno in precedenza, condividendone, in particolare:

1. l'opportunità di individuare ambienti di apprendimento che supportino lo studente nel passaggio dall'argomentazione alla dimostrazione, cercando di evidenziare gli aspetti di continuità emersi da ricerche di carattere cognitivo, contro la forte

discontinuità epistemologica che caratterizza il prodotto ‘dimostrazione’ diversamente dalle argomentazioni;

2. l’attenzione al lavoro del matematico alle prese con i teoremi e con le loro dimostrazioni;
3. l’attenzione alle difficoltà incontrate dagli alunni nelle varie fasi di esplorazione, di produzione, di validazione e di comunicazione di un enunciato.

Siamo particolarmente interessati all’individuazione di ambienti di apprendimento che consentano di preparare il terreno propizio ad affrontare in classe aspetti di carattere storico-epistemologico relativi alla dimostrazione e all’attività del dimostrare. Riteniamo che un efficace mediatore per trattare in classe questi aspetti potrebbe essere costituito dal gioco voci-eco nel senso di Boero, Pedemonte & Robotti (1997).

Per quel che riguarda gli aspetti di tipo cognitivo, siamo interessati alle dinamiche attraverso le quali gli studenti, ma anche gli esperti, pervengono alla costruzione di una dimostrazione (Arzarello, Micheletti, Olivero, Paola & Robutti, 1998; Olivero, Paola & Robutti, 1998). In particolare ci interessa studiare il ruolo di mediatore di uno strumento come Cabri (Arzarello, Gallino, Micheletti, Olivero, Paola & Robutti, 1998). Infine, ma non per ultimo, prestiamo attenzione agli aspetti di carattere sociale, legati all’attività argomentativa e dimostrativa, con particolare attenzione al ruolo delle discussioni matematiche in classe (Bartolini Bussi, Boni & Ferri, 1995), per condividere esperienze e conoscenze fra gli studenti.

Caratteristica saliente del nostro progetto, lo abbiamo già detto, è quella di fare della dimostrazione un oggetto di didattica. Ciò apre alcuni problemi, primo fra tutti, quello di creare motivazioni, bisogni intellettuali degli studenti nei confronti della dimostrazione. Abbiamo raccolto dati che suggeriscono che far lavorare gli studenti su problemi che richiedono esplorazioni dinamiche in un ambiente come Cabri li possa aiutare significativamente nel far nascere motivazioni alla dimostrazione. Non si tratta certo di un risultato scontato: se si pensa che l’azione di trascinamento delle figure messa a disposizione da Cabri consente di fare un numero di verifiche tale da dare l’illusione di poter considerare tutti i casi possibili, non si può non sospettare che Cabri possa addirittura demotivare alla dimostrazione di quanto scoperto e osservato. Ciò sarebbe senza dubbio corretto se ci si limitasse a considerare, fra le funzioni della dimostrazione, quella del convincere della verità di una proposizione. In questo caso Cabri sarebbe sicuramente sufficiente a convincere della verità delle proprietà osservate sullo schermo con l'azione di trascinamento. Il fatto è che il convincere (se stessi o altri) è solo uno degli aspetti dell'attività dimostrativa, ma, a nostro avviso, non quello maggiormente caratterizzante. Riteniamo invece che la funzione che meglio caratterizza l'attività dimostrativa sia quella di precisare la nozione di conseguenza logica tra assiomi di una teoria e la proposizione da dimostrare. In altri termini, come suggerisce Polya (1954), prima ci si convince e poi si è pronti e motivati a dimostrare: nelle varie sperimentazioni seguite abbiamo osservato che, ove l'insegnante è riuscito a creare negli studenti attenzione verso altri sensi della dimostrazione che non siano quelli del convincere o del verificare, le attività in ambiente Cabri hanno fatto nascere in loro la necessità, il bisogno intellettuale di capire *perché* una certa proprietà (della cui verità erano assolutamente convinti) fosse vera.

BIBLIOGRAFIA

Arzarello, F., Micheletti, C., Olivero, F., Paola, D. & Robutti, O.: 1998, A model for analysing the transition to formal proofs in geometry, *PME XXII.*

Arzarello, F., Gallino, G., Micheletti, C., Olivero, F., Paola, D. & Robutti, O.: 1998, A model for analysing the transition to formal proofs in geometry, *PME XXII.*

Bartolini Bussi, M., Boni, M. & Ferri, F.: 1995, Interazione sociale e conoscenza a scuola: la discussione matematica, *Rapporto tecnico n. 21*, Modena.

Boero, P., Pedemonte, B. & Robotti, E.: 1997, Approaching theoretical knowledge through voices and echoes: a Vygotskian perspective, *Proceedings of PMEXXI*, Lathi, v.2, 81-88.

Olivero, F., Paola, D. & Robutti, O.: 1998, *Dalla congettura alla dimostrazione*, Università di Torino, Quaderni del Dipartimento di Matematica

Polya, G.: 1954, *Induction and analogy in mathematics*, Princeton.

2.2 Il modello teorico

Attraverso l'osservazione di esperti impegnati in attività di dimostrazione in ambiente carta e matita, abbiamo messo a punto un modello per analizzare le diverse fasi dell'approccio a un problema, dalla sua esplorazione alla sua dimostrazione, con particolare attenzione all'attività di congettura. Le modalità che descriveremo non si riferiscono al caso in cui si abbia già un enunciato da dimostrare, bensì al caso in cui occorre fare congetture su una situazione geometrica e validarle.

L'ipotesi che abbiamo fatto è che tale modello potesse essere esteso anche a studenti e a non esperti, purché si offrissero a costoro strumenti adeguati per lavorare in condizioni analoghe a quelle degli esperti quando dimostrano. Crediamo che il software Cabri possa svolgere questa funzione mediatrice offrendo al non esperto un ambiente nel quale realizzare quegli esperimenti mentali che l'esperto compie quando dimostra con carta e matita.

Rimandando a Olivero, Paola & Robutti (1998) per un'analisi più dettagliata, descriviamo qui di seguito le caratteristiche fondamentali del modello:

- il **controllo ascendente** (Saada-Robert, 1989; Gallo, 1994): è la modalità con cui il risolutore guarda la figura, cerca fra le sue conoscenze quella che può essere utilizzata nello specifico caso, fa una congettura usando metodi euristici: è un procedimento di 'salita' dal disegno alla teoria, la quale si configura come lo spazio delle conoscenze;
- la **selezione**: è la produzione di una congettura, che segue al processo di esplorazione ;
- l'**abduzione** (Peirce, 1960; Magnani, 1997): rappresenta il modo in cui il risolutore 'vede di quale regola questo è il caso'; in altri termini: chi risolve sceglie tra le proprie conoscenze teoriche quella che ritiene possa essere usata nel particolare contesto in cui opera. L'abduzione è un tipo di ragionamento che si differenzia sia dalla deduzione che dall'induzione. Per dare un'idea di tale differenziazione, può essere utile il seguente esempio (Peirce, 1960). Supponiamo che io sappia che un certo sacco è pieno di fagioli bianchi. Consideriamo le seguenti affermazioni: A) questi fagioli sono bianchi; B) i fagioli di quel sacco sono bianchi; C) questi fagioli provengono da quel sacco.

Una deduzione è una concatenazione della forma: B e C, allora A; un'abduzione è: A e B, allora C; un'induzione sarebbe: A e C, allora B.

- il **controllo discendente** (Gallo, 1994): si ha quando il risolutore ha già prodotto una congettura ad esempio nella forma 'se…allora'; ora usa le sue conoscenze per validarla e dimostrarla: è una 'discesa' dalla teoria al disegno (sia nel suo aspetto figurale che in quello concettuale), il quale diventa di nuovo un campo di esplorazione, questa volta non più per scoprire, bensì per validare;
- il **distanziamento** di tipo **locale**: il risolutore guarda i prodotti del suo lavoro dal di fuori, distaccandosi da essi e producendo delle **concatenazioni logiche locali** (singoli passi deduttivi o gruppi di passi deduttivi);
- il **distanziamento** di tipo **globale**: il risolutore organizza i passi locali in un'unica struttura: dà luogo a **concatenazioni logiche globali** (dimostrazioni vere e proprie). Può essere descritto tramite la metafora dell'agente razionale (Balacheff, 1982), che controlla e rilegge tutto ciò che è stato prodotto nei processi di esplorazione, seleziona ciò che risulta significativo ed essenziale per la dimostrazione e dà luogo a possibili nuove esplorazioni.

Le due modalità di controllo (ascendente, discendente) sono in genere processi che si alternano: in esse esplorazioni, abduzioni, validazioni, ecc… convergono più o meno rapidamente verso le concatenazioni logiche locali e quella globale complessiva. In generale tutte le modalità sopra elencate sono fortemente interrelate; le caratteristiche principali delle loro interrelazioni sono le seguenti:

- l'attività di esplorazione-selezione è presente nell'intero processo di congettura e dimostrazione;
- durante la risoluzione cambia l'atteggiamento del soggetto sia nei confronti delle sue esplorazioni, sia nei confronti degli ostensivi (es. disegno) con cui interagisce e conseguentemente il diverso tipo di controllo su cosa sta facendo nell'ambiente assegnato;
- il diverso tipo di controllo cambia le relazioni tra gli oggetti geometrici, sia nel modo in cui vengono 'disegnati', sia nel modo con cui sono 'visti' dal soggetto: questo sembra essere

essenziale per produrre argomentazioni e dimostrazioni significative;
- la transizione dal controllo ascendente a quello discendente è prodotta dall'abduzione, la quale evidenzia tutti gli ingredienti necessari per la formulazione della congettura nella forma logica condizionale e per la sua eventuale dimostrazione;
- il distanziamento del soggetto esplicita l'inversione del processo di pensiero dalla modalità abduttiva a quella deduttiva;
- il distanziamento locale segna il passaggio dal controllo ascendente a quello discendente sul singolo enunciato, attraverso la produzione di congetture già espresse in una forma condizionale, grazie a qualche abduzione;
- il distanziamento globale fa riferimento esclusivamente al controllo discendente sull'intero processo, in cui si possono produrre anche nuove esplorazioni a livello locale;
- il passaggio inverso dal controllo discendente a quello ascendente è 'naturale': quando iniziano nuove esplorazioni come verifica di ipotesi o congetture, si può avere facilmente un ritorno ad un controllo ascendente, anche se ad un livello più locale e sempre sostenuto dall'azione dell'agente razionale, che continua a controllare globalmente la situazione secondo la modalità discendente.

Il punto più delicato sembra essere il passaggio da una modalità di controllo all'altra (ascendente/discendente): esso è infatti profondamente legato al cambiamento delle relazioni rispetto a cui gli oggetti geometrici sono presi in considerazione. La transizione è di solito guidata dall'abduzione; mediante questo passaggio il soggetto può riuscire a dominare i prodotti finali dell'attività risolutiva: congettura e dimostrazione, differenti dal punto di vista epistemologico. Ciò è particolarmente intrigante, perché suggerisce l'esistenza di una continuità cognitiva fra congettura e dimostrazione, che si contrappone, in un certo senso, alla innegabile discontinuità epistemologica.

BIBLIOGRAFIA

Balacheff, N.: 1982, Preuve et démonstrations en mathématique au collège, *Recherches en didactique des mathemèmatiques*, 3(3), 261-304.

Gallo, E.: 1994, Control and solution of "algebraic problems". In: Arzarello F. & Gallo E. (eds.), *Problems in algebraic learning*, special issue of *Rendiconti del Seminario matematico dell'Università e Politecnico di Torino*, v. 52, n.3, 263-278.
Magnani, L.: 1997, *Ingegnerie della conoscenza*, Marcos y Marcos, Milano.
Olivero, F., Paola, D. & Robutti, O.: 1998, *Dalla congettura alla dimostrazione*, Università di Torino, Quaderni del Dipartimento di Matematica.
Peirce, C.S.: 1960, *Collected Papers II*, Elements of Logic, Harvard, University Press, 372.
Saada-Robert, M.: 1989, *La microgénèse de la rapresentation d'un problème*, Psychologie Française, 34, 2/3.

2.3 Il trascinamento in Cabri

Nell'attività di sperimentazione che conduciamo con classi di liceo scientifico da due anni, abbiamo fatto utilizzare agli studenti Cabri I[11] (Laborde & Laborde, 1992; Laborde & Capponi, 1994; Laborde, 1995; Boieri, 1996) per la risoluzione di problemi.

La differenza più significativa di Cabri, rispetto all'ambiente carta e matita, consiste nella funzione di trascinamento, ovvero nella possibilità di manipolare dinamicamente e direttamente sullo schermo le figure geometriche costruite.

Le diverse modalità di trascinamento da noi individuate (Arzarello, Gallino, Micheletti, Olivero, Paola & Robutti, 1998; Olivero, Paola & Robutti, 1998) sono le seguenti:

1. Test del trascinamento (dragging test): se, trascinando uno o più elementi della figura, essa mantiene le proprietà geometriche che le attribuivamo, allora la costruzione supera il test.
2. Trascinamento a caso (wandering dragging): consiste nel trascinare a caso i componenti della figura, per scoprire regolarità e proprietà invarianti.

[11] Non ancora Cabri II, perché Cabri I è tecnicamente più semplice da imparare e, avendo poche primitive geometriche a disposizione, lascia ai ragazzi la possibilità di costruire nuovi oggetti, obbligandoli a ragionare di più. In particolare ci sembra che Cabri I sia più adatto a portare gli allievi verso la problematizzazione geometrica delle questioni.

3. Trascinamento guidato (guided dragging): consiste nel trascinare uno o più punti di una figura, fino a farle assumere una configurazione che goda di particolari proprietà.
4. Trascinamento lungo un luogo muto (lieu muet dragging): consiste nel trascinare un punto della figura lungo una direzione privilegiata, in modo da conservare una certa proprietà o regolarità. La traccia di questo spostamento rappresenta un luogo geometrico.
5. Trascinamento lungo una linea (line dragging): consiste nel segnare i punti che mantengono una proprietà della figura; il luogo muto diventa esplicito a livello visivo e in alcuni casi può essere costruito in Cabri.
6. Trascinamento vincolato (linked dragging): consiste nel vincolare un punto a un oggetto e poi nel muovere il punto sull'oggetto.
7. Trascinamento legato (bound dragging): consiste nel trascinare un punto che si trova ad essere già vincolato ad un oggetto e quindi si può muovere con un grado di libertà (e non con due).

Ci proponiamo ora di rileggere le modalità di trascinamento precedentemente descritte alla luce delle caratteristiche del modello tratteggiate nel precedente paragrafo, per precisare le relazioni che ci sono tra esse.

- Il test del trascinamento è usato come strumento di validazione di una costruzione o di una congettura, quindi evidenzia prevalentemente un controllo discendente.
- Il trascinamento a caso e il trascinamento guidato costituiscono prevalentemente uno strumento di scoperta ed esplorazione, si inseriscono perciò in un contesto di controllo ascendente.
- Il trascinamento lungo un luogo muto agisce sia come produttore di nuove scoperte e nuovi ragionamenti euristici, sia come riorganizzatore logico delle precedenti esplorazioni. Esprime un'abduzione a livello figurale e percettivo: il luogo tracciato è 'la regola' di cui la figura con la proprietà individuata è 'il caso'. È una delle attività che inducono il passaggio dalla modalità di controllo ascendente a quella discendente.
- Il trascinamento lungo una linea è la prosecuzione della precedente modalità perché, scoperta una proprietà, la si sfrutta per rendere percettibile il luogo, che non è più muto. Evidenzia il

flusso continuo delle attività che portano il risolutore dal controllo ascendente a quello discendente.

- Il trascinamento vincolato segnala sia la modalità di controllo ascendente che la modalità di controllo discendente, ma anche il passaggio dall'una all'altra (abduzione). Nel caso in cui il luogo muto è un luogo che si può costruire in Cabri (circonferenza o retta), una volta che lo si è scoperto attraverso il trascinamento lungo una linea, si può utilizzare questo nuovo tipo di trascinamento come validazione della congettura: vincolando il punto a quella retta o circonferenza e muovendolo su di essa, la figura deve conservare la proprietà o la regolarità congetturata.
- Il trascinamento legato esprime un controllo di tipo ascendente (un trascinamento a caso in cui il punto si muove su una curva anzichè in tutto il piano) quando si esplora una situazione e si selezionano congetture, oppure un controllo discendente, per validare congetture e produrre concatenazioni logiche. Questo tipo di trascinamento non è il risultato di una ricerca, ma è imposto dall'esterno, perché il punto si trova già costretto su una curva dalla costruzione stessa. Il punto possiede allora un solo grado di libertà, perché appartiene ad una curva di dimensione uno.

L'analisi dei comportamenti degli studenti nei confronti del trascinamento rivela interessanti elementi riguardanti i processi di pensiero che regolano il passaggio dalla congettura alla dimostrazione. Nella terza parte di questo lavoro ci occupiamo, attraverso l'analisi di alcuni protocolli degli studenti, di approfondire questo aspetto.

Come vedremo, sembra di poter affermare che Cabri funga da potente mediatore per la transizione dalla fase ascendente a quella discendente di controllo. Così Cabri diventa un esempio di ambiente particolarmente adeguato a mettere gli studenti in condizioni analoghe a quelle in cui si trova l'esperto quando affronta problemi di produzione e validazione di congetture.

Parole chiave
Abduzione
Agente razionale
Concatenazione logica globale

Concatenazione logica locale
Controllo ascendente
Controllo discendente
Dimostrazione automatica
Distanziamento globale
Distanziamento locale
Selezione
Test del trascinamento
Trascinamento a caso
Trascinamento guidato
Trascinamento legato
Trascinamento lungo un luogo muto
Trascinamento lungo una linea
Trascinamento vincolato

BIBLIOGRAFIA

Arzarello, F., Gallino, G., Micheletti, C., Olivero, F., Paola, D. & Robutti, O.: 1998, Dragging in Cabri and modalities of transition from conjectures to proofs in geometry, *PME XXII*.
Boieri, P. (a cura di): 1996, *Fare geometria con Cabri*, Centro ricerche didattiche Ugo Morin, Giovanni Battagin Editore.
Laborde, C.: 1995, Cabri-géomètre ou un nouveau rapport à la géomètrie. In: *Notiziario UMI XVII Convegno sull'insegnamento della matematica: l'insegnamento della geometria*. Temi d'attualità, supplemento al n° 8-9, Anno XXII.
Laborde, C. & Capponi, B.: 1994, Cabri géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique, *Recherches en didactique des mathématiques*, v. 14, 1.2, 165-210.
Laborde, C. & Laborde J.M.: 1992, Problem Solving in Geometry: From Microworlds to Intelligent Computer Environments. In: *Mathematical Problem Solving and New Information Technologies. Research in Contexts of Practice*, NATO ASI Series, Series F, 89.
Olivero, F., Paola, D. & Robutti, O.: 1998, *Dalla congettura alla dimostrazione*, Università di Torino, Quaderni del Dipartimento di Matematica.

3. LA REALIZZAZIONE DEL PROGETTO

In questa sezione descriviamo la realizzazione in classe del progetto sulla dimostrazione, soffermandoci sui dettagli didattici dell'intervento e sull'analisi dei protocolli degli studenti. Riportiamo i problemi proposti nell'intera attività e alcuni suggerimenti sulla possibilità di insegnare la dimostrazione in ambienti diversi dalla geometria.

3.1 L'attività di sperimentazione in classe

Il percorso didattico sulla dimostrazione in geometria che presentiamo è stato realizzato in una decina di classi seconde e terze di scuola superiore[12].

Questo percorso si inserisce all'interno di un progetto più ampio, da elaborare su un quinquennio di scuola secondaria superiore, basato su un approccio alla geometria attraverso strumenti informatici (Cabri, Derive, Maple, …), macchine matematiche, ambiente carta e matita. Attraverso tale sperimentazione si vuole creare attenzione per la dimostrazione anche nella prassi didattica, e non solo a livello di ricerca; in particolare si intende porre l'attenzione sulla dimostrazione pensata come oggetto di didattica.

Abbiamo quindi elaborato un percorso in cui si fa uso della dimostrazione non semplicemente 'raccontata' dall'insegnante e 'ripetuta' dagli allievi, bensì scoperta, costruita e spiegata dagli studenti con l'aiuto dell'insegnante. Attività di questo tipo dovrebbero rimanere bene impresse nella mente dei ragazzi, in quanto li rendono protagonisti nella ricerca di risultati e fanno sì che essi prendano attivamente parte al processo di insegnamento-apprendimento della matematica. Un elemento di questa sperimentazione è l'utilizzo del software Cabri, sulla base della scelta didattica dell'integrazione disciplinare tra matematica e informatica prevista dai nuovi programmi.

Nel commento al tema 1 (Geometria del piano e dello spazio) dei programmi P.N.I. per il biennio si legge: "Lo studio della geometria nel biennio ha la finalità principale di condurre progressivamente l'allievo dalla intuizione e scoperta di proprietà geometriche alla loro

---

[12] Per mancanza di spazio, riporteremo di seguito solo il protocollo della risoluzione di una proposta di lavoro e il protocollo di una discussione, entrambi in classi seconde liceo scientifico sperimentale P.N.I.

descrizione razionale; a ciò il docente può pervenire adottando un metodo che, facendo leva sulle conoscenze intuitive apprese dallo studente nella scuola media, proceda allo sviluppo razionale di limitate catene di deduzioni, dove ogni ipotesi o ammissione a cui si farà ricorso sia chiaramente riconosciuta e formulata in modo esplicito. Al docente compete poi l'impegno di avviare la fase euristica su processi di assiomatizzazione partendo da semplici situazioni assunte nei vari campi; questo per permettere una familiarizzazione con il metodo ipotetico-deduttivo e pervenire negli eventuali studi successivi alla costruzione di un sistema di assiomi per la geometria elementare; a tal fine è bene programmare una scelta di proprietà delle figure piane da dimostrare." (Circolare n°24 del 6/2/91).

Una parte del percorso è costituita dalla congettura e dalla dimostrazione di proprietà in geometria attraverso proposte di lavoro da svolgere nell'ambiente Cabri-Géomètre, che si inseriscono nel curriculum di matematica dei nuovi programmi[13] e vengono alternate alle tradizionali lezioni da parte dell'insegnante. I nuovi concetti sono introdotti con un approccio euristico che favorisce l'esplorazione della situazione geometrica mediante attività che gli studenti devono svolgere nell'ambiente Cabri; successivamente l'insegnante procede alla istituzionalizzazione delle congetture che gli studenti producono e delle dimostrazioni da loro elaborate con il classico strumento carta e matita. Infatti l'utilizzo di un software didattico per l'insegnamento della geometria euclidea non sostituisce la dimostrazione sviluppata in ambiente carta e matita, ma può interagire con essa e rafforzare la concettualizzazione dei risultati geometrici tramite l'esperienza diretta manipolativa sulla figura. Dunque i due aspetti, quello di ricerca euristica e di formulazione di congetture e quello deduttivo si intrecciano ed integrano l'un l'altro, ciò che costituisce un approccio didattico alla dimostrazione in tutta la sua complessità.

Gli obiettivi generali dell'insegnamento della matematica, riportati nei programmi sperimentali P.N.I., che si possono conseguire con questa attività sono:

- sviluppare abilità logiche ed intuitive,

[13] M.P.I. circolare n°615 del 27/9/96.

- riconoscere concetti e regole della logica in contesti argomentativi e dimostrativi,
- dimostrare proprietà geometriche,
- adoperare i metodi, i linguaggi e gli strumenti informatici introdotti,
- utilizzare il formalismo in matematica in modo significativo e non come pura sintassi.

Il percorso comprende attività di tipo diverso ed è diviso in due blocchi; il primo preparatorio, il secondo che costituisce il nucleo della ricerca vera e propria. Mentre il corpo preparatorio della sperimentazione comprende attività che avvicinano gli studenti al software Cabri, quello principale è costituito da problemi in cui gli studenti devono esplorare, congetturare e dimostrare proprietà, oppure fare costruzioni geometriche e validarle nei due ambienti Cabri e carta e matita.

Gli obiettivi specifici del percorso sono:

- passare in modo flessibile dal figurale al concettuale e viceversa[14]
- individuare relazioni geometriche tra gli elementi di un oggetto
- esplicitare ed utilizzare le reciproche dipendenze logiche tra gli oggetti geometrici, all'interno delle relazioni che li legano nella situazione studiata (ruolo di parametri e variabili)
- usare procedure euristiche
- formulare congetture
- testare congetture
- refutare congetture (non valide) tramite controesempi
- dimostrare proprietà geometriche valide che sono state congetturate
- validare costruzioni geometriche.

Il carattere di 'novità' del percorso riguarda un cambiamento a livello di metodologia piuttosto che di contenuti, volto a sviluppare

---

[14] Secondo Fischbein (Fischbein & Mariotti, 1997), i concetti geometrici hanno una doppia natura che è caratterizzata da due aspetti: il figurale e il concettuale. L'aspetto figurale riguarda le relazioni che i concetti geometrici hanno con lo spazio fisico e il disegno; l'aspetto concettuale si riferisce alla natura astratta e teorica che i concetti geometrici condividono con ogni altro tipo di concetti.

una forte attenzione verso la geometria, e più in generale verso la matematica.

Gli argomenti scelti sono i seguenti:

- triangoli
- quadrilateri e parallelogrammi
- circonferenza e cerchio
- poligoni inscrivibili e circoscrivibili.

La modalità di presentazione dei problemi di congettura e dimostrazioni è quella del problema aperto[15] (Arzarello & Robutti, 1997), che ha le seguenti caratteristiche:

- ha un enunciato abbastanza corto;
- non contiene in forma esplicita tutte le informazioni né tutte le ipotesi;
- non induce un metodo di soluzione;
- non contiene l'esplicitazione di tutte le richieste: le domande poste sono del tipo: "Quali configurazioni assume ... Quali relazioni puoi trovare tra ...".

Esso si presenta come una situazione che lo studente deve esplorare, utilizzando ciò che gli viene suggerito e anche ciò che egli stesso ritiene utile, per trarre delle conclusioni che non si configurano come 'il risultato', ma come le conseguenze delle premesse che ha usato.

I problemi aperti sembrano essere i più adatti per stimolare il pensiero produttivo (Kilpatrick, 1987) e per generare motivazione alla dimostrazione: infatti il senso di incertezza creato dalla produzione di una congettura si aggiunge alla necessità di comunicarla e di difenderla all'interno della comunità.

Gli studenti sono tradizionalmente abituati a risolvere i loro problemi sul foglio del quaderno, mentre, nella sperimentazione che abbiamo condotto, come abbiamo già detto, il software di geometria dinamica Cabri ha affiancato l'uso di carta e matita.

Il metodo utilizzato dall'insegnante per inserire Cabri tra gli altri strumenti didattici del processo di insegnamento-apprendimento ha

---

[15] Per contro il problema chiuso si presenta come una situazione che non dà spazio allo studente nel senso di produzione di congetture proprie, ma chiede un preciso risultato o una precisa dimostrazione.

una grande importanza in generale, e in particolare in questa sperimentazione.

Infatti ad un primo livello Cabri potrebbe essere visto come uno strumento per mostrare un disegno 'costruito bene', quindi come un software utile a soppiantare carta e matita laddove si voglia raggiungere un alto grado di precisione. In questo caso l'utilità rimane a livello grafico, senza sfiorare la dinamicità del trattamento delle figure. Oppure può essere utilizzato per spiegare la geometria visualizzando oggetti che, se trascinati, mettono in evidenza alcune proprietà e invarianti legati alla trattazione degli argomenti curricolari di geometria. In questo caso si sfrutta la potenzialità della funzione di trascinamento, ma l'uso del pacchetto è ancora nelle mani dell'insegnante, che mostra risultati di procedure preparate precedentemente.

Un altro livello di lavoro è quello in cui Cabri viene utilizzato dagli studenti, per costruire figure geometriche sotto precise consegne, giustificando o meno le scelte fatte; o anche, il software è lo strumento usato per scoprire proprietà indagando su figure costruite.

È difficile che il primo livello di utilizzazione del pacchetto incida molto sull'attività tradizionale di spiegazione-studio-dimostrazione-esercizio, mentre col secondo livello di utilizzo è più facile che ci sia una modificazione non solo dell'approccio degli studenti a un problema di geometria, ma anche della visione che essi hanno dei contenuti, dei metodi e dello statuto conoscitivo degli enunciati della disciplina stessa.

Come è già stato detto, abbiamo proposto agli studenti due tipi di problemi: quelli con richiesta di congetture e dimostrazioni, che chiameremo di esplorazione, e quelli con richiesta di costruzione e validazione, che chiameremo di costruzione.

I problemi di esplorazione richiedono lo studio di una situazione in cui non è ben definita la tesi (o le tesi). Lo studente nell'affrontarlo ha la libertà di indagare e chiedersi che cosa succede (quali proprietà valgono), di produrre congetture e infine di fornire le dimostrazioni corrispondenti. Di solito nella fase di esplorazione prevale il controllo ascendente, mentre per testare una congettura viene utilizzato il controllo discendente, che porta a una concatenazione logica globale.

Un problema di costruzione dovrebbe dare due risultati: innanzi tutto un disegno, effettuato attraverso i comandi disponibili del menu di Cabri, in secondo luogo la giustificazione teorica della correttezza della procedura seguita per fare il disegno. Se la figura costruita in Cabri supera il test del trascinamento, allora è stata costruita correttamente, ma ciò non è sufficiente per giustificare la sua correttezza nell'ambito della geometria euclidea. Occorre validare non tanto il prodotto della costruzione (il disegno ottenuto sullo schermo del computer) quanto la procedura utilizzata per ottenerlo, che trova la sua giustificazione in uno o più teoremi (Mariotti, 1996). Questo di solito segna il passaggio da un controllo ascendente della situazione a un controllo discendente e quindi la transizione verso la concatenazione logica della congettura.

L'attività di costruzione e quella di esplorazione in Cabri risultano in realtà strettamente interdipendenti. Ad esempio, una volta formulata una congettura in un problema di esplorazione, si può cercare di fare una costruzione per validare la scoperta: si può costruire una figura con la proprietà congetturata e vedere se essa supera il test del trascinamento.

L'attività di ogni proposta di lavoro nei problemi di esplorazione si articola in tre fasi diverse:

1. lavoro a gruppi in Cabri e compilazione di schede sulla proposta di lavoro: 1 ora
2. discussione in classe sulle scoperte e sistematizzazione da parte dell'insegnante: 1 ora
3. dimostrazione delle congetture (a casa).

Il modo di lavorare che proponiamo dovrebbe essere più stimolante di quello di un percorso tradizionale perché lo studio della geometria viene affrontato per scoperta e non in modo passivo.

1. Nella prima fase l'insegnante ha un ruolo molto delicato; egli deve riuscire a:

- evitare che i suoi interventi chiudano il problema;
- evitare che i suoi interventi sopprimano l'autonomia dell'alunno;
- incoraggiare la ricerca;
- non classificare un risultato in 'giusto' o 'sbagliato', ma far capire agli allievi che qualunque tentativo può farli progredire nella loro ricerca;

- non stabilire a priori che cosa si può fare e che cosa non si può fare;
- interagire con i vari gruppi senza che i suoi interventi orientino in modo determinante l'attività degli studenti.

Al termine del lavoro in laboratorio l'insegnante raccoglie tutte le schede e qualunque altro materiale utilizzato per la produzione dei risultati.

2. La seconda fase è collettiva, in essa sono presentate e discusse le decisioni e le soluzioni di ogni gruppo. Questa discussione di bilancio (Bartolini Bussi, Boni & Ferri, 1995) consiste nell'interazione del gruppo-classe orchestrata dall'insegnante. In questi problemi si sottolineano con gli studenti gli elementi delle procedure in Cabri che sono già passi di dimostrazione, procedendo così in modo continuo dalla congettura alla dimostrazione. Spesso le dimostrazioni possono già essere fatte in classe durante il lavoro a gruppi, direttamente ragionando sulla figura di Cabri. Nella fase di discussione esse vengono esplicitate, poi a casa vengono riscritte in modo preciso. In realtà non si insiste sull'aspetto formale delle dimostrazioni, prestando invece maggiore attenzione alla loro costruzione. Infatti è impossibile aspettarsi che gli studenti presentino, fin dal principio, dimostrazioni formali, ma quello che essi imparano nel momento in cui giustificano una loro congettura, usando gli elementi che vengono loro suggeriti dal dinamismo di Cabri, li conduce verso la dimostrazione formale (Goldenberg & Hazzan, 1995). In tutta l'attività (di gruppo e di discussione) un osservatore esterno[16] alla classe trascrive le modalità di lavoro degli studenti e i loro interventi. Nel caso dell'attività in classe, l'osservatore è stato talvolta suggeritore, ha indicato strategie, ha stimolato riflessioni e discussioni, secondo il modello dell'osservatore partecipante, discusso[17] in Arzarello & Bartolini

---

[16] Nel nostro esperimento è stata importante la presenza dell'osservatore, in quanto avevamo l'esigenza di raccogliere e analizzare dati relativi ai comportamenti degli studenti. Tale presenza non è, invece, necessaria quando si voglia semplicemente riprodurre l'attività didattica qui descritta.

[17] Un modo comunemente utilizzato nella ricerca didattica per avere un feedback sull'attività sperimentale, è quello di coinvolgere un 'osservatore

Bussi (1998). Questa azione 'invadente' si è rivelata in alcuni casi necessaria per far superare agli studenti situazioni di 'impasse' e, comunque, è risultata fortemente differente nelle classi. In particolare in una classe, l'osservatore non è intervenuto, secondo un altro modello di ricerca e sperimentazione didattica, quello in cui i ruoli di insegnante e di osservatore sono separati (Arzarello & Bartolini Bussi, 1998). Il motivo della presenza di due comportamenti diversi dell'osservatore risiede nel grado di capacità di utilizzo di Cabri da parte delle classi coinvolte: gli studenti ad un livello più avanzato di conoscenza di Cabri non hanno avuto bisogno di interventi da parte dell'osservatore. Il ruolo dell'osservatore riguarda anche le problematiche dei rapporti tra ricerca e prassi didattica. Per la ricerca il ruolo dell'osservatore avrebbe dovuto essere quello del registratore di situazioni e scambi di idee. In pratica spesso si è rivelato necessario, per l'apprendimento da parte degli studenti di metodi di lavoro in questi problemi, che l'osservatore intervenisse come supporto all'azione dell'insegnante. Abbiamo ritenuto opportuno accennare a questa problematica, anche se non è questa la sede per approfondirla ulteriormente.

3. L'ultima fase viene svolta a casa singolarmente dagli studenti, che consegnano poi all'insegnante la dimostrazione delle congetture.

L'attività di ogni proposta di lavoro di costruzione si articola in quattro fasi diverse:

1. lavoro a gruppi in Cabri e compilazione di una scheda sulla proposta di lavoro, che richiede di fornire una procedura per ottenere un disegno: 1 ora
2. discussione in classe sui vari procedimenti di costruzione (corretti e non): circa 1 ora
3. discussione in classe sulla validità matematica della costruzione: circa 1 ora
4. dimostrazione (a casa).

Durante l'attività di gruppo il ruolo dell'insegnante è di aiuto per coloro che si trovano bloccati nella risoluzione della proposta di

---

partecipante' (Eisenhart, 1988), che raccoglie e interpreta i dati in classe.

lavoro. Egli non suggerisce né risolve il problema al posto degli studenti, bensì pone domande opportune, in modo che siano gli stessi allievi a trovare le risposte ai loro dubbi.

Come nei problemi di esplorazione, una parte del lavoro viene svolta in un gruppo e un'altra parte collettivamente da tutta la classe:

1. La prima fase è caratterizzata dall'attività al computer, preceduta dall'analisi del testo del problema: gli studenti, a gruppi di due o tre, riportano sulle schede dati, incognita[18] e relazioni tra dati e incognita (Polya, 1957). Questo momento a nostro parere è importante, perché se l'analisi del problema viene svolta con attenzione, è più facile evitare errori vari. Viene quindi costruita in Cabri la figura richiesta, e riportato sulla scheda l'intero algoritmo di costruzione. Non è detto che l'operazione sia immediata: attraverso il test del trascinamento viene controllata la correttezza della costruzione e, in caso contrario, viene modificato l'algoritmo, fino ad ottenere quello corretto. Non è tanto il disegno in sé ad essere validato, ma la procedura di costruzione, attraverso la prova del trascinamento in Cabri. È chiaro che, dal punto di vista teorico, questa prova non è sufficiente, per cui occorre validare 'matematicamente' la costruzione. Durante l'attività una persona osserva un gruppo, scrivendo i dialoghi dei ragazzi e le azioni che compiono.
2. In questa seconda fase gli studenti discutono sui vari procedimenti di costruzione, sia su quelli corretti che su quelli errati, con il coordinamento di un esperto[19]. È significativo il fatto che gli studenti stessi sentano l'esigenza di spiegare i tentativi non corretti e il modo in cui si sono accorti dell'errore durante il lavoro di gruppo. Il fatto che l'esperto sia un soggetto esterno alla classe non è necessario: anche l'insegnante può avere questo ruolo. Il vantaggio di far condurre la discussione da una persona che non sia l'insegnante consiste principalmente nel

---

[18] Come vedremo più avanti nella discussione dei protocolli, si è rilevato talvolta qualche problema da parte dei ragazzi sull'uso della parola incognita in geometria.

[19] Anche per l'esperto vale il commento fatto per l'osservatore: è stato utilizzato nel nostro esperimento, ma non è indispensabile la sua presenza per applicare questo progetto.

creare maggiore attenzione da parte degli studenti per il lavoro che stanno facendo. Abbiamo constatato che essi sentono di essere al centro dell'attenzione non solo da parte del loro insegnante, ma anche di istituzioni alle quali danno particolare credito (nel nostro caso l'Università) e quindi partecipano in modo particolarmente attivo.

3. La seconda parte della discussione, che costituisce la terza fase ed è la più significativa, è dedicata proprio alla giustificazione della correttezza della procedura. Guidando i ragazzi a spiegare dal punto di vista matematico perché una costruzione 'funziona', l'esperto (o l'insegnante) coglie l'occasione per spiegare loro un metodo di lavoro, l'analisi, che li aiuta ad esplicitare quelle ipotesi, quegli assiomi o quei teoremi che occorrono per motivare il risultato di una costruzione geometrica. In questo modo la dimostrazione viene 'costruita' (Polya, 1971) dai ragazzi, mettendo insieme i 'pezzi' già trovati durante la costruzione geometrica della figura in Cabri. Al termine i ragazzi dovrebbero arrivare a capire che la loro costruzione 'funziona' in Cabri proprio perché è giustificata da un teorema della geometria euclidea. Un osservatore durante la discussione scrive i vari interventi.
4. Nell'ultima fase, quella della dimostrazione, gli studenti utilizzano il lavoro svolto durante le fasi precedenti e riorganizzano la procedura di costruzione pervenendo alla formulazione di un enunciato scritto in forma condizionale, dove sono esplicite le ipotesi e la tesi e dal quale partono per effettuare l'attività dimostrativa. Le dimostrazioni sono redatte a casa e quindi raccolte dall'insegnante.

BIBLIOGRAFIA

Arzarello, F. & Bartolini Bussi, M.: 1998, A national case study: Italy. In: A. Sierpinska & J. Kilpatrick, *Mathematics Education as a Research Domain: a Search for Identity,* Kluwer Academic Publishers.

Arzarello, F. & Robutti, O.: 1997, Il problema aperto in geometria con l'aiuto di un software didattico, *Nuova Secondaria*, 2.

Bartolini Bussi, M., Boni, M. & Ferri, F.: 1995, *Interazione sociale e conoscenza a scuola: la discussione matematica*, Rapporto tecnico n. 21, Modena.

Eisenhart, M. A.: 1988, The ethnographic research tradition and the mathematics education research, *Journal for research in mathematics education,* 19 (2).
Fischbein, E. & Mariotti, M.A.: 1997, Defining in classroom activities, *Educational Studies in Mathematics*, 34, 3, 219-248.
Goldenberg E. & Hazzan O.: 1995, Proving: Relationships to Contruction, Visualization and Language, Manuscript.
Kilpatrick, J.: 1987, Problem formulating: where do good problems come from?. In: Schoenfeld, *Cognitive science and mathematics education*, LEA, 123-147.
Mariotti, M.A.: 1996, Costruzioni in geometria: alcune riflessioni, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 19B, n.3, 261-287.
Polya, G.: 1957, *How to solve it: A new aspect of mathematical method*, Doubleday, New York,.
Polya, G.: 1971, *La scoperta matematica*, Feltrinelli, Milano.

3.2 Strumenti informatici nei problemi di geometria

La dimostrazione in geometria euclidea può essere collegata, oltre che con la dimostrazione in altri campi della matematica, anche con la dimostrazione nell'ambito della geometria analitica, in vista del proseguimento degli studi dal biennio al triennio. Tali collegamenti sono a nostro parere molto importanti, perché gli studenti tendono in genere a studiare a 'compartimenti stagni', anziché gestire le loro conoscenze in maniera integrata. Un discorso che faccia vedere il risvolto algebrico della geometria e quello geometrico dell'algebra sicuramente può contribuire a superare le difficoltà degli allievi in questo senso. È abitudine ormai consolidata nella scuola quella di trattare, per esempio, la risoluzione dei sistemi lineari a due incognite mostrando le relazioni che hanno con lo studio della posizione reciproca di due rette nel piano, oppure di spiegare le disequazioni di secondo grado collegandole con la parabola.

Esistono oggi in commercio software che aiutano l'insegnante a creare collegamenti tra l'algebra e la geometria: non solo i fogli elettronici, che permettono di visualizzare grafici di funzioni tabulate sul foglio di lavoro, ma soprattutto i manipolatori simbolici come per esempio Derive, Maple o Mathematica. Essi hanno la possibilità di visualizzare sullo schermo contemporaneamente equazioni, sistemi, funzioni da una parte e i grafici delle curve corrispondenti dall'altra, sì da consentire un confronto diretto tra l'ambiente grafico e quello algebrico. Il fatto didatticamente utile è la possibilità di agire su un ambiente e di osservare quali modificazioni risultano nell'altro ambiente, e viceversa (ciò è possibile in parti, modi e livelli diversi per i vari software menzionati).

I pacchetti che abbiamo scelto di utilizzare per il nostro progetto, Cabri e Maple[20], costituiscono un valido strumento per la realizzazione dei due mondi. Cabri in particolare è il software su cui abbiamo basato la parte più consistente della sperimentazione, mentre per Maple la sperimentazione non è stata altrettanto estesa.

Cabri (Baulac, Bellemain, & Laborde, 1988; Boieri, 1995; 1996) è un micromondo realizzato per consentire costruzioni di figure geometriche tramite comandi che sembrano ricalcare la geometria euclidea (almeno in parte) e di manipolare tali figure tramite la funzione di trascinamento, consentendo di modificare quanto si vuole la costruzione effettuata, mantenendone però intatti i vari passaggi che hanno portato alla costruzione e quindi le relazioni fra gli elementi della figura, mediante le quali la si è costruita. Contiene infatti:

- primitive di disegno puro (ossia i comandi per disegnare direttamente un oggetto geometrico come il punto, la retta, il segmento, la circonferenza);
- primitive geometriche (ossia i comandi per costruire, nell'ambito dell'assiomatica euclidea, oggetti derivati dai precedenti, come il punto intersezione di due curve, il punto medio di un segmento, la bisettrice di un angolo,...);
- un comando eseguibile col mouse, che consente la manipolazione del disegno 'tirando' alcuni suoi punti.

In questo modo il disegno su Cabri:

---

[20] Abbiamo scelto questi software perché ci sembrano i più adatti, oggi, ad essere utilizzati nella sperimentazione del nostro progetto sulla dimostrazione, ma vogliamo precisare che non ci sembrano fondamentali e in futuro potrebbero benissimo essere sostituiti da nuovi prodotti che presentano migliori applicazioni dal punto di vista didattico.

- assume il ruolo di rappresentante di un oggetto geometrico che possiede delle relazioni interne;
- può essere trasformato in un altro rappresentante dello stesso oggetto tramite la funzione di trascinamento;
- può essere salvato come procedura di costruzione dell'oggetto (macro-costruzione) per essere riutilizzato in un altro contesto.

Bisogna stare attenti a non pensare alla geometria del software e a quella euclidea come perfettamente coincidenti. Infatti, se nel piano due rette che non hanno punti in comune sono parallele, in Cabri potremmo avere disegnate due rette che non hanno punti in comune, ma che non sono parallele (perché si incontrano in un punto che giace fuori dello schermo del calcolatore).

In generale, occorre prestare attenzione al significato che l'oggetto ha per noi usualmente nell'ambito della geometria e per Cabri, per non incorrere in errori o bloccarsi. Per esempio, quando si disegna un segmento e si fissa l'attenzione su un suo qualunque punto distinto dagli estremi, nel mondo della geometria quel punto esiste, ma se si cerca di utilizzarlo in Cabri si vede che non è possibile, perché per il programma non esiste. Infatti un oggetto geometrico in Cabri va creato (per esempio un punto), costruito (per esempio un punto di intersezione), o segnato (per esempio un angolo): in ogni caso va dichiarata la sua esistenza. Nel caso citato precedentemente, occorre dal menu *Diversi* selezionare *Punto su un oggetto*, scegliere il punto sul segmento: esso verrà visualizzato sullo schermo ed esisterà anche per Cabri, quindi potrà essere utilizzato per altre costruzioni. Le stesse considerazioni si possono fare in altri casi, come l'intersezione tra due curve o il punto medio di un segmento, e così via. Quindi, in generale, un punto o un altro oggetto in Cabri non esiste fino a quando non è stato esplicitamente dichiarato, segnato o costruito.

Vale la pena ribadire che Cabri non è un dimostratore: per questo motivo, è necessario controllare sempre la veridicità di una congettura tramite una dimostrazione, e non fidarsi puramente di ciò che si vede disegnato sullo schermo.

Un manipolatore algebrico come Maple non solo può effettuare calcoli algebrici e tracciare grafici, ma anche dimostrare teoremi di cui siano state esplicitate tutte le ipotesi e la tesi. Maple dimostra solo quei problemi di geometria che possono essere tradotti in equazioni, senza la presenza di relazioni d'ordine[21], ossia quei problemi per cui esiste una procedura meccanica di risoluzione. Occorre esplicitare al software l'insieme delle variabili su cui operare, per il particolare algoritmo di cui Maple fa uso.

Per la dimostrazione automatica Maple è dotato di una libreria di programmi (chiamata grobner, in onore del matematico che ha studiato la teoria sulla quale è basato l'algoritmo) che è in grado di analizzare la consistenza o meno di un insieme di polinomi che costituiscono proprio le ipotesi e la tesi.

Il motore inferenziale su cui si basa Maple può essere pensato come una scatola nera. La cosa che ci interessa è che, se le ipotesi sono scritte in forma polinomiale, allora avviando il motore si hanno due possibili risultati:

- *[1]* a significare che la proprietà congetturata è un teorema,
- un nuovo polinomio che rappresenta 'cosa manca' alle ipotesi perché la tesi consegua logicamente da esse, nel caso in cui la proprietà non valga. Poiché questa risposta è scritta in linguaggio algebrico, occorre che sia tradotta e interpretata in linguaggio geometrico, per darle un significato in tal senso.

Lo strumento Maple si presenta allora sia come verificatore di teoremi, che come supporto per esplorare una situazione geometrica e scoprire proprietà non previste.

Uno degli obiettivi dell'uso di questo software è l'apprendimento del significato e dell'uso corretto dei concetti di 'variabile' e 'parametro', che hanno un ruolo fondamentale in matematica. Tale ruolo può essere evidenziato con le applicazioni sia in Cabri che in Maple.

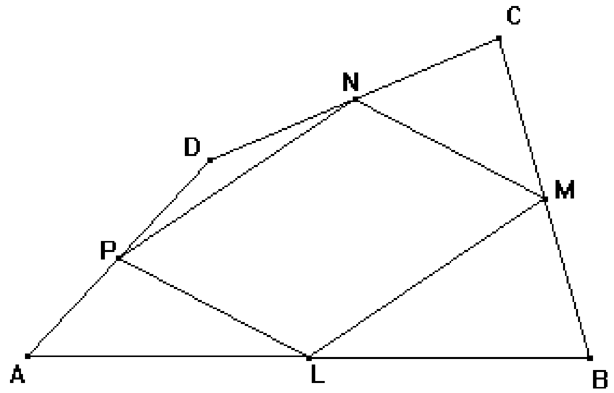
Il discorso delle variabili fa parte quindi di un argomento di più ampia portata, che coinvolge anche il lavoro in Cabri e che è opportuno fare agli studenti prima che risolvano le proposte di lavoro.

Lo affrontiamo attraverso la risoluzione di un problema che offre molti spunti di discussione, per la ricchezza di esplorazione che consente e per la sua presenza costante in letteratura. Si tratta del

---

[21] Facciamo notare che un problema geometrico che sia traducibile in equazioni algebriche e in cui non intervengano relazioni d'ordine è risolubile in maniera automatica.

‘problema di Varignon’, che chiede di dimostrare, in un quadrilatero qualsiasi, che i punti medi dei suoi lati individuano sempre un parallelogramma. Ne abbiamo modificato il testo per farlo diventare un problema di esplorazione, perché in tal modo la situazione si presenta molto ricca di risultati[22].



PROBLEMA DI VARIGNON
Situazione
Sia dato un quadrilatero ABCD e siano L, M, N e P rispettivamente i punti medi dei lati AB, BC, CD, DA.
Proposta di lavoro
1. Quali proprietà ha il quadrilatero LMNP?
2. Quali configurazioni particolari assume il quadrilatero LMNP?
3. Quali ipotesi sul quadrilatero ABCD occorre fare affinché LMNP assuma tali configurazioni particolari?

[22] In un’altra sua versione, il problema è già comparso anche nella prova scritta di maturità scientifica tradizionale e sperimentale.

Dall'analisi del testo, ci si rende conto che i punti A, B, C e D sono punti iniziali, dalla cui posizione dipende quella dei punti medi dei lati.

Facendo la costruzione in Cabri[23], con i comandi descritti di seguito, si ottiene la configurazione richiesta dal problema.

1. *Creazione*
   Punto (A)
2. *Creazione*
   Punto (B)
3. *Creazione*
   Punto (C)
4. *Creazione*
   Punto (D)
5. *Creazione*
   Segmento (AB)
6. *Creazione*
   Segmento (BC)
7. *Creazione*
   Segmento (CD)
8. *Creazione*
   Segmento (DA)
9. *Costruzione*
   Punto medio (L)
10. *Costruzione*
    Punto medio (M)
11. *Costruzione*
    Punto medio (N)
12. *Costruzione*
    Punto medio (P)
13. *Edizione*
    Nomi (A, B,C,D,L,M,N,P)
14. *Creazione*
    Segmento (LM)
15. *Creazione*
    Segmento (MN)

---

[23] Si tratta della costruzione di base, senza tutte le modifiche, misure, ecc. che è possibile fare.

16.Creazione
Segmento (NP)
17.Creazione
Segmento (PL)

Iniziando la fase esplorativa in Cabri, ci si rende conto che alcuni punti sono trascinabili, mentre altri no.

Un punto come A può essere liberamente mosso sullo schermo, perché è stato disegnato dal menu Creazione: si tratta di un punto con due gradi di libertà (perché l'ambiente in cui si muove è il piano). Chiameremo parametri i punti di questo tipo, perché possono essere fissati arbitrariamente.

Un punto come L non può essere spostato sullo schermo, perché è stato disegnato come punto medio dal menu Costruzione: si tratta di un punto non libero, infatti diciamo che ha zero gradi di libertà. Chiameremo variabili i punti di questo tipo, perché la loro posizione dipende da quella dei parametri[24]. Infatti, a costruzione ultimata, se si muove uno dei vertici del quadrilatero, si osserva che i punti medi si

---

[24] Ci è stato fatto notare che sarebbe più appropriato utilizzare il termine 'variabile indipendente' in luogo di 'parametro' e 'variabile dipendente' in luogo di 'variabile', in quanto si tratta di una terminologia più vicina a quella della pratica didattica. Abbiamo utilizzato il termine parametro per chiarire il significato di un concetto che comporta grosse difficoltà per gli studenti. Dal nostro punto di vista è opportuno utilizzare, quando esistono, opportuni ostensivi per chiarire concetti che comportano difficoltà. In Cabri, per esempio, la manina che compare quando avvicino il mouse ai punti liberi ci sembra un potente ostensivo per il concetto di parametro. In effetti, nel momento in cui si osserva la variazione di un punto che dipende da altri punti liberi (es. il punto medio di un segmento) quelli che abbiamo chiamato parametri diventano nell'usuale accezione scolastica variabili indipendenti, in virtù della relazione funzionale che stiamo osservando. È proprio il modo in cui si osserva la figura che sembra suggerire una diversa terminologia degli oggetti. Non è forse quello che accade anche in algebra? Per esempio, osservando l'espressione $y=mx$, l'interpretazione usuale nel piano è quella di famiglia di rette, con m parametro. Ma se la stessa espressione è riscritta come $y-mx=0$ al di fuori di contesti già codificati, y, m, x possono essere interpretate come variabili allo stesso livello.
È proprio il modo in cui si guardano gli oggetti sia in Cabri, sia in algebra, che suggerisce una differente interpretazione degli oggetti stessi.

muovono di conseguenza, mantenendo intatta la proprietà di essere punti medi dei lati.

Ci sono punti che, pur essendo vincolati a un oggetto (retta, segmento, circonferenza), possono essere trascinati in Cabri: il loro movimento non è completamente libero, ma limitato all'oggetto a cui appartengono. Se un punto di questo tipo appartiene per esempio a una circonferenza, potrà essere mosso solo sulla circonferenza e non su tutto il piano: tale punto possiede perciò un solo grado di libertà e può essere chiamato semilibero (Vivier, 1995). Il ruolo che gioca nei problemi è analogo a quello dei parametri: può essere spostato[25], e dal suo movimento cambia la posizione delle variabili. Per esplorare il problema in Cabri, dunque, occorre agire sui parametri, trascinandoli (uno alla volta) in modo che, cambiando la forma della figura geometrica, si possano scoprire proprietà o oggetti che non variano.

Un altro elemento che possiamo costruire in Cabri è la costante. Se costruiamo un segmento AB, e poi lo trasliamo nel semento CD, secondo le osservazioni fatte i punti A e B hanno il ruolo di parametri, mentre i punti C e D hanno quello di variabili. Ora, muovendo AB potremo osservare i corrispondenti movimenti di CD. Ma se nascondiamo AB (*Aspetto degli oggetti - Gomma)*, il segmento CD non può più essere manipolato, perché manca l'oggetto da cui dipende. Abbiamo costruito una costante.

Dal punto di vista algebrico, c'è corrispondenza tra i gradi di libertà e le coordinate dei punti. Nel piano un punto è individuato da due coordinate (se fosse nello spazio, sarebbero tre, se fosse per esempio su una retta, sarebbe una), quindi è legato a due numeri che possono variare liberamente, oppure in funzione di altri (le coordinate di altri punti). Se il punto è libero, come A, ossia è un parametro, allora le sue coordinate variano entrambe liberamente. Se il punto non può essere spostato sullo schermo, ossia è una variabile, come L, allora le sue coordinate dipendono entrambe dalle coordinate dei parametri. Se un punto è semilibero, allora una delle sue coordinate è libera, mentre l'altra non lo è, nel senso che una coordinata può essere scelta ad arbitrio, mentre l'altra varia in modo che entrambe soddisfino l'equazione della curva cui il punto

[25] Se non viene spostato, il suo ruolo è analogo a quello delle variabili.

appartiene, come per esempio (in Cabri) una circonferenza oppure una retta, ossia una varietà algebrica di dimensione uno.

Nel problema in questione, se si inizia l'esplorazione dalla prima domanda, muovendo i vertici del quadrilatero di partenza si vede che il quadrilatero di arrivo mantiene i lati opposti paralleli. Oppure, utilizzando la misura, si nota che i lati opposti hanno uguale lunghezza[26], così si perviene alla congettura che si tratti di un parallelogramma. È ovvio che Cabri non offre la certezza di tali proprietà, perché non è un dimostratore di teoremi, dà però la possibilità di provare che una congettura funziona in un gran numero di casi. Per quanto riguarda il parallelismo, è sufficiente costruire da un vertice (L per esempio) la retta parallela al lato opposto: trascinando la figura si vede che tale retta si mantiene sovrapposta al lato.

La seconda domanda chiede di indagare sulla forma e sulle proprietà che può avere il quadrilatero interno, che ormai si è visto (non dimostrato) essere un parallelogramma: trascinando i vertici del quadrilatero esterno si osserva che quello interno può diventare un rombo, un rettangolo, oppure un quadrato. Si tratta di investigare su come il movimento dei parametri agisce sulle variabili.

Con la terza domanda si chiede di formulare congetture sulla relazione tra le forme particolari dei due quadrilateri: l'indagine è sulle ipotesi sapendo qual è la tesi, ossia, per esempio, quali devono essere le ipotesi su ABCD affinché LMNP sia un rettangolo. La funzione di trascinamento in Cabri aiuta anche in questo caso, infatti offre la possibilità di muovere i vertici di ABCD per ottenere il rettangolo LMNP: a questo punto intuire quale proprietà caratterizza ABCD non è facile, ma lo sarebbe ancora meno senza Cabri o con un altro software non altrettanto efficace (Laborde & Laborde, 1992). Può capitare che gli studenti decidano di muovere lentamente un vertice di ABCD facendo in modo che LMNP si mantenga un rettangolo: inizialmente non sono consapevoli della linea che stanno percorrendo (luogo muto), ma possono diventarlo a poco a poco, notando che, se si muove un vertice lungo una direzione privilegiata, la proprietà si mantiene, mentre lungo altre direzioni ciò non succede.

---

[26] A meno di errori di approssimazione.

Per esempio, una studentessa durante la risoluzione del problema, dopo aver mosso a caso per un po', si accorse che, trascinando un vertice lungo una retta particolare, il parallelogramma LMNP si manteneva rettangolo. Da questa osservazione, ipotizzò che tale retta privilegiata fosse la bisettrice dell'angolo di ABCD, poi provò a costruire la bisettrice e vide che tale congettura non poteva valere. Le venne in mente di tracciare la diagonale di ABCD, e si accorse che muovendosi lungo questa linea la proprietà di rettangolo si manteneva. Tracciando entrambe le diagonali di ABCD, giunse all'idea che servissero per formulare le ipotesi cercate. All'interno del gruppo si arrivò dunque alla congettura corretta: "Se ABCD ha le diagonali perpendicolari, allora LMNP è un rettangolo", verificandola con il trascinamento. In modo analogo venne scoperta l'altra congettura: "Se ABCD ha le diagonali uguali, allora LMNP è un rombo". In molti gruppi, però, Cabri non è stato sufficiente a scoprire queste proprietà, ed è proprio il lavoro integrato tra il micromondo di geometria e il manipolatore simbolico che ha offerto agli studenti una ricchezza di stimoli di gran lunga superiore all'ambiente carta e matita.

Per fare la dimostrazione in Maple, oltre che richiamare il pacchetto di programmi *grobner,* che consente di attivare la procedura di dimostrazione automatica, occorre scrivere le ipotesi e le tesi, utilizzando i comandi descritti di seguito (sostanzialmente, cioè, utilizzando la geometria delle coordinate).

```
> with(grobner);
# IPOTESI: L, M, N, P punti medi rispettivamente dei lati AB, BC, CD e DA
> h1:=xL-(xA+xB)/2;
> h2:=yL-(yA+yB)/2;
> h3:=xM-(xB+xC)/2;
> h4:=yM-(yB+yC)/2;
> h5:=xN-(xC+xD)/2;
> h6:=yN-(yC+yD)/2;
> h7:=xP-(xD+xA)/2;
> h8:=yP-(yD+yA)/2;
# TESI 1: dimostriamo che il quadrilatero LMNP è un parallelogramma; per fare ciò dobbiamo verificare che i lati opposti
```

sono paralleli a due a due, quindi LM // NP e PL // MN, usando i coefficienti angolari
> t1:=(yM-yL)(xP-xN)-(xM-xL)*(yP-yN);*
> t2:=(yL-yP)(xN-xM)-(xL-xP)*(yN-yM);*

Anche in Maple è importante esplicitare con gli studenti il discorso sui parametri e sulle variabili, perché in questo ambiente è regolato dalla sintassi del software. Essendo già stato affrontato in Cabri, diventa un filo conduttore importante per la comprensione dell'algoritmo da costruire. I parametri in Maple non vanno indicati, mentre le variabili vanno elencate in un insieme, che chiamiamo *Var*, costituito dalle due coordinate di ogni punto che ha zero gradi di libertà e da una delle due coordinate di ogni punto con un solo grado di libertà. All'interno di un problema l'insieme delle variabili può rimanere immutato oppure può cambiare con il variare delle domande, se cambiano le ipotesi utilizzate per la dimostrazione.

I comandi corrispondenti sono elencati di seguito, con i commenti.

 # Definiamo l'insieme Var delle variabili, che è costituito dai punti medi dei lati di ABCD:
> Var:=[xL,xM,xN,xP,yL,yM,yN,yP,p];
*> Dim:=[h1,h2,h3,h4,h5,h6,h7,h8,1-p*t1];*
> gbasis(Dim,Var,tdeg);
*>Dim2:=[h1,h2,h3,h4,h5,h6,h7,h8,1-p*t2];*
>gbasis(Dim2,Var,tdeg);

Fin qui Maple ha dato la possibilità di dimostrare in modo automatico ciò che in Cabri poteva solo essere verificato graficamente, ossia che il quadrilatero interno è un parallelogramma: con il risultato *[1]* il software conferma la congettura fatta in ambiente di geometria dinamica. La risposta alla prima domanda del problema è corredata di una dimostrazione, anche se 'a conoscenza zero'. Per le domande successive l'aiuto di Maple si fa più consistente, e si avvicina al tipo di aiuto di Cabri: infatti, offre un feedback all'utente proprio quando la risposta non è più *[1]*, ossia quando le ipotesi non sono sufficienti a confermare una determinata tesi. Seguendo i passi dell'algoritmo riportato qui di seguito, si capisce quale può essere la portata di tale feedback.

```
# CONGETTURA 1: mi chiedo se, con le sole ipotesi di partenza, LMNP può essere un rombo. Dal momento che un rombo è un parallelogramma con le diagonali perpendicolari, impongo che MP sia perpendicolare a LN.
> t4:=(yP-yM)*(yN-yL)+(xP-xM)*(xN-xL);
> Dim3:=[h1,h2,h3,h4,h5,h6,h7,h8,1-p*t4];
> gbasis(Dim3,Var,tdeg);
# Osserviamo che, in generale, LMNP non è un rombo. Ci viene suggerito un polinomio. Con l'ausilio di Cabri, congetturiamo che tale polinomio esprima la congruenza dei segmenti AC e BD, quindi diciamo che ABCD deve essere un quadrilatero con le diagonali congruenti. Verifichiamolo. Chiamo h9 l'ipotesi di congruenza delle diagonali AC e BD.
> h9:=(xA-xC)^2+(yA-yC)^2-(xB-xD)^2-(yB-yD)^2;
> simplify(h9);
# Osserviamo che h9 coincide con il polinomio suggerito dal computer.
> Dim4:=[h1,h2,h3,h4,h5,h6,h7,h8,h9,1-p*t4];
> gbasis(Dim4,Var,tdeg);
# CONGETTURA 2: mi chiedo se, con le sole ipotesi di partenza, LMNP può essere un rettangolo. Dal momento che un rettangolo è un parallelogramma con le diagonali congruenti,  pongo MP = LN.
> t5:=(xP-xM)^2+(yP-yM)^2-(xN-xL)^2-(yN-yL)^2;
> Dim5:=[h1,h2,h3,h4,h5,h6,h7,h8,1-p*t5];
> gbasis(Dim5,Var,tdeg);
# Anche in questo caso ci viene suggerito un polinomio che, aggiunto a quelli di partenza, rende vera la nostra tesi. La congettura che facciamo, sempre avvalendoci di Cabri, è di imporre la perpendicolarità delle diagonali del quadrilatero di partenza, quindi AC ortogonale a BD. Indico con h10 il nuovo polinomio.
> h10:=(yA-yC)*(yB-yD)+(xA-xC)*(xB-xD);
> expand(h10);
# Osserviamo che h10 è proprio il polinomio suggerito.
> Dim6:=[h1,h2,h3,h4,h5,h6,h7,h8,h10,1-p*t5];
> gbasis(Dim6,Var,tdeg);
```

 # CONGETTURA 3: infine mi chiedo se LMNP può essere un quadrato. Poichè un quadrato è un parallelogramma con le diagonali congruenti e perpendicolari, dalle due congetture precedenti deduco che, affinché LMNP sia un quadrato, ABCD deve essere un quadrilatero con le diagonali congruenti e perpendicolari.

```
> Dim7:=[h1,h2,h3,h4,h5,h6,h7,h8,h9,h10,1-p*t3,1-q*t4];
> Var2:=[xL,xM,xN,xP,yL,yM,yN,yP,p,q];
> gbasis(Dim7,Var2,tdeg);
```

La decodificazione della risposta algebrica (polinomiale) di Maple può essere effettuata a mente, o con l'aiuto di carta e matita, o con l'aiuto di Cabri per la sua interpretazione geometrica, o con l'aiuto di Maple stesso, tramite i comandi di fattorizzazione, semplificazione, ecc. La cosa utile dal punto di vista didattico è il continuo passaggio dal quadro geometrico a quello algebrico, con le analogie di risultati e le diversità di linguaggi, che si sostengono a vicenda.

Abbiamo riscontrato, provando la risoluzione di un gran numero di esercizi, che l'implementazione su Maple dell'algoritmo crea a volte qualche problema, a seconda di come viene scelto l'insieme delle variabili, nel senso che la risposta del software può essere *[1]* anche quando la dimostrazione non esiste, o viceversa[27]. Questo fattore di aleatorietà, che si presenta in certi problemi, può non essere controllabile dagli studenti, pertanto sarebbe opportuno testare problemi e risoluzioni prima di presentarli in classe. Il problema di Varignon funziona, e come lui anche molti altri problemi, come per esempio i seguenti:

Situazione
Dato un triangolo ABC, siano L, M e N i punti medi rispettivamente dei lati AB, BC e CA. Unire tali punti, ottenendo il triangolo LMN.
Proposta di lavoro
Dire sotto quali ipotesi su ABC il triangolo LMN è rettangolo, isoscele, rettangolo-isoscele, equilatero.

[27] Ciò dipende da alcune rigidità del pacchetto grobner, in particolare dalla persistenza della rappresentazione finale dei polinomi utilizzati all'interno del kernel matematico, che inibisce altri calcoli, senza riazzerare tutte le memorie.

Situazione Sia dato un quadrilatero ABCD. Sia M il punto medio del lato BC. Sulla retta AM si fissi il punto E (diverso da A) tale che EM=AM. Proposta di lavoro 1. Studiare la natura del quadrilatero ABEC. 2. Studiare come varia ABEC al variare di ABCD, in particolare quando ABCD è un parallelogramma o un trapezio. 3. Quale proprietà individuate sui punti D, E, C?
Situazione Sia dato un generico quadrilatero ABOC avente due lati consecutivi congruenti (per esempio siano OB=OC); fissare sui segmenti AB, AC, AO i punti medi e chiamarli rispettivamente M, N, P. Proposta di lavoro 1. Cosa possiamo dire dei segmenti MP e NP ? Cosa succede al variare di ABOC ? 2. Come sopra, con ABOC inscritto in una circonferenza. 3. Come sopra, con A,B,C, appartenenti ad una circonferenza di centro O.

BIBLIOGRAFIA

Arzarello, F. & Robutti, O.: 1998, Risoluzione di problemi aperti di geometria con l'uso di Cabri-géomètre e Maple, *Nuova Secondaria*, 10.

Baulac, Y., Bellemain, F., Laborde, J.M.: 1988, *Cabri-Géomètre, un logiciel d'aide à l'apprentissage de la géomètrie. Logiciel et manuel d'utilisation,* Cedic-Nathan, Paris, (trad. it.: Boieri, P.: 1993, *Cabri-Géomètre*, Manuale dell'utente, Loescher, Torino).

Boieri, P. (a cura di): 1996, *Fare geometria con Cabri*, Centro ricerche didattiche Ugo Morin, Giovanni Battagin Editore.

Boieri, P.: 1995, Le trasformazioni geometriche al calcolatore, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol 18A-18B, n.6.*CABRIRRSAE*, a cura dell'IRRSAE Emilia Romagna.

Heal, K. M., Hansen, M. L. & Rickard, K. M.: 1996 *Maple V. Learning Guide*, Springer.

Laborde, C. & Laborde, J.M.: 1992, Problem Solving in Geometry: From Microworlds to Intelligent Computer Environments. In: *Mathematical Problem Solving and New Information Technologies. Research in Contexts of Practice*, NATO ASI Series, Series F, 89.

Vivier, G.: 1995, I quadrilateri e i loro gradi di libertà, *CABRIRRSAE*, 6 (trad. it. A.M. Arpinati).

3.3 Analisi di protocolli

Presentiamo qui di seguito l'analisi di un protocollo di problema di esplorazione. Le parole degli studenti e dell'osservatore compaiono in corsivo, le descrizioni e i commenti in tondo.

POLIGONI CIRCOSCRIVIBILI Situazione Sia data una circonferenza di centro O. Proposta di lavoro 1. Costruisci un quadrilatero qualunque circoscritto alla circonferenza e chiama i suoi vertici A, B, C, D. 2. Fai una macro-costruzione che ti permetta di ottenere un quadrilatero circoscritto a una circonferenza a partire da un numero minimo di oggetti iniziali. 3. Facendo variare il quadrilatero ABCD, quali quadrilateri particolari puoi ottenere? 4. Puoi trovare una caratteristica comune a tutti i quadrilateri ottenuti? Riesci a trovare un criterio per decidere se un quadrilatero è circoscrittibile ad una circonferenza? (Prova a osservare come variano i lati del quadrilatero). • Leggi attentamente il testo del problema. • Esplora la situazione in Cabri, usando i colori verde e rosso per gli oggetti che corrispondono alle informazioni e agli obiettivi del problema.

GRUPPO R – STUDENTI: FILIPPO, DANIELE
Fase 1.
Disegnano la circonferenza, piazzano i punti sulla circonferenza e cercano di creare la retta per un punto (quello sulla circonferenza) con il comando Retta.
FILIPPO- *Se è tangente vuol dire che ha in comune un punto con la circonferenza. Traccio la retta per questo punto.*
DANIELE- *Perché non viene?*

FILIPPO- *Riproviamo.*
DANIELE- *Devi schiacciare due volte.*
FILIPPO- *No, devo tirare nella direzione della tangente.*
DANIELE- *Guarda che per disegnare la Retta devi avere due punti.*
Dopo molti tentativi capiscono che c'è qualcosa che non va, perché esce sempre lo stesso messaggio: non puoi creare la retta perché non hai spostato il mouse. Schiacciando e spostando il mouse riescono finalmente a disegnare una retta con il comando Retta, che risulti apparentemente tangente alla circonferenza.
FILIPPO- *In quest'altro modo ci riusciamo: la facciamo tangente.*
Provano a trascinare e si accorgono che la tangenza non rimane.
FILIPPO- *Però io ho fatto la retta su quel punto!*
Cancellano tutto perché non resiste al test del trascinamento. Ricominciano: tracciano la circonferenza, poi il centro della circonferenza.
OSSERVATORE[28]- *Che proprietà si può usare?*
DANIELE- *Quella del poligono circoscritto, i cui lati sono tangenti alla circonferenza. Se i lati sono tangenti, sono perpendicolari al raggio*.
OSSERVATORE- *Certo, allora provate in questo modo. Dovete pensare a una proprietà quando fate costruzioni in Cabri.*
Conducono correttamente ragionamenti con carta e matita, poi provano ad applicarli sul foglio di Cabri.
FILIPPO- *Cominciamo dalla retta.*
In Cabri tracciano una retta, poi una circonferenza che intersechi la retta, in modo che la retta passi (a occhio) per il centro, tracciano la perpendicolare alla retta in un punto di intersezione con la circonferenza: tale retta risulta tangente alla circonferenza.
DANIELE- *Adesso abbiamo sfruttato la perpendicolarità tra raggio e tangente.*

[28] Come già detto nel paragrafo 3.1, questa è una delle classi in cui l'azione dell'osservatore è invadente.

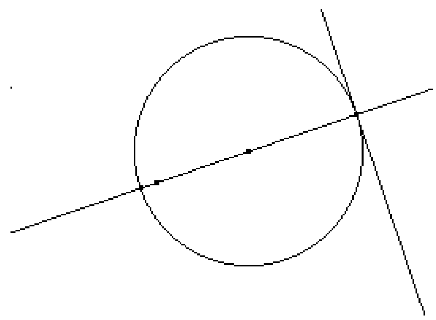


Figura 1

FILIPPO- *Prova a trascinare.*
La costruzione è sbagliata: non resiste al trascinamento. Cancellano.

Commento

Questa lunga fase iniziale che conduce a diverse costruzioni errate è frustrante per i ragazzi, che non si rendono conto di dover integrare le regole di Cabri con le loro conoscenze geometriche, e ragionano come se stessero disegnando con carta e matita. Sembra che all'inizio lavorino senza controllo, semplicemente nel campo del disegno.

Attraverso i tentativi e gli errori i ragazzi acquisiscono lentamente coscienza del fatto che non il disegno è importante, ma la figura[29], ovvero una procedura algoritmica che sfrutta opportunamente le relazioni geometriche in gioco fra le sue componenti e che produce un oggetto geometrico e non soltanto uno schizzo sullo schermo. Il processo è abbastanza lungo, i ragazzi passano attraverso varie attività in cui devono continuamente rivedere le loro idee di partenza alla luce del feedback offerto da Cabri. Vediamone una a titolo di esempio: quando riescono a disegnare una retta sullo schermo in modo che sia 'appiccicata' alla circonferenza, tirano un sospiro di sollievo, perché sono convinti di aver eseguito il compito. L'approccio con la tangente disegnata a occhio è di tipo figurale, subito dopo, però, scatta un controllo tipico di Cabri: provando a trascinare l'oggetto costruito, vedono che la retta si allontana dalla

[29] Cfr. nota sul figurale e concettuale del paragrafo 3.1.

circonferenza e non risulta più tangente ad essa. La validazione mediante il trascinamento fa rimanere male i ragazzi, che non sono al loro primo tentativo, e si accorgono che il riferimento da loro scelto (la circonferenza e la retta sono tangenti = si incontrano in un punto) non è riconosciuto dal software. (*Però io ho fatto la retta su quel punto!).*
Si vede in questo (e negli altri casi) che è fondamentale l'uso del test del trascinamento per validare la costruzione. Cabri in questo caso agisce veramente da mediatore fra disegno e teoria: vuol dire che i ragazzi sono entrati nella logica di Cabri e possono utilizzarlo come mediatore tra disegno e teoria. Infatti, per capire perché l'oggetto non supera il test del trascinamento, occorre elaborare delle ipotesi, con riferimento a una teoria (implicita o localmente esplicitata).
L'intervento dell'osservatore sblocca la situazione di stallo che si crea, perché fa riflettere i ragazzi sul dominio di conoscenze (che peraltro possiedono) relativo alla tangenza di retta e circonferenza. Esso induce una abduzione: gli studenti comprendono che il caso del poligono circoscritto alla circonferenza fa parte della regola della retta tangente a una circonferenza: la perpendicolarità di retta e raggio. Cercano di applicarla, ma si limitano a spostare la circonferenza in modo da vedere a occhio che il suo centro appartenga alla retta: questo non regge di nuovo al test del trascinamento.
Possiamo notare un fatto significativo: l'uso del software non ha inibito il 'ragionamento libero' coadiuvato dal disegno con carta e matita, anzi lo affianca. (Conducono correttamente dei ragionamenti con carta e matita, poi provano ad applicarli sul foglio di Cabri).
Sembra che i ragazzi, per sentirsi maggiormente sicuri, abbiano bisogno a un certo punto di usare lo strumento tradizionale e successivamente di trasferirsi nell'ambiente informatico. Essi non stanno lavorando per far piacere all'insegnante, ma per risolvere un problema: nessuno infatti ha suggerito loro di usare carta e matita. Questo fatto conferma che il coinvolgimento degli studenti nell'attività è reale e che si osservano comportamenti concettuali e non pseudoconcettuali (Vinner, 1997). Inoltre, può essere che ricorrano alla carta e matita perché Cabri è un software che non consente di fare schizzi, che sono fondamentali per favorire una dinamicità attiva di pensiero.

Per questi studenti che non hanno troppa familiarità con lo studio della geometria, le costruzioni e Cabri, il ruolo del software è stato fondamentale per farli riflettere sulle proprietà geometriche (tangente in un punto a una circonferenza, …) e sulle primitive del software stesso, legate agli assiomi della geometria (retta per due punti, perpendicolarità, intersezione,...).
Fase 2.
OSSERVATORE- *Partite da un punto sulla circonferenza e poi usate la proprietà*.
FILIPPO- *Traccia il raggio.*
DANIELE- *Adesso disegno la retta perpendicolare al raggio passante per il punto sulla circonferenza.*
FILIPPO- *Prova con il trascinamento*.
Provano più volte e con diverse modalità.
DANIELE- *Funziona!*
Completano la costruzione disegnando gli altri lati del quadrilatero con la stessa modalità. Mettono i nomi, nascondono le rette dopo aver disegnato i segmenti.
Cercano di costruire la macro.
DANIELE- *Cos'è che serve? Gli oggetti iniziali. Dobbiamo mettere la circonferenza e i punti.*
Stanno una mezz'ora sulla macro, che non funziona perché sbagliano gli oggetti iniziali. Poi costruiscono una macro corretta, ma non riescono ad applicarla perché non seguono lo stesso ordine di costruzione. L'osservatore interviene per dire loro che la macro era corretta ma che dovevano stare attenti all'ordine degli oggetti utilizzati. Cancellano tutto e ricominciano da capo. Rifanno la costruzione corretta. Rifanno la macro corretta. Provano ad applicare la macro e ci riescono.

Commento.

In questa fase gli studenti, ricevuto il suggerimento iniziale, procedono speditamente nella costruzione. Essendosi impadroniti della modalità di trascinamento, controllano più volte per sicurezza la costruzione del quadrilatero circoscritto usando il test del trascinamento. Quindi, dopo aver fatto la macro corretta ma senza controllo dell'ordine e del tipo degli oggetti usati, si trovano in difficoltà nell'applicarla. Nella loro agitazione cancellano e

ricominciano, convinti di aver sbagliato tutto. L'intervento dell'osservatore li rassicura.
Ricominciano da capo con attenzione all'ordine delle operazioni fino alla costruzione della macro, successivamente provano la correttezza della costruzione e della macro. Solo dopo questa attività si sentono sicuri e possono iniziare la fase esplorativa vera e propria.

Fase 3.
Con la figura corretta cominciano a esplorare la situazione e a vedere quali quadrilateri particolari si formano.
FILIPPO- *Ora vediamo che quadrilateri vengono. Il quadrato sì.*
Tirano la figura finché diventa un quadrato, lo verificano con la misura di lati e angoli. Esplorano i vari tipi di quadrilatero.
DANIELE- *Prova il rettangolo.*
FILIPPO- *No, non funziona, non può essere. E il parallelogramma?*
DANIELE- *Proviamo.*
FILIPPO- *Ecco un parallelogramma.*
DANIELE- *Siamo sicuri? Giralo. Guarda che è un rombo, ha i lati uguali.*
FILIPPO- *Proviamo il trapezio. Il trapezio sì. Adesso provo a tirare.....rettangolo, isoscele, scaleno. Tutti i trapezi vanno bene.*

Commento.
Questa fase è caratterizzata da maggiore sicurezza e velocità di azione e di pensiero rispetto alle precedenti. Gli studenti si fidano del loro intuito e si limitano a controllare le loro congetture con la misura. Non effettuano costruzioni per controllarle con strumenti geometrici. In alcuni casi si assiste a una anticipazione di pensiero, poi verificata o contraddetta con la modalità di trascinamento. (*Il quadrato sì).* Ciò è possibile perché gli studenti utilizzano le conoscenze possedute (sui quadrilateri) sia per congetturare che per testare le congetture.

Gli oggetti manipolabili sono i punti di tangenza dei lati del quadrilatero con la circonferenza, non i vertici, per via della costruzione eseguita. Si sarebbe potuto utilizzare un'altra costruzione per avere come parametri due vertici opposti, ma sarebbe stata più difficile. Tutti gli studenti hanno utilizzato la costruzione qui descritta.

A un certo punto selezionano la congettura che si tratti di un parallelogramma, rimanendo a un livello superficiale di analisi della figura. È tipico[30] che gli studenti non riconoscano un rombo se disegnato con orientamento diverso da quello che sono abituati a vedere solitamente (cioè con le diagonali una orizzontale e l'altra verticale). (*Ecco un parallelogramma).*

L'interazione con il software qui è molto utile, perché esso consente di misurare immediatamente le lunghezze dei lati e di abbandonare la congettura precedente a favore di quella nuova (*Siamo sicuri? Giralo. Guarda che è un rombo, ha i lati uguali).*

Se nelle fasi precedenti era il test del trascinamento a dominare nell'attività degli allievi, ora è il trascinamento legato ad avere il posto principale, perché si tratta di una ricerca alla cieca, in cui i quadrilateri sono modificati con il trascinamento dei punti di tangenza con la circonferenza. Quando gli studenti vogliono ottenere un tipo particolare di quadrilatero, allora è il trascinamento guidato la modalità di trascinamento che utilizzano. (Tirano la figura finché diventa un quadrato. Esplorano i vari tipi di quadrilatero).

Durante questa fase si assiste ad un passaggio continuo da un controllo di tipo ascendente *(Ora vediamo che quadrilateri vengono)* con selezione di congettura, ad uno di tipo discendente *(Proviamo)*, ed è questo alternarsi di modalità che rende produttiva l'intera fase euristica.

Fase 4.

Al momento di affrontare il punto 4) della proposta di lavoro ci sono incertezze su che cosa si debba intendere per 'proprietà comune'.

FILIPPO- *Possiamo dire che i lati sono perpendicolari ai raggi?*

DANIELE- *Però l'abbiamo già detto.*

OSSERVATORE- *Bisogna cercare una proprietà diversa da quella usata per la costruzione.*

FILIPPO- *Proviamo a misurare in un caso particolare*.

DANIELE- *Disegna un quadrato.*

---

[30] Abbiamo osservato situazioni di questo genere a tutti i livelli scolari, indipendentemente dal lavoro in Cabri.

Partono da un quadrato, con i lati uguali e poi provano a modificare questa situazione tirando uno dei punti di tangenza.
FILIPPO- *Aumenta uno e l'altro diminuisce nella stessa misura*.
OSSERVATORE- *Come si può dire in matematica?*
DANIELE- *Quando uno aumenta e l'altro diminuisce sono inversamente proporzionali*.
OSSERVATORE- *Non è proprio così. Proporzionalità inversa significa che il prodotto di due variabili si mantiene costante. Qui è così?*
Provano a fare dei conti in alcune situazioni.
FILIPPO- *No, il prodotto non si mantiene costante.*
DANIELE- *Guardiamo la somma*.
FILIPPO- *È la somma che si mantiene costante*.
DANIELE- *Allora la somma dei due lati opposti è uguale.*
Scrivono i risultati sulla scheda.
FILIPPO- *Scriviamo la congettura*.
DANIELE- *Se un quadrilatero è circoscritto ad una circonferenza, la somma dei lati opposti è uguale.*

Commento

Dopo la breve battuta d'arresto iniziale, dovuta soprattutto alla mancanza di abitudine ad esplorare situazioni nuove, il gruppo riprende l'attività muovendosi piuttosto velocemente sullo schermo con il mouse. Per avere a disposizione una situazione più facile, sceglie di lavorare in un caso particolare: il quadrato. L'uso del trascinamento legato è preponderante: gli studenti muovendo un punto di tangenza (sulla circonferenza, perché è un punto vincolato) si accorgono, avendo segnato le misure dei quattro lati, che la lunghezza di un lato non cambia. Effettuano nell'ordine le seguenti osservazioni, applicando, presumibilmente, un ragionamento trasformazionale (Simon, 1996):

- se diminuisce il lato opposto a quello fisso, allora diminuisce anche la somma dei due lati
- gli altri due lati variano in modo che se uno aumenta l'altro diminuisce *(Aumenta uno e l'altro diminuisce nella stessa misura)*
- le somme delle lunghezze delle coppie di lati opposti sono uguali *(Guardiamo la somma. È la somma che si mantiene costante).*

Allora la somma ... indica la selezione della congettura, che viene scritta in forma di concatenazione logica: *Se un quadrilatero è circoscritto ad una circonferenza, la somma dei lati opposti è uguale.*

Il controllo diventa discendente non appena è terminata questa fase esplorativa. Si provano molti casi per vedere se l'idea funziona. Gli studenti, dopo essere passati alla formulazione della congettura, non sentono immediatamente la necessità di dimostrarla.

Nella discussione che segue questo lavoro di gruppo uno studente fa un'abduzione, quando riconosce di essere nel caso di rette tangenti da un punto esterno a una circonferenza (non era immediato accorgersene perché la costruzione è stata fatta al contrario, a partire dai punti sulla circonferenza). Allora dice che si può applicare la proprietà che i segmenti di tangenza sono uguali. Ma non va oltre, non riesce a utilizzare questa proprietà per la congettura o la dimostrazione dell'uguaglianza della somma dei lati opposti. È possibile che lo studente non riesca a collegare e integrare le scoperte raggiunte in classe tramite l'esplorazione del problema con le sue conoscenze personali, apprese in altri momenti e con altre modalità di lavoro, spiegazione-studio-ripetizione, quasi come se le due attività facessero parte di due mondi diversi.

La dimostrazione della proprietà congetturata è stata eseguita come compito a casa. Dalle schede esaminate si nota che tutti gli studenti non hanno utilizzato i risultati discussi in classe, bensì hanno dimostrato la congruenza delle coppie di triangoli che si determinano tracciando le tangenti alla circonferenza per i punti esterni e deducendo la congruenza dei segmenti di tangenza. Di qui sono arrivati a dire che le somme delle lunghezze delle coppie di lati opposti sono uguali.

Sembra allora che l'ipotesi fatta sullo studente precedente possa essere generalizzata alla classe: i due mondi di lavoro sarebbero quello del laboratorio di informatica, con l'uso del software Cabri, in cui prevale un'attività di esplorazione-scoperta, e quello della classe, in cui prevale lo statuto implicito del contratto didattico di domanda-risposta, problema-dimostrazione.

Non tutte le classi hanno lo stesso comportamento nei confronti della dimostrazione: alcune lavorano con maggiore discontinuità dalla fase di congettura a quella di validazione, altre con maggiore continuità. Per esempio, con una classe in particolare (Arzarello, Olivero, Paola & Robutti, in stampa, a) succede che gli studenti che riescono a pervenire a una congettura di cui si sentono sicuri, perché l'hanno provata in diversi casi con il trascinamento, sentano l'esigenza di dimostrarla subito, senza uscire dalla modalità di lavoro in Cabri, colorando o variando o abbellendo la figura, o arricchendola di nuove costruzioni. Vogliono comporre una serie di concatenazioni logiche per giustificare il risultato a cui sono pervenuti. Cabri costituisce un potente mediatore allora non solo nella fase di congettura, ma anche nella fase di dimostrazione.

Certo la dimostrazione fatta davanti al video può essere incompleta, frammentaria, non espressa secondo i codici condivisi in classe, ma proprio per questo più 'vera' perché nasce da un bisogno degli allievi: l'esigenza di sapere che una proposizione 'funziona' non perché lo dice Cabri, o lo dice l'insegnante, o è stata intuita osservando una figura, ma perché è conseguenza logica di altre proposizioni della geometria. Ecco una forte motivazione a dimostrare, nata nel tipo di attività di risoluzione di problemi con l'aiuto di Cabri. Nella seconda parte dell'attività avranno tutto il tempo per stendere la dimostrazione in maniera completa.

Abbiamo osservato che, a questo proposito, il ruolo dell'insegnante è fondamentale per stimolare i ragazzi a lavorare autonomamente, utilizzando tutte le risorse a loro disposizione (carta e matita, Cabri, libro di testo,….) per produrre dei risultati nell'approccio ai problemi. Un insegnante aperto, non autoritario, studente anche lui (nel senso che non si pone come il depositario di tutto il sapere, ma che apprende insieme ai ragazzi con un atteggiamento costruttivo) offre sicuramente gli stimoli giusti: motivazione ad apprendere, a giustificare, a dimostrare.

Per quanto riguarda i problemi di costruzione, abbiamo analizzato un certo numero di protocolli, commentandone uno in particolare in Arzarello, Olivero, Paola & Robutti, (in stampa, b). Ci sembra interessante riportare qui la fase di discussione, in cui l'esperto guida i ragazzi a mettere in comune le varie procedure di costruzione (corrette e non), commentandole, e successivamente conduce il gruppo-classe a formulare la giustificazione della correttezza.

CIRCONFERENZE E RETTE TANGENTI
Situazione
Sia data una retta t, un suo punto P e un punto Q non appartenente a t.
Proposta di lavoro
Costruisci la circonferenza che passa per P e Q ed è tangente a t in P.
Quali sono i dati del problema? Qual è l'incognita? Quali sono le condizioni che legano tra loro i dati e l'incognita?
Dopo avere completato la costruzione in Cabri scrivi in modo preciso la procedura che hai usato per la costruzione.

Fase 1 (*procedure*)

Costruzione 1:

LUCA- *Noi avevamo costruito Q sulla perpendicolare per P a t, poi abbiamo preso il punto medio del segmento PQ come centro della circonferenza.*
Ma questo non è giusto perché Q si può spostare solo su e giù e non a destra e sinistra. […]

Costruzione 2

PAOLO- *Noi abbiamo costruito una retta per due punti [t] e preso un punto Q esterno alla retta. Abbiamo segnato il punto medio del segmento PQ. Poi abbiamo costruito la circonferenza di centro il punto medio e passante per Q e abbiamo segnato l'intersezione di questa circonferenza con t. In questo modo si forma un triangolo; abbiamo preso il punto medio di un cateto del triangolo rettangolo e abbiamo disegnato la circonferenza di centro questo punto e passante per Q. Si è venuta a creare una semicirconferenza in cui ho costruito un triangolo rettangolo, che ha un lato perpendicolare alla retta t. Ho chiamato P l'intersezione del cateto con la retta t.*

ESPERTO- *Quindi hai cambiato punto P.*

PAOLO- *Sì ma è lo stesso; possiamo chiamare questo punto [il punto inizialmente chiamato P] A. Questo è uno dei punti con cui ho creato la retta.*

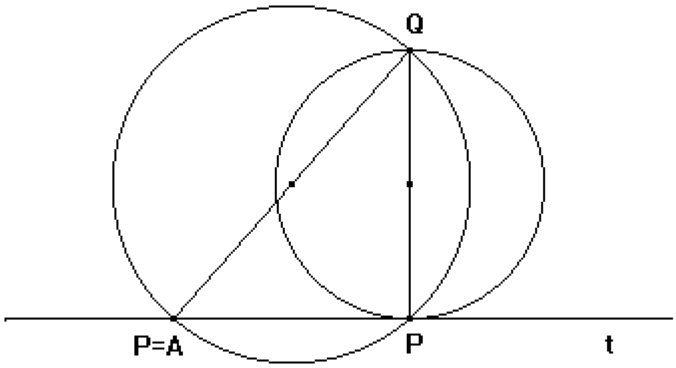


Figura 2

ALFREDO- *Muovendo Q si muove anche P. Non si ha l'indipendenza della costruzione precedente. Qui Q si muove ma P si muove in modo che QP rimanga perpendicolare a t. P non dovrebbe stare fermo? [...]*

Commento.

L'accento viene posto sui tentativi che poi si sono rivelati errati; è importante far scoprire agli studenti come ogni risultato, anche parzialmente errato, possa comunque essere stato motore della loro ricerca; essi apprendono così che è normale non 'trovare' immediatamente, ma che i tentativi hanno il loro valore. Sono gli stessi ragazzi che spiegano perché hanno abbandonato una determinata costruzione: vengono dunque considerati i processi e non solo i prodotti. La costruzione 1 è un caso particolare, perché il punto Q si trova a essere vincolato (un grado di libertà), mentre dovrebbe essere libero perché si tratta di un dato (due gradi di libertà).

La costruzione 2 sembra funzionare, ma in realtà risolve anch'essa un caso particolare: sono state cambiate le relazioni tra gli oggetti perché viene chiamato P il punto ottenuto al termine del processo. Uno studente si accorge subito di qualcosa di strano perché muovendo Q si muove anche P, mentre come dato iniziale P dovrebbe essere indipendente da Q.

Fase 2 (*dimostrazione*)

L'esperto ripete la costruzione corretta alla lavagna. Retta t, punto P su t, punto Q esterno a t. La circonferenza viene indicata con c.

ESPERTO- *Poi chiamate O questo punto [intersezione della perpendicolare a t in P con l'asse di PQ] e dite che questa circonferenza così costruita [di centro O e raggio OQ] è tangente a t in P e passante per Q. Questa è la conclusione a cui siete arrivati. Perché? Non perché funziona in Cabri. Cerchiamo di capire perché questa costruzione funziona.*

ALFREDO- *L'asse di PQ è la bisettrice dell'angolo <QOP .... QM=MP [M punto medio di PQ]... quindi essendo l'asse la bisettrice sappiamo che ... Anche QM è perpendicolare all'asse e anche MP.*

ESPERTO- *Diamo un nome all'asse, chiamiamolo s. Quindi posso dire che la circonferenza c passa sia per P che per Q. Vediamo se è vero che posso concludere questo.*

ALFREDO- *QM = MP, QM perpendicolare a s, s è l'asse di PQ ed è la bisettrice di <QOP. Se l'asse è la bisettrice ho un triangolo isoscele, quindi QO=OP.*

Dunque c, la circonferenza di centro O e raggio r=OQ, passa per Q e P.

ROBERTO- *Bisogna dire che O appartiene alla perpendicolare a t.*

ESPERTO- *Qualunque perpendicolare?*

ROBERTO- *Passante per P, altrimenti non si ha la tangente.*

ESPERTO- *Se ho queste due affermazioni: 1. O appartiene alla perpendicolare a t per P, 2. c passa per Q e P, segue che c è tangente a t in P e passa per Q? Siete d'accordo? Queste due affermazioni implicano la conclusione c è tangente a t in P e c passa per Q?*

ROBERTO- *O deve essere l'intersezione tra l'asse e la perpendicolare.*

ESPERTO- *O è costruito così. Ma io vi ho chiesto se 1. e 2. sono sufficienti per avere questa affermazione.*
ALBERTO- *Per dimostrare che c è tangente a t in P.... OP è un raggio ed è perpendicolare a t, quindi sappiamo che c è tangente a t.*
ESPERTO- *Quindi posso dire la parte che riguarda la tangente in virtù di una proprietà nota.*
ALBERTO- *Per la definizione. La definizione è: tangente a una circonferenza di centro O in P è che OP=r.*
ESPERTO- *In virtù di questa definizione ho che OP perpendicolare a t & OP=r.*
ALBERTO- [perfeziona la definizione] *Deve essere OP=r=distanza di O dalla retta.*
ESPERTO- *Quindi voglio le due cose [OP perpendicolare a t & OP=r]. Quindi questa è la definizione di tangente e per definizione c è tangente a t in P. c passa per Q? .... Certamente! L'ho presa io in questo modo. Quindi in conclusione c è tangente a t in P e c passa per Q è conseguenza di: QO = r (e l'ho usato due volte) e QO = OP. QO = OP perché?*

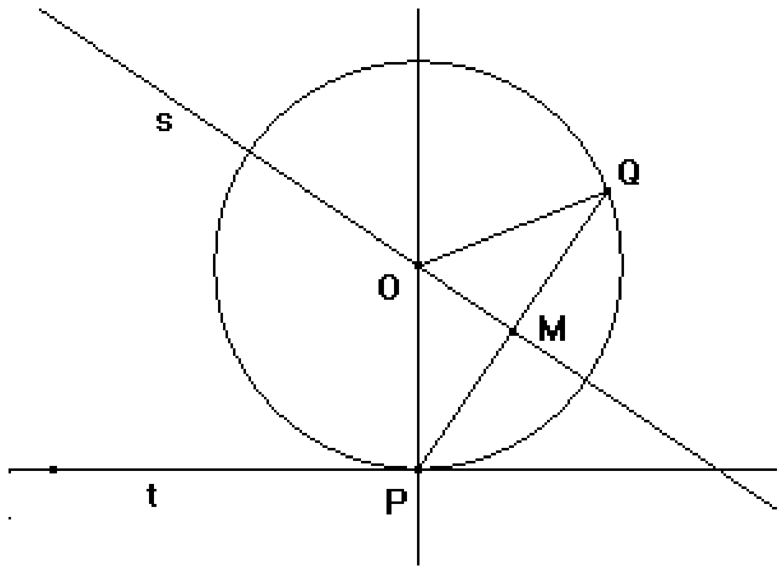


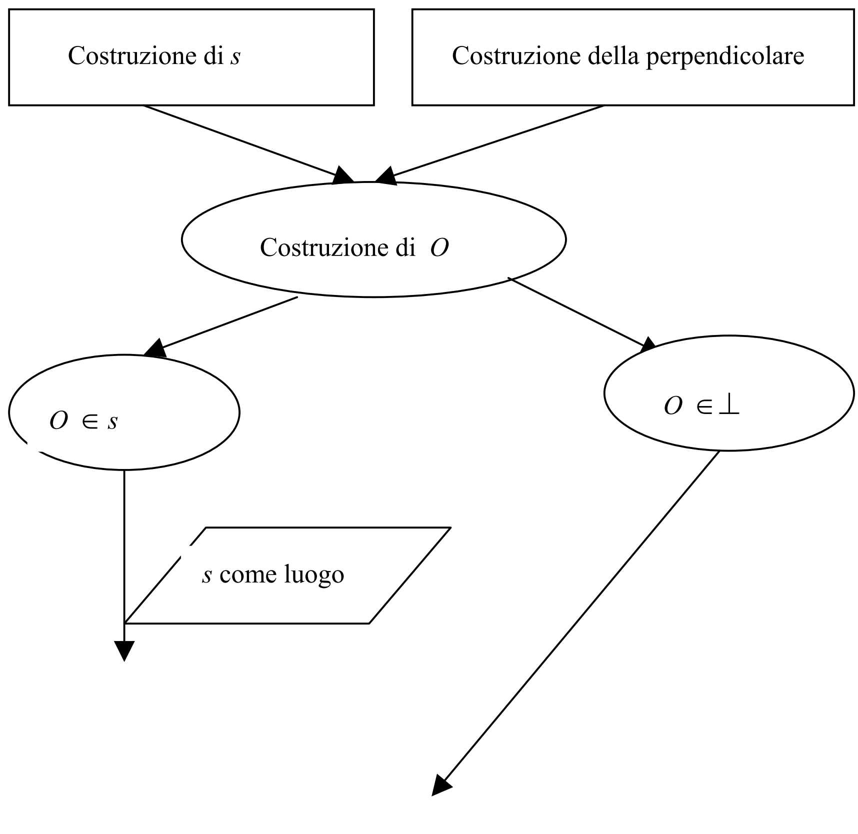
Figura 3

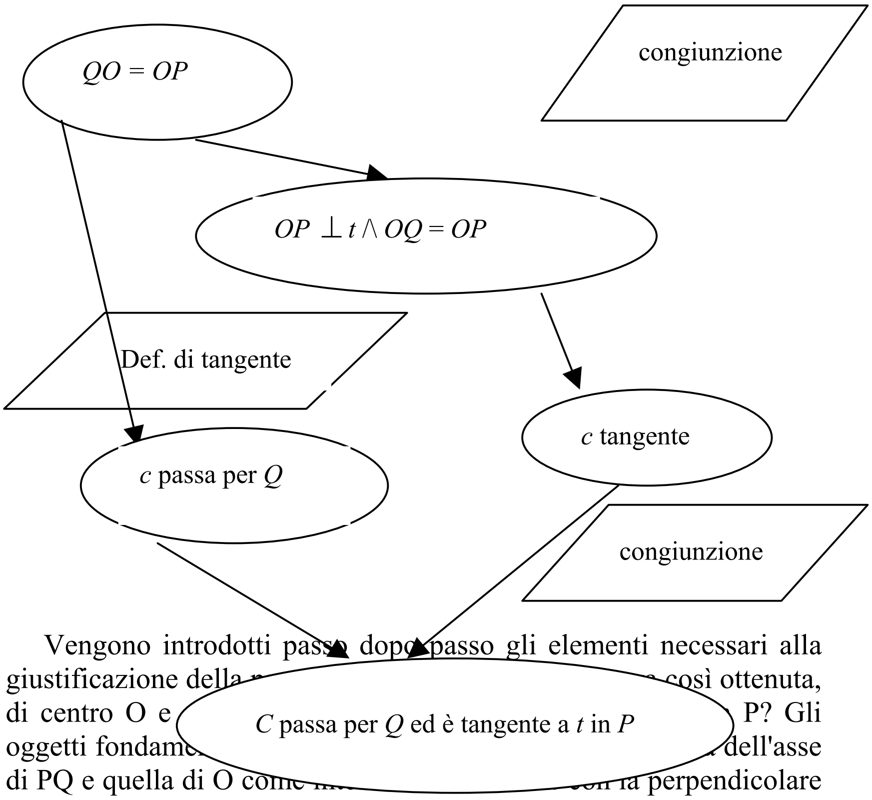
ALBERTO- *QOP è un triangolo isoscele. OM è bisettrice. s che è l'asse è un luogo di punti.*
ESPERTO- *L'asse è il luogo dei punti equidistanti da P e da Q. E questa è un'altra costruzione, dipende da*
come ho definito s; questa è la definizione di asse. Quindi O appartiene alla perpendicolare a t per P, ma O appartiene anche all'asse s. Perché? Per come l'ho costruito, l'ho costruito come intersezione di s con la perpendicolare. Quindi tutto è basato sulla costruzione di O.
In realtà allora ho due costruzioni: a) Costruzione di O: O = intersezione di s con la perpendicolare a t in P; b)Costruzione di s: s = luogo dei punti equidistanti da P e da Q. Queste sono sufficienti per dimostrare che cosa?
- Primo, che O appartiene alla perpendicolare a t passante per P; certamente, perché O è intersezione ....
- Secondo, che O appartiene a s; certo, per lo stesso motivo.
- Terzo, QO = OP; è conseguenza di b) e di quello che abbiamo detto sopra.
A questo punto metto insieme i vari ingredienti. Allora la dimostrazione prende come ipotesi a) e b) e via via giunge a farmi vedere che c è tangente a t in P e c passa per Q.
Voi in Cabri avete fatto il contrario, avete pensato come doveva essere la circonferenza. Adesso questo diagramma (Figura 4) *ci dà le relazioni logiche tra gli enunciati: partendo da a) e b) e usando le definizioni di retta tangente e luogo di punti siamo arrivati a dimostrare la conclusione nel rettangolo* (vedi grafo)*, che possiamo chiamare proprietà. Allora ho dimostrato questo teorema:*
HP: 1. Dati una retta t, $P \in t$, $Q \notin t$; 2. Se s è l'asse di QP; 3. Se O appartiene a s e alla perpendicolare a t in P
TS: Allora la circonferenza di centro O e raggio uguale a OQ è tangente a t in P e passa per Q.

In Cabri avete fatto le due costruzioni che sono le ipotesi che vi servono per dimostrare. Ogni volta che fate una costruzione in Cabri è come se aveste un teorema, ma non avete la dimostrazione.

Commento.

In questa fase c'è un cambiamento di quadro. Si passa all'ambiente carta e matita e ci si chiede perché la costruzione funziona, cioè ci si preoccupa di giustificare la correttezza della procedura utilizzata in Cabri per arrivare a produrre il disegno. Il metodo utilizzato dall'esperto nel guidare la discussione con gli studenti ha come obiettivo l'analisi del problema di costruzione, ossia la ricerca della giustificazione del risultato nell'ambito di definizioni e teoremi. Si osserva infatti che l'esperto guida gli allievi dalla formulazione della tesi all'indietro fino alla scrittura delle ipotesi: in tal modo si perviene alla formulazione di un enunciato, che può essere successivamente dimostrato.





Vengono introdotti passo dopo passo gli elementi necessari alla giustificazione della [illegible] così ottenuta, di centro O e [illegible] P? Gli oggetti fondame[illegible] dell'asse di PQ e quella di O come [illegible] con la perpendicolare a t in P. Queste diventano le ipotesi di un teorema, enunciato in modo completo nella parte finale della discussione. In Cabri si era partiti da una circonferenza soddisfacente le condizioni date e le due costruzioni menzionate sopra erano state un punto di arrivo. Adesso il grafo mostra un percorso che parte da tali costruzioni e arriva alla circonferenza c, che diventa la tesi di un teorema. Il grafo precedente che risulta dalla dimostrazione 'all'indietro' è stato costruito a partire dal fondo, seguendo il metodo analitico, e le frecce sono state aggiunte solo alla fine per ricostruire la dimostrazione in modo sintetico.

BIBLIOGRAFIA

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D. & Robutti, O.: (in stampa, a), Dalle congetture alle dimostrazioni. Una possibile continuità cognitiva, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate.*
Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D. & Robutti, O.: (in stampa, b), I problemi di costruzione geometrica con l'aiuto di Cabri, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate.*
Simon, M.: 1996, Beyond Inductive and Deductive Reasoning: the Search for a Sense of Knowing. *Educational Studies in mathematics,* 30, 197-210.
Vinner, S.: 1997, The pseudo-conceptual and the pseudo-analytical thought processes in mathematics learning, *Educational studies in mathematics*, 34, 2, 98-129.

3.4 Proposta di schede di lavoro

1. ASSIOMI

1. Costruisci una retta. Di quanti punti distinti almeno hai bisogno? Puoi disegnare una retta che passa per un solo punto dato?
2. Dati due punti distinti, quante rette passanti per essi puoi tracciare?
3. Segna due punti distinti e chiamali A e B, traccia la retta r passante per A e B. Disegna ora un punto C distinto da A e B non appartenente a r: quante rette distinte puoi ancora tracciare in questa situazione (con il comando Retta per due punti)? Aggiungi il punto D distinto dagli altri: quante rette puoi aggiungere? Prova a mettere C sulla retta r: cosa succede agli altri elementi del disegno? E se A, B, C, D sono tutti allineati? Prova a fare la stessa cosa con cinque punti distinti, a tre a tre non allineati: quante sono tutte le possibili rette distinte che li congiungono a due a due? Puoi prevedere quante rette distinte potrai ottenere avendo sei punti distinti, a tre a tre non allineati? Riesci a trovare una regola generale?
4. Costruisci due rette distinte r ed s. Sposta s nel piano. Puoi trascinare s attraverso uno qualunque dei suoi punti? Perché?
5. Osserva al variare di s quanti punti in comune possono avere r ed s. Vale per qualunque coppia di rette? Disegna una retta t che abbia un solo punto di intersezione con r e chiama questo punto G; disegna una retta u che abbia in comune con r due punti. Cosa osservi?

6. Per tracciare una retta parallela ad r, quanti punti distinti devono essere già disegnati (oltre alla retta r)? Costruisci la parallela s alla retta r passante per un punto A esterno ad r. Colora di rosso A e la parallela s. Cosa succede muovendo la retta r? E muovendo il punto A? Puoi spostare la parallela s?
7. Disegna un'altra retta t e muovila nel piano: come varia la sua posizione rispetto ad r e s?

2. RETTE E POLIGONI

1. Disegna una retta r e segna due punti distinti A e B che appartengono a r. Stabilisci un ordine sulla retta (ad esempio stabiliamo che A precede B). Segna un punto A1 che precede A e un punto B1 che segue B. Segna ora un punto C che sta fra A e B.
2. Disegna una retta s e fissa su di essa due punti distinti O e U. (O precede U). Prova a segnare cinque punti distinti che seguono U (numerandoli da 2 a 6) e cinque punti distinti che precedono O (numerandoli da –1 a –5) in modo che la distanza tra due punti consecutivi sia uguale alla distanza di O da U. Costruisci una macro-costruzione (numerica.mac) che ti permetta di ridisegnare la retta numerica a partire da una retta qualunque e due punti su di essa. Segna su s un punto A e un punto B che segue A. Osserva cosa succede a tutti i punti segnati di s spostando O e U.
3. Disegna un segmento di estremi A e B. Sposta un estremo del segmento, poi l'altro. Come si modifica AB? Puoi spostare AB dove vuoi tu? Prova a spostarlo afferrandolo per un punto qualunque diverso dagli estremi. Cosa succede? Seleziona un punto C su AB, distinto da A e B. Cosa succede se sposti A o B? Fai in modo che C rimanga su AB. Dove puoi spostare C?
4. Disegna un segmento EF su una retta t e coloralo di verde. Individua R tra E ed F. Muovi R e osserva se viene mantenuta la relazione tra R, E ed F. Colora il segmento ER in rosso e RF in blu. Osserva che relazione c'è tra i tre segmenti ER, RF, EF, facendo variare i tre punti sulla retta t (osserva la loro intersezione).
5. Dato un segmento GH nel piano, costruisci un segmento ad esso adiacente, uno consecutivo, uno adiacente ma non consecutivo.

6. Disegna una retta q e due punti distinti J e K che non appartengono a q. Costruisci il segmento JK. Osserva come varia la posizione del segmento JK rispetto a q al variare di J e K nel piano. Fai la stessa cosa considerando al posto del segmento JK un'altra retta l.
7. Disegna quattro rette distinte a due a due non incidenti: in quante parti viene diviso il piano? Se aggiungi un'altra retta diversa dalle precedenti il numero delle parti aumenta?
8. A partire da un segmento GH costruisci una spezzata ripetendo il processo di costruzione di un segmento. Cosa succede spostando gli estremi dei diversi segmenti?
9. Costruisci un triangolo prima ripetendo la funzione costruzione del segmento, poi usando il comando Costruisci-triangolo. Muovi i vertici dei due triangoli. C'è qualche differenza tra le due costruzioni?
10. Costruisci un quadrilatero qualunque e osserva come varia spostando i suoi vertici. Segna due punti appartenenti alla tua figura: il segmento che li congiunge rimane sempre interamente contenuto in essa?
11. Aumenta il numero dei vertici e costruisci poligoni con 5, 6, 8 lati.
12. Disegna un segmento AB. Costruisci un segmento A'B' congruente ad AB usando il comando Trasporto di un segmento. (Leggi il messaggio di aiuto). Come funziona questa macro-costruzione?
13. Dato un segmento AB, disegna una retta r e un segmento CD congruente a AB e perpendicolare ad r e un altro segmento EF congruente ad AB e parallelo ad r.

3. COSTRUZIONI

1. Disegna un segmento AB e individua il suo punto medio M (senza usare la voce apposita del menu). Cosa succede spostando gli estremi del segmento? Pensi che quello che hai fatto sia corretto? Adesso usa la voce Punto medio per individuare M. M si può spostare? Perché?
2. Puoi costruire ora l'asse di AB senza usare la voce Costruzione-asse? In che modo?
3. Se cancelli il punto medio di AB, cosa succede all'asse? Perché?

4. Costruisci un altro segmento EF e una retta perpendicolare a EF. Hai bisogno di altri elementi? Puoi muoverla? In che modo? Cosa osservi? C'è differenza se il punto appartiene ad EF o no? Puoi costruire la perpendicolare a EF senza il comando Costruzione-perpendicolare? La tua costruzione ha senso?
5. Traccia una perpendicolare ad una retta data. Ci sono differenze se tracci la retta base con Creazione-retta o Creazione-retta per due punti?
6. Disegna un segmento AB e il suo punto medio M. Misura AB e AM e MB. Puoi farlo? Perché? Cosa devi ancora definire?
7. Data una retta r e un punto P fuori di essa, misura la distanza di P da r. Come varia mentre P si muove nel piano?

4. COSTRUZIONE DI QUADRILATERI

1. Costruisci un parallelogramma. Indica nella costruzione quali sono i punti base e osserva cosa succede spostando questi punti.
2. Determina una macro-costruzione che ti permetta di ottenere questo quadrilatero, con il minor numero possibile di oggetti iniziali.
3. Costruisci un rombo, un rettangolo, un quadrato.

5. RETTE PARALLELE

Situazione

Siano r ed s due rette parallele tagliate da una trasversale nei punti A e B. Considera le bisettrici degli angoli coniugati interni e chiama C e D i loro punti di intersezione.

Proposta di lavoro

1. Che tipo di quadrilatero è ADBC?
2. Quale posizione deve occupare la trasversale affinché ADBC sia un quadrato?

6. QUADRILATERI

Situazione

Sia dato un quadrilatero ABCD. Considera il quadrilatero HKLM, i cui vertici sono i punti H sul lato AB, K su BC, L su CD, M su DA, che soddisfano la relazione AH=BK=CL=DM.

Proposta di lavoro

Fai variare ABCD, esaminando i casi particolari. Quali forme assume il quadrilatero HKLM ?

7. BISETTRICI DI UN QUADRILATERO

Situazione

Sia dato un quadrilatero ABCD. Considera le bisettrici dei quattro angoli interni e le loro intersezioni H, K, L, M (considerate in senso antiorario) che danno origine a un quadrilatero.

Proposta di lavoro

Fai variare ABCD, esaminando tutti i casi particolari: come cambia la figura HKLM? (Che cosa diventa?: quadrilatero particolare, triangolo, punto, …..).

8. PARALLELOGRAMMI E RETTE PARALLELE

Situazione

Sia dato un parallelogramma ABCD, tre rette passanti per A, B, C e parallele tra loro e una retta qualunque passante per D. Chiama E, F e G i punti di intersezione delle tre rette parallele con quella uscente da D.

Proposta di lavoro

Studia le relazioni che sussistono tra il segmento BF e i segmenti AE, CG:

1. al variare della retta per D in un fascio tenendo fisse le parallele.
2. al variare delle parallele tenendo fissa la retta per D.

9. PUNTI SIMMETRICI

Situazione

Siano dati quattro punti distinti I, J, K, L e un punto A distinto dai precedenti.

Chiama: B il punto simmetrico di A rispetto a I, C il simmetrico di B rispetto a J, D il simmetrico di C rispetto a K, E il simmetrico di D rispetto a L.

Proposta di lavoro

1. Quale condizione sui punti I, J, K, L devi aggiungere affinché A ed E siano coincidenti?
2. Cosa succede se i punti di partenza sono tre? E se sono cinque?

3. Aumentando il numero dei punti di partenza cosa osservi riguardo alla relazione tra A e l'ultimo simmetrico? Puoi stabilire una regola generale? (Distingui tra il caso di un numero pari e il caso di un numero dispari di punti.)

10. CORDE CONGRUENTI

Situazione 1

Sia data una circonferenza di centro O e due corde AB e CD.

Proposta di lavoro

Quale costruzione puoi fare partendo da O per decidere se le due corde AB e CD sono congruenti?

Situazione 2

Sia data una circonferenza di centro O e un punto P interno alla circonferenza.

Proposta di lavoro

1. Tra tutte le corde passanti per P qual è la più lunga? Quale la più corta?
2. Cosa cambia se il punto P è esterno alla circonferenza? E se appartiene alla circonferenza?

11. RETTE SECANTI, TANGENTI, ESTERNE

Situazione

Sia data una circonferenza di centro O (circonferenza centro-punto), due punti P e Q esterni alla circonferenza e la retta PQ. Traccia la distanza OH di O dalla retta PQ.

Proposta di lavoro

1. Fai variare la retta muovendo Q. Quali condizioni deve soddisfare OH affinché la retta sia secante, esterna o tangente alla circonferenza?
2. Individua quante sono le tangenti alla circonferenza quando P è interno alla circonferenza o esterno o sulla circonferenza.
3. Fai una macro-costruzione che costruisca la tangente a una circonferenza in un suo punto P.

12a. CIRCONFERENZE E RETTE TANGENTI 1

Situazione

Sia data una retta t, un suo punto P e un punto Q non appartenente a t.

Proposta di lavoro

Costruisci la circonferenza che passa per P e Q ed è tangente a t in P.

12b. CIRCONFERENZE E RETTE TANGENTI 2

Situazione

Siano date due rette r e s e un punto P appartenente ad r e non a s.

Proposta di lavoro

1. r e s secanti: Costruisci una circonferenza tangente a entrambe le rette e che abbia P come punto di tangenza su r. È unica?
2. r e s parallele: Cosa devi modificare nella costruzione precedente?

12c. CIRCONFERENZE E RETTE TANGENTI 3

Situazione

Siano date tre rette distinte r, s, t.

Proposta di lavoro

1. Rette a due a due incidenti: costruisci una circonferenza tangente a queste tre rette.
2. Due delle tre rette parallele: come devi modificare la costruzione?
3. Tutte e tre le rette parallele: cosa succede?

13. POLIGONI CIRCOSCRITTI

Situazione

Sia data una circonferenza di centro O.

Proposta di lavoro

1. Costruisci un quadrilatero qualunque circoscritto alla circonferenza e chiama i suoi vertici A, B, C, D.
2. Fai una macro-costruzione che ti permetta di ottenere un quadrilatero circoscritto a una circonferenza a partire da un numero minimo di oggetti iniziali.
3. Facendo variare il quadrilatero ABCD, quali quadrilateri particolari puoi ottenere?
4. Puoi trovare una caratteristica comune a tutti i quadrilateri ottenuti? Riesci a trovare un criterio per decidere se un quadrilatero è circoscrivibile ad una circonferenza? (Prova a osservare come variano i lati del quadrilatero)

14. TRIANGOLI E CIRCONFERENZE 1

Situazione

Sia BAC un triangolo isoscele sulla base BC. La circonferenza c, tangente ad AB in A e passante per C, taglia la retta BC in D.

Proposta di lavoro

1. Che tipo di triangolo è ADB?
2. Quali configurazioni particolari può assumere? Sotto quali ipotesi?

15. CIRCONFERENZE TANGENTI

Situazione

Sia *c* una circonferenza e *c'* una circonferenza tangente internamente a *c*.

Proposta di lavoro

Costruisci una circonferenza *c''* tangente esternamente a *c'* e internamente a *c*.

16. POLIGONI INSCRIVIBILI

Situazione

a) Data una circonferenza, traccia due corde di uguale lunghezza AB e CD, che non si intersecano. Indicati con E ed F i punti medi rispettivamente di AB e CD, unisci i punti E ed F con una retta, che interseca la circonferenza nel punto G dalla parte di E e nel punto H dalla parte di F.
b) Successivamente considera il quadrilatero convesso ABCD inscritto nel cerchio, indica con M, N, P e Q nell'ordine i punti medi degli archi AB, BC, CD, DA.

Proposta di lavoro

1. Studia le relazioni che intercorrono tra le lunghezze dei segmenti GE, EF ed FH, al variare delle corde AB e CD.
2. Sotto quali ipotesi la retta GH passa per il centro della circonferenza?
3. Quali configurazioni particolari assume il quadrilatero MNPQ al variare del quadrilatero ABCD?

17. QUADRILATERI E CIRCONFERENZE 1

Situazione

Sia data una circonferenza c di centro O, un punto P esterno alla circonferenza e le tangenti alla circonferenza passanti per P. Chiamate R e Q le loro intersezioni con la circonferenza considera il triangolo RPQ e il suo ortocentro S.

Proposta di lavoro

1. Che forma ha il quadrilatero ORSQ?
2. Quale forma particolare può assumere? Sotto quali ipotesi?
3. Sotto quali ipotesi S appartiene alla circonferenza c?
4. Disegna la circonferenza circoscritta al triangolo RPQ. In quale caso essa ha lo stesso raggio di c?

18. TRIANGOLI E CIRCONFERENZE 2

Situazione

Siano date due circonferenze c e c' con centri R e S; sia A un punto d'intersezione delle due circonferenze; la retta RA taglia c' in P e la retta SA taglia c in Q.

Proposta di lavoro

Come varia il triangolo PAQ al variare:

1. delle posizioni reciproche delle due circonferenze,
2. dei raggi delle due circonferenze?

19. QUADRILATERI E CIRCONFERENZE 2

Situazione

Siano date due circonferenze *c* e *c'* con centri O e O' che si intersecano in due punti distinti A e B; siano D ed E i punti diametralmente opposti ad A rispettivamente su *c* e *c'*.

Proposta di lavoro

1. Che relazione c'è tra i punti D, B ed E?
2. Quali relazioni ci sono tra i segmenti DE e OO'?
3. Che tipo di quadrilatero è DOO'E?
4. Quali configurazioni particolari può assumere? Dalla variazione di quali oggetti dipendono queste configurazioni?

20. RETTA E CIRCONFERENZA

Situazione

Sia data una circonferenza c e due punti A e P qualunque.

Proposta di lavoro

Costruisci una retta passante per P che interseca la circonferenza in due punti D ed E tali che il triangolo ADE sia isoscele sulla base DE.

21. QUADRILATERI INSCRITTI IN UNA CIRCONFERENZA

Situazione

Sia ABCD un quadrilatero convesso inscritto in una circonferenza c. Le bisettrici dei suoi angoli interni intersecano la circonferenza in R, S, T, U.

Proposta di lavoro

1. Che tipo di quadrilatero è RSTU?
2. Quali configurazioni particolari può assumere? Dalla variazione di quali oggetti dipendono queste configurazioni?

22. CIRCONFERENZE E SECANTI

Situazione

Siano date due circonferenze c e c’ con centri O e O’ che si intersecano in due punti distinti A e B; una retta r passante per A taglia c in P e c’ in P’.

Proposta di lavoro

Trova la relazione tra gli angoli PBP’ e OBO’ al variare della retta r passante per A.

23. RETTA DI EULERO

Situazione

Sia dato un triangolo ABC con l’ortocentro H, il baricentro G e il circocentro O.

Proposta di lavoro

1. Osserva la posizione reciproca di O, H e G al variare del triangolo ABC.
2. Si può trovare una relazione tra i segmenti GH, GO e HO?
3. Cosa succede dei punti O, H e G se ABC è rispettivamente rettangolo, isoscele, rettangolo-isoscele, equilatero?

3.5 Congetture in altri ambienti

La scelta di lavorare nell'ambiente della geometria euclidea è stata dettata da una serie di motivazioni 'forti', che qui riassumiamo:

- la tradizione scolastica italiana, con la quale non si può non fare i conti, ha sempre considerato la geometria come la via regia per l'approccio alla dimostrazione;
- è opportuno offrire un'alternativa all'insegnamento tradizionale della geometria, nel quale si richiede agli studenti di ripetere alcune dimostrazioni effettuate dall'insegnante o presenti sul libro di testo, ma non si assegnano quasi mai problemi aperti che pongano gli studenti in situazioni dove si richiedano esplorazioni, produzione e validazione di congetture....;
- attraverso un percorso di geometria è possibile recuperare aspetti di grande rilevanza non solo matematica, ma anche storico-culturale;
- Cabri incontra il favore di studenti e insegnanti e si propone quindi come uno strumento didattico che merita di essere studiato e sperimentato.

Siamo però ben consci che esistono altri ambienti, altrettanto adatti a un approccio alla dimostrazione. Per esempio, nell'ambito della teoria dei numeri si possano trovare molti problemi non banali, ma formulabili con estrema chiarezza. Come è scritto in Arzarello, Bazzini & Chiappini (1994) l'insieme dei numeri naturali può essere utilizzato "come realtà di studio ricca e stimolante, in grado di favorire: processi di concettualizzazione di proprietà che risultano in qualche modo familiari all'alunno per l'esperienza che egli ha condotto in questo campo numerico; l'introduzione del calcolo letterale in un contesto d'uso motivante e controllabile nella complessità; la riflessione su alcuni concetti importanti del pensiero matematico, quale quello di congettura, di verità di una proposizione, di dimostrazione, di verifica".

L'aritmetica è la parte della matematica con cui i ragazzi entrano prima in contatto a scuola: imparano prima a contare, a ordinare in successione, piuttosto che non a riconoscere proprietà delle figure. Allo stesso tempo l'aritmetica risulta uno dei campi della matematica più suggestivi e più allettanti per attività di tipo esplorativo e questo non solo a livello didattico, ma anche a livello di ricerca elevata.

Basti pensare a come ferve la ricerca in teoria dei numeri per convincersi di ciò. Ecco allora che proprio nel campo dell'aritmetica possiamo trarre spunto per attività significative (Paola, 1997; Paola 1998a; Paola 1998b) che consentano di tenere conto sia degli aspetti di continuità che degli aspetti di discontinuità nell'apprendimento.

Precisiamo che questa parte ha unicamente lo scopo di suggerire alcune possibili attività che favoriscano la produzione e la successiva validazione di congettura nel campo dell'aritmetica. Per tale motivo non ha la pretesa di sistematicità che ha invece la parte relativa alle dimostrazioni in campo geometrico. Anche le sperimentazioni in classe, seppur numerose, sono state assai meno sistematiche e, soprattutto, non guidate da un progetto di ricerca che facesse della dimostrazione nel campo dell'aritmetica un oggetto di ricerca didattica. Abbiamo ritenuto opportuno, però, presentare anche questo paragrafo per evidenziare che è nostra ferma convinzione che un percorso che faccia della dimostrazione un tema di insegnamento-apprendimento non può limitarsi alle dimostrazioni condotte in un particolare ambito della matematica che si affronta in classe.

Gli enunciati della teoria dei numeri sono di una semplicità e al tempo stesso di una profondità ineguagliabili. Non ci pare che vi siano altre parti della matematica in cui semplicità (dell'enunciato) e profondità (della sua giustificazione) siano così esplicite e convincenti.

Prendiamo per esempio la congettura di Goldbach:

Ogni numero pari maggiore di 2 può essere espresso come la somma di due numeri primi.

Questo enunciato può tranquillamente essere proposto a studenti di scuola media. La sua comprensione richiede di sapere che cosa si intende per numero primo con la precisazione che 1 non è primo.

Nella scuola media ci si può limitare alla produzione di esempi (che testimoniano la comprensione dell'enunciato) e a una sorta di fase esplorativa che potrebbe rafforzare la fiducia nella congettura, ma che rimarrà tale (come in effetti è anche per la ricerca matematica), magari anche a commentare la necessità di quel 'maggiore di 2' e magari anche ad accennare perché 1 non è primo.

Nel biennio della scuola superiore si può tentare di mettere in crisi la fiducia eccessiva nella validità della congettura per ogni numero naturale (maggiore di 2) predisponendo attività che producano esempi di proposizioni vere per molti numeri naturali, ma definitivamente false (per esempio si possono usare le formule che generano numeri primi, come $n^2 - n + 41$ o $n^2 - 79n + 81$ che generano numeri primi rispettivamente per i primi 40 e 80 numeri naturali, ma non per i successivi).

Queste attività di esplorazione di formule, di produzione e validazione di congetture si possono fare anche con l'ausilio dell'elaboratore e contribuiscono sia a una sempre maggiore conoscenza dell'insieme dei numeri naturali (che nel triennio dovrà essere descritto assiomaticamente, ma che, proprio per questo, dovrà ormai essere un oggetto di cui lo studente ha forte esperienza), sia a orientare lo studente all'attività matematica. Riteniamo che attraverso percorsi del tipo di quello ora delineati si possa simulare in classe, fatte le debite proporzioni e con gli inevitabili limiti, l'attività del matematico nella risoluzione di un problema, con l'attivazione di vari insiemi di conoscenze, in cui ci si muove per tentativi ed errori, seguendo euristiche talvolta anche sporche, che solo nella fase di sistemazione e comunicazione dei risultati vengono ripulite e analizzate criticamente. È anche un buon modo per studiare le dinamiche di pensiero sia nella fase di costruzione delle congetture, sia nella successiva fase di validazione e infine in quella di comunicazione dei risultati che essendo un'attività sociale ha bisogno di essere codificata e regolata da standard riconosciuti dalla collettività.

Un'altra attività che si presta a esplorazioni forse ancora più interessanti può consistere nel proporre agli studenti una tabella del tipo:

$5 = 2^2 + 1^2$	3
$13 = 3^2 + 2^2$	7
$17 = 4^2 + 1^2$	11
$29 = 5^2 + 2^2$	19
$37 = 6^2 + 1^2$	23

Poi si può dire che nella prima colonna appaiono alcuni numeri primi che risultano essere somma di due quadrati. Nella seconda colonna, invece, compaiono alcuni numeri primi che non sono esprimibili come somma di due quadrati. Quello che si può richiedere è di trovare una regolarità. Il discorso può poi essere sviluppato, a seconda dell'età degli studenti, della loro maturazione e del loro interesse. Per esempio, dopo aver notato che i numeri della prima colonna sono del tipo $4n + 1$ e quelli della seconda colonna del tipo $4n + 3$, è possibile dimostrare, con il supporto dell'insegnante, che sia la prima che la seconda formula generano infiniti numeri primi. Inoltre, poiché le due formule insieme generano tutti i numeri dispari, esse generano anche tutti i numeri primi maggiori di 2.

Un'altra attività che può essere proposta già a livello di scuola dell'obbligo è riflettere su quanti sono i numeri primi. La risposta può rimanere a livello di congettura nella scuola media, mentre può essere dimostrata nel biennio di scuola superiore.

L'attività di produzione e validazione di congetture in ambiente aritmetico può inoltre essere un ottimo strumento per avviare all'uso del linguaggio algebrico. L'algebra è spesso pensata in contrapposizione all'aritmetica: in aritmetica si eseguono tutti i calcoli, in algebra si lasciano spesso impostati. Il concetto di *semplificazione* è chiaro in aritmetica, non sempre in algebra. Per esempio, per scomporre 143 è possibile attivare l'insieme di conoscenze della scomposizione in fattori o, con capacità tipiche di un pensiero algebrico maturo, pensare 143 come 144-1, ossia come $12^2 - 1= (12-1)(12+1) = 11 \cdot 13$.

Riteniamo che un obiettivo perseguibile nel biennio della scuola superiore e di buon valore didattico sia quello di far diventare il calcolo letterale uno strumento di pensiero. Con ciò vogliamo dire che il calcolo letterale potrebbe essere utilizzato per giustificare risultati, per validare congetture, per esempio quelle prodotte nell'affrontare problemi in ambito aritmetico. Ma perché ciò avvenga è necessario che lo studente sappia mettere in formula; è necessario sviluppare una sorta di pensiero anticipatorio che consenta allo studente di mettere in formula in modo opportuno e solo quando ciò sia conveniente. Il calcolo letterale non dovrebbe quindi essere sviluppato con attività manipolatorie fini a se stesse, ma dovrebbe essere introdotto gradualmente, solo dopo una pesante attività di verbalizzazione, sentito quasi come un'esigenza da parte degli studenti, uno strumento che consente di condensare il pensiero senza che a seguito di questa condensazione vi sia un'evaporazione del significato.

Attività a nostro avviso particolarmente utili, effettuabili anche con l'ausilio dell'elaboratore, almeno nella fase di esplorazione, che serve per convincersi della correttezza di una congettura, sono del tipo seguente:

1. che cosa puoi dire della somma di due numeri dispari consecutivi?
Qui l'esplorazione porta a congetturare che si ottengono sempre multipli di 4. La giustificazione è immediata se si mette in formula: $2n$-1+$2n$+1 = $4n$.
È meno immediata se non si mette in formula. Provando a simulare il pensiero di uno studente che trova la proprietà senza l'ausilio della *messa in formula*, scriviamo: "fra due dispari consecutivi c'è un pari. Addizionare due dispari consecutivi è come moltiplicare per 2 quel numero pari che si trova fra i due dispari consecutivi... ma il doppio di un numero pari è divisibile per 4. Allora la somma di due numeri dispari consecutivi è divisibile per 4"...

2. Che cosa puoi dire della somma dei quadrati di due numeri naturali consecutivi? (è dispari; qui va bene sia con la messa in formula, che con l'argomentazione verbale)

3. Che cosa puoi dire del prodotto di tre numeri naturali consecutivi? (è divisibile per 6, perché dati tre numeri naturali consecutivi, fra essi c'è un multiplo di 3 e almeno un numero pari; come si può notare, qui la verbalizzazione funziona. Vi sono maggiori problemi con il linguaggio algebrico. Se si utilizzano le classi di resti, la *messa in formula* porta al successo, altrimenti può anche essere di ostacolo, a meno di non ricorrere a una dimostrazione per induzione).

Tra l'altro, giustificazioni di questo tipo possono essere riprese, con classi particolarmente mature e motivate per riflettere sul significato di che cosa vuol dire dimostrare in una teoria, in questo caso nell'aritmetica. In particolare il discorso potrebbe essere approfondito accennando alla problematica di quelle che Hilbert chiamava dimostrazioni *impure*, ossia dimostrazioni di enunciati di una particolare teoria matematica che fanno uso di tecniche di altre teorie. Per esempio, se si vuol dimostrare che la somma dei primi n numeri naturali è data dalla formula $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$, una dimostrazione pura, (ossia condotta all'interno dell'aritmetica) è quella che fa uso del principio di induzione. Una dimostrazione impura invece è quella che utilizza considerazioni di carattere geometrico. L'idea è che il secondo membro della formula che esprime la somma dei primi n numeri naturali può essere pensato come semiprodotto di due fattori: n e $n+1$. Ciò suggerisce di disegnare un rettangolo di base n e altezza $n+1$. Quindi si suddivide la base in n parti uguali e si costruiscono su tali parti colonne via via crescenti di quadratini: 1 sulla prima suddivisione, 2 sulla seconda…..n sull'ennesima. L'area che si copre è uguale al numero di quadratini e, in particolare, al semiprodotto fra n e $n+1$.

BIBLIOGRAFIA

Arzarello, F., Bazzini, L., Chiappini, G.P.: 1995, The construction of algebraic knowledge: towards a socio-cultural theory and practice, *Proceedings of PME XIX.*

Paola, D.: 1997, 'Ricomincio da … N, in L. Bazzini (a cura di), *La didattica dell'algebra nella scuola secondaria superiore*, 156-166.

Paola, D.: 1998a, Il problema della continuità visto dagli insegnanti, *Atti della Mathesis Subalpina*, 222-226.

Paola, D.: 1998b, Attività congetturali in ambienti informatici, *Didattica delle scienze e informatica nella scuola*, 194, 39-44.

4. BIBLIOGRAFIA RAGIONATA

Impegnarsi nella costruzione di una bibliografia ragionata su un argomento come la dimostrazione è senza dubbio rischioso: i lavori significativi sono talmente tanti che è praticamente impossibile citarli tutti. Inoltre la significatività di un lavoro è legata a molti fattori, alcuni dei quali fortemente soggettivi. Questi suggerimenti hanno quindi dei forti limiti e devono essere considerati nient'altro che indicazioni per un primo approfondimento delle tematiche trattate in questo quaderno e una precisazione, da parte degli autori, delle fonti di maggiore ispirazione di questo lavoro.

Abbiamo fatto le seguenti scelte:

- cercare di citare articoli e manuali reperibili, questi ultimi possibilmente ancora in commercio
- limitare, per quanto possibile, i riferimenti a lavori non tradotti in italiano, per non aggiungere alle altre l'eventuale difficoltà della lettura in un'altra lingua
- limitare quanto più possibile il numero di riferimenti.

I suggerimenti bibliografici sono stati suddivisi in *testi* e *articoli*.

4.1 Testi

AA.VV.: 1989, *La démonstration mathématique dans l'histoire*, actes du 7ème colloque inter-IREM, épistémologie et histoire des mathématiques, Besançon.

La tesi di fondo che emerge dai vari e diversificati interventi è che la dimostrazione debba essere vista e pensata in una dimensione storica, anche per evitare di considerarla, come spesso avviene, un oggetto matematico univocamente determinato e definito. I vari interventi mettono in evidenza come i fondamenti della dimostrazione si trasformino, il suo significato si modifichi e le forme e le funzioni siano in continua evoluzione.
I vari interventi si suddividono in quattro sezioni:
A. Oggetto della dimostrazione matematica
B. Forme della dimostrazione matematica
C. Controversie relative alle dimostrazioni
D. Storia della dimostrazione e insegnamento della matematica.

AA.VV.: 1996, *L'insegnamento della geometria*, Seminario di formazione per docenti, Istruzione secondaria di Primo Grado, Lucca.
AA.VV.: 1996, *L'insegnamento della geometria*, Seminario di formazione per docenti, Istruzione secondaria di Secondo Grado, Lucca.

I due volumi possono essere considerati gli atti del corso UMI-MPI che si è tenuto a Viareggio sull'insegnamento della geometria nella scuola secondaria (di primo e di secondo grado). Le istituzioni che lo hanno organizzato e i relatori che sono intervenuti costituiscono da soli un'ottima presentazione per questi due interessanti volumetti che possono essere richiesti, fino all'esaurimento delle scorte, al liceo scientifico Vallisneri di Lucca.

AA.VV.: 1994, *L'algebra fra tradizione e rinnovamento,* Seminario di formazione per docenti, Viareggio.

Si tratta della raccolta degli interventi dei relatori al corso UMI-MPI tenutosi a Viareggio nel 1994 relativo all'insegnamento dell'algebra nella scuola secondaria.
Nel nostro intervento abbiamo fatto riferimento alla opportunità di lavorare anche in ambienti diversi dalla geometria per introdurre gli studenti all'attività dimostrativa. In questo volume si possono trovare vari e interessanti spunti per lavorare nell'ambiente dei numeri interi.

AA. VV.: 1997, *Geometry turned on. Dynamic software in learning, teaching and research*, MAA Notes, 41, Schattschneiderrr, D., USA.
Si tratta di una raccolta di contributi relativi all'uso di ambienti che favoriscono attività di geometria dinamica. Gli articoli contenuti nel libro danno una buona idea di come il software possa essere utilizzato e degli effetti che può avere, sia per quel che riguarda l'insegnamento, sia per quel che riguarda la ricerca. Gli articoli sono raggruppati in quattro grandi aree: riflessioni personali sull'investigazione, la scoperta e la dimostrazione; fare geometria dinamica in classe; visualizzazione dinamica nella storia; i mondi della geometria dinamica.

Bellissima, F. & Pagli, P.: 1993, *La verità trasmessa*, Sansoni, Firenze.
Il testo ha intenti anche di carattere didattico. Propone una suggestiva introduzione alla logica presentando logica delle proposizioni e dei predicati come linguaggi atti ad esprimere regole di deduzione formale. Può essere utilizzato per costruire un percorso tecnicamente alternativo (ma simile nella sostanza) a quello che abbiamo presentato e che fa riferimento alla deduzione naturale per l'introduzione e la precisazione della nozione di regola inferenziale deduttiva.

Borga, M.: 1995, *Fondamenti di logica*, Franco Angeli, Milano.
È un manuale che si propone di essere un'introduzione alla teoria della dimostrazione. Il primo capitolo è dedicato ai cosiddetti sistemi hilbertiani e presenta sinteticamente la logica del primo ordine dal punto di vista sintattico. Il secondo e il terzo capitolo presentano i calcoli della deduzione naturale e delle sequenze. Vi è poi

un'appendice in cui si confrontano deduzione naturale e calcolo delle sequenze.

Nonostante la difficoltà della materia trattata, il testo è estremamente chiaro e almeno le prime settanta pagine possono contribuire significativamente alla comprensione dei concetti e dei problemi fondamentali della teoria della dimostrazione.

Ciarrapico, L. & Mundici, D. (a cura di): 1995, *L'insegnamento della logica*, atti seminario AILA-MPI.

Si tratta della pubblicazione dei lavori effettuati durante il seminario di formazione e aggiornamento sull'insegnamento della logica, organizzato dal Ministero della Pubblica Istruzione, con la collaborazione dell'Associazione Italiana Logica e Applicazioni e tenutosi a Lecce dal 22 al 26 novembre 1993 e ad Otranto, dal 21 al 23 aprile 1994. Il libro si propone come "un piccolo supporto per altri docenti che vogliono sapere più logica e per quanti desiderano realizzare momenti di formazione sul tema".

Il testo si suddivide in tre parti:

I, Lezioni introduttive con complementi ed esercizi, che tratta i seguenti argomenti:

I.1 Insiemi finiti e infiniti

I.2 Linguaggio naturale e formalizzazione, connettivi e quantificatori

I.3 I numeri naturali e il principio di induzione

I.4 Metodo-ipotetico deduttivo

I.5 Schemi di deduzione

II, Conferenze e percorsi didattici, che presenta i seguenti temi:

II.1 L'insegnamento della logica nella scuola secondaria superiore

II.2 Immagini della nozione di dimostrazione

II.3 La deduzione: esperienze didattiche

II.4 Osservazioni e spunti per una proposta didattica: il concetto matematico di infinito

III, Approfondimenti con complementi ed esercizi, che presenta:

III.1 Verità, conseguenza, modello, teorema di completezza di Gödel

III.2 Compattezza, categoricità, paradosso di Skolem

III.3 Teorema di incompletezza di Gödel

III.4 Algoritmi e calcolabilità, tesi di Church, applicazioni della logica all'informatica.

Il testo presenta contributi di logici professionisti, molti dei quali particolarmente attenti alla didattica della logica, e itinerari didattici prodotti dall'interazione fra insegnanti e logici; si tratta di materiale particolarmente 'prezioso', se si considera che la tradizione didattica sulla logica è tutt'altro che consolidata.

de Villiers, M. & Furinghetti, F. (a cura di): 1996, *Proofs and proving: Why, when and how?*, 8th International Congress on Mathematical Education, Sevilla.

Si tratta degli atti del gruppo tematico numero 8 al congresso ICME di Siviglia (1996) e può considerarsi un ottimo strumento per chi desideri avere informazioni sui recenti sviluppi della ricerca didattica internazionale sulla dimostrazione. Sono contenuti interventi di Hanna, Wittman, de Villiers, Movshovitz-Hadar, Hoyles, Reid, Harel e tanti altri ricercatori in didattica della matematica.

Gli interventi sono raggruppati nei seguenti sottotemi: computer e dimostrazioni di tipo euristico; metodi dimostrativi formali e informali; il ruolo della dimostrazione; l'apprendimento della dimostrazione; pratica educativa e di insegnamento.

Lolli, G.: 1988, *Capire una dimostrazione*, Il Mulino, Bologna.

Si tratta di un libro che discute il ruolo della logica nell'ambito della matematica. L'autore, a partire da una descrizione del ruolo della dimostrazione e dei suoi rapporti con la matematica e con la logica, ne traccia una storia completa, dai Greci ai nostri giorni, analizzando in forma dialettica i diversi punti di vista sul concetto, offrendo così al lettore un quadro completo, ricco di spunti epistemologici, storici e didattici, oltre che matematici e logici.

Lolli, G.: 1992, *Che cos'è la logica matematica*, Muzzio, Padova.

È un libro di seria ed efficace divulgazione sul concetto di dimostrazione. Gabriele Lolli ne esamina differenti aspetti, proponendo una suggestiva caratterizzazione di diverse tipologie di dimostrazione: dimostrazioni di esistenza (costruttive e non costruttive), dimostrazioni che sono calcoli e dimostrazioni che sono verifiche di correttezza di calcoli, dimostrazioni di impossibilità,

dimostrazioni di casi particolari... Un insegnante può trovare in questo testo vari spunti e suggerimenti per il suo lavoro in classe.

Schagrin, M.L., Rapaport, W.J. & Dipert, R.: 1986, *Logica e computer*, McGraw-Hill, Milano.

Il testo è stato proposto in due versioni: una per gli insegnanti dei corsi degli istituti tecnici a indirizzo programmatori e una per gli studenti. L'idea è quella di precisare le interrelazioni tra i linguaggi della logica e i linguaggi dell'informatica. Gli autori presentano una versione semplificata e ricca di esempi degli schemi della deduzione naturale di Prawitz.

Schumann, H. & Green, D.: 1994, *Discovering geometry with a computer using Cabri-Géomètre,* Chartwell-Bratt.

Questo libro si propone di incoraggiare e aiutare gli insegnanti per quel che riguarda l'uso didattico di ricerca-scoperta aiutata dal computer, in particolare in geometria e con l'uso di Cabri. Gli argomenti trattati sono i seguenti: apprendere geometria attraverso costruzioni interattive; creare macro, scoprire teoremi; luoghi geometrici; simmetrie; progetti con micromondi geometrici; problemi di isoperimetria; trasformazioni; venti problemi da risolvere. Ricchissimo di esempi, ben impostati e condotti, è da considerarsi uno strumento preziosissimo per chi voglia utilizzare a fondo Cabri.

4.2 Articoli

AAVV: 1996, Teaching proof, *Mathematics teaching*, 155, 6-39.

Si tratta di una serie di interventi sulla dimostrazione ispirati da un provocatorio articolo di Jaffe & Quinn, cui abbiamo fatto cenno nella prima parte di questo lavoro. Gli interventi sono presentati come se si trattasse di una tavola rotonda. Il lettore può trovare posizioni varie e differenziate, che testimoniano come il dibattito intorno alla didattica della dimostrazione stia acquistando sempre maggior considerazione negli specialisti del settore. È particolarmente consigliato non solo per l'autorevolezza, ma anche per la data recente degli interventi.

Arsac, G., Germain, G. & Mante, M.: 1988, *Probleme ouvert et situation-probleme,* IREM, Academie de Lyon.

Il lavoro è basato sul problema aperto, la cui risoluzione può essere suddivisa nelle seguenti fasi/attività:

- tentare
- congetturare
- testare
- dimostrare.

Le caratteristiche di un problema aperto sono le seguenti:

- ha un enunciato corto
- non induce un metodo nè una soluzione
- è in un dominio concettuale con cui gli allievi hanno una certa familiarità.

Gli autori descrivono una ricerca condotta in classe, in cui gli allievi lavorano in gruppi su problemi aperti, quindi devono convincere gli altri gruppi della correttezza della loro dimostrazione. Il ruolo dell'insegnante è quello dell'animatore della ricerca.
Le osservazioni degli autori riguardano principalmente il fatto che il problema aperto stimola la motivazione degli allievi, e che i più motivati non è detto che siano i più bravi.
Sono presentati esempi di problemi con discussione dei risultati.

Arzarello, F.: 1995, Proprietà logiche delle teorie geometriche, *Notiziario UMI XVII Convegno sull'insegnamento della matematica: l'insegnamento della geometria. Temi d'attualità*, supplemento al n.8-9, Anno XXII

L'autore inizia dicendo che nella scuola si insegna poco la geometria euclidea per una serie di motivi, che elenca. Poi passa a discutere dell'importanza della geometria e della logica, come discipline alle origini del sistema assiomatico, quando le dimostrazioni geometriche perdono significato intuitivo per acquisire importanza dal punto di vista sintattico.
Conclude con una osservazione fondamentale: la riduzione della geometria a calcoli algebrici (insieme al cammino inverso) è una grande conquista, che non va sottovalutata didatticamente, nè culturalmente. La geometria diventa così algebra e, viceversa l'algebra diventa geometria. È una rivoluzione concettuale destinata ad avere molte conseguenze.

Arzarello, F., Micheletti, C., Olivero, F., Paola, D. & Robutti, O.: 1998, A model for analysing the transition to formal proofs in geometry, *PME XXII*.

Nell'articolo viene presentato un modello per l'interpretazione dei processi di esplorazione delle situazioni geometriche, di formulazione di congetture e della loro dimostrazione. Si sottolinea una continuità di pensiero che regola con successo la transizione dalla fase di congettura a quella di dimostrazione, attraverso l'esplorazione e l'euristica. I momenti fondamentali sono il diverso tipo di controllo (ascendente o discendente) che il risolutore ha rispetto alla situazione problematica e il passaggio dall'uno all'altro. La conseguenza didattica principale consiste nel cambiamento che il controllo provoca sulle relazioni tra gli oggetti geometrici.

Nel lavoro vengono esposti: la ricerca nella letteratura esistente, i principali punti del modello attraverso l'analisi di un caso paradigmatico e alcune conclusioni parziali.

Arzarello, F., Gallino, G., Micheletti, C., Olivero, F., Paola, D. & Robutti, O.: 1998, Dragging in Cabri and modalities of transition from conjectures to proofs in geometry, *PME XXII*.

Nell'articolo vengono analizzate alcune modalità che caratterizzano il momento delicato della transizione dall'esplorazione alla congettura e alla dimostrazione in Cabri. Viene utilizzato il modello teorico dell'articolo precedente che può essere applicato anche in altri ambienti. Le differenti modalità di trascinamento in Cabri sono fondamentali per determinare uno spostamento graduale e produttivo ad un approccio più formale alla dimostrazione. Vengono classificate tali modalità e usate per descrivere i processi di soluzione di problemi geometrici nell'ambiente Cabri, in confronto all'ambiente carta e matita.

Balacheff, N.: 1988, *Une étude des processus de preuve en mathématique chez les élèves de collège,* Thèse d'état, Université Scientifique de Grenoble.

Obiettivo generale della tesi di Balacheff è di sottoporre a un'analisi didattica e alla sperimentazione la dimostrazione come oggetto di insegnamento. Una delle problematiche trattate riguarda la

questione se la necessità della dimostrazione possa essere introdotta in modo naturale nella classe o se invece non si debba fare della dimostrazione un esplicito oggetto di didattica, magari anche prima di utilizzarla come uno strumento per ottenere o verificare risultati. Il lavoro di Balacheff è ritenuto uno di quelli fondamentali sull'argomento e consta di più di 600 pagine. Presentiamo qui alcuni punti che speriamo possano dare un'idea della sua significatività.
La dimostrazione per la comunità scientifica è:

- da una parte uno strumento privilegiato di prova; rinvia a una pratica che permette allo stesso tempo la comunicazione e la valutazione dei risultati.
- da un'altra parte è un oggetto di studio per i logici: allora è definita nel quadro di una teoria formale.

Nella pratica didattica, secondo Balacheff, è necessario tenere presenti anche altri aspetti, che in genere non si prendono in considerazione, quali il valore sociale della dimostrazione, che gioca un ruolo essenziale nella formazione del significato stesso del termine. Inoltre la dimostrazione si insegna in genere per imitazione, attraverso la proposta di problemi in forma chiusa, del tipo: 'dimostrare che...' In una tale formulazione l'enunciato in questione è già affermato vero; ciò che si deve fare è solo scoprire la dimostrazione. Perché la dimostrazione acquisti significato è necessario che essa appaia agli allievi come un mezzo efficace per stabilire la validità di una proposizione. Anche per la dimostrazione è bene proporre problemi aperti e non chiusi.
Un altro punto importante delle ricerche che Balacheff presenta su questo tema è quello del trattamento del controesempio.

Bartolini Bussi, M.: 1995, Voci della storia dell'algebra nella discussione matematica, *SFIDA IV*.

La prima parte del lavoro è dedicata all'uso della discussione matematica in classe, orchestrata dall'insegnante.
Il metodo della discussione matematica, introdotto da Pirie e Schwarzenberger, in un articolo del 1988, nella ricerca didattica nel senso di "discorso mirato su un argomento di matematica in cui ci sono contributi originali degli allievi ed interazione", è stato ripreso da alcuni studiosi, tra cui l'autrice, che così lo definisce: "Una discussione matematica è una polifonia di voci articolate su un

oggetto matematico (concetto, problema, procedura, ecc.), che costituisce uno dei motivi dell'attività di insegnamento-apprendimento".

Si può dare spazio in classe a una discussione matematica tra voci che sono rappresentative dei personaggi storici citati, del loro pensiero e del loro modo di intendere la dimostrazione. Ciò può essere realizzato sia leggendo (o facendo leggere agli studenti, assegnando loro la voce di un personaggio) brani tratti da scritti di tali personaggi, sia simulando il loro approccio ad uno stesso problema, evidenziando quindi le analogie e le diversità di metodo nell'affrontarlo. L'insegnante è responsabile dell'introduzione delle diverse voci e di una loro orchestrazione, che consenta ad ogni voce il tempo di articolazione necessario. "La storia della geometria è assunta come fonte privilegiata per la determinazione di voci da inserire nel dibattito della classe."

La seconda parte contiene l'analisi della metafora della discussione in relazione ad un problema di didattica della geometria, con ampio uso di fonti tratte dalla storia della matematica.

La terza parte suggerisce la possibilità di estendere questo metodo ad un problema di didattica dell'algebra.

Boieri P., (a cura di): 1996, *Fare geometria con Cabri*, Centro ricerche didattiche Ugo Morin, Giovanni Battagin Editore.

Contiene le istruzioni per iniziare a lavorare con Cabri, unitamente a suggerimenti sulle potenzialità e sui limiti del software, ed esempi di applicazioni e di percorsi didattici.

Brigaglia, A. & Emmer, M. (a cura di): 1995, Congetture e dimostrazioni, *Lettera Pristem*, n. 18, I-XX.

Due matematici, Jaffe e Quinn, hanno osservato, in un loro articolo (cui fa riferimento anche Gila Hanna nel suo lavoro qui riportato) che vi sono ormai due diversi modi di fare matematica: uno rigoroso e uno che predilige l'attività euristica. L'attività dimostrativa e il concetto di dimostrazione avrebbero un ruolo di primaria importanza solo nella matematica rigorosa. Jaffe e Quinn hanno ipotizzato che potrebbe essere utile istituzionalizzare la differenza tra questi due modi di fare matematica dando vita a due discipline differenti, non solo nei metodi, ma anche nei ricercatori,

negli stessi fondamenti, un po' come sono diverse la fisica teorica e quella sperimentale. L'articolo di Jaffe e Quinn ha suscitato le reazioni più disparate nel mondo della ricerca matematica e della ricerca in didattica della matematica. L'inserto a cura di Brigaglia ed Emmer riporta i passi più significativi e autorevoli del dibattito americano (che è un dibattito intorno al concetto di dimostrazione e alla sua importanza nella matematica e nella didattica della matematica), completandolo con alcuni interventi di ricercatori europei e, in particolare, italiani.

Ciceri, C., Furinghetti, F. & Paola, D.: 1996, Analisi logica di dimostrazioni per entrare nella logica della dimostrazione, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate,* vol 19B, n.3, 209-234.

Questo lavoro riprende le idee di Carlo Marchini espresse in Marchini (1991), citato in questa bibliografia, cercando di strutturare un percorso didattico che è poi stato precisato e affinato con la sperimentazione presentata in questo quaderno.

Duval, R.: 1996, Struttura del ragionamento deduttivo e apprendimento della dimostrazione, *La matematica e la sua didattica*, n.4, 370-393.

Nell'articolo, che presenta un lavoro di ricerca didattica, si evidenziano le sostanziali differenze tra il ragionamento formale deduttivo e l'argomentazione. Nonostante queste due forme di ragionamento siano all'apparenza simili, soprattutto per quel che riguarda le espressioni linguistiche utilizzate, in effetti vi sono alcuni fattori che distinguono chiaramente un'argomentazione da una dimostrazione. Il principale è che in un'argomentazione si compiono inferenze in base al significato delle premesse del ragionamento. In un passo deduttivo di una dimostrazione, invece, le premesse intervengono solo in funzione del loro statuto operativo e non in virtù del loro contenuto. Secondo Duval la mancanza di presa di coscienza delle differenze fra argomentazione e dimostrazione sarebbe una delle principali cause della difficoltà degli studenti nei confronti della dimostrazione. Duval suggerisce anche strategie per avviare gli studenti all'attività dimostrativa.

Enriques, F.: 1921, L’insegnamento dinamico, *Periodico di matematiche*, 1, pp. 6-16.

È un bellissimo articolo che, scritto più di settanta anni fa, contiene elementi di riflessione sulla didattica della matematica estremamente attuali. Elenchiamo gli spunti più interessanti:

- L’insegnamento non può essere un regalo, ma è piuttosto un aiuto a chi voglia imparare da sé e sia disposto, anziché a ricevere passivamente, a conquistare il sapere, come una scoperta o un prodotto del proprio spirito.
- L’intuizione e la logica sono due aspetti inscindibili di un medesimo processo attivo, che si richiamano l’un l’altro, e non possono essere separate.
- Non è sufficiente che l’insegnante abbia spiegato come si fa: comprendere significa divenir atti ad applicare, e tale attitudine si svolge solo come frutto di un lavoro attivo.
- L’insegnante deve legare fra loro le diverse parti del suo insegnamento. “Non giova sviluppare con impeccabile deduzione la serie dei teoremi della geometria euclidea, se non si ritorni a contemplare l’edifizio costruito, invitando i discepoli a distinguere le proprietà geometriche veramente significative (p.es. la somma degli angoli d’un triangolo e il teorema di Pitagora) da quelle che hanno valore soltanto come anelli della catena.”
- L’educazione del senso logico dovrà sempre procedere per gradi, dal concreto all’astratto. Solamente al termine di un corso di geometria, riguardando al sistema della scienza, gioverà spiegarne l’organismo logico, rilevando il significato dei concetti primitivi e dei postulati.
- Come mettere in pratica una didattica dinamica? Creare attività in cui il docente si mette a conversare coi ragazzi facendosi anche lui un poco ignorante, ricercando insieme con loro, suggerendo, a tentoni, la via che essi stessi dovevano percorrere per guadagnare la verità.

Hanna, G.: 1997, Il valore permanente della dimostrazione, *La matematica e la sua didattica*, trad. it. di The ongoing value of proof, *Proceedings of PME XX*, v. 1, 21-34, 1996.

Il lavoro ha il carattere delle conferenze generali trattandosi proprio di una delle conferenze generali tenute al convegno PME di Siviglia nel 1996. Gila Hanna esamina magistralmente le varie cause che hanno contribuito a ridestare interesse intorno al dibattito sul ruolo della dimostrazione nella matematica e nella didattica della matematica. La sua posizione, e cioè che, nonostante gli sviluppi neo-empiristi e l'uso di nuove tecniche di indagine in matematica, la dimostrazione abbia ancora un ruolo centrale per la formazione degli studenti, è espressa in modo particolarmente convincente.

Harel, G. & Sowder, L.: 1996, Classifying processes of proving, *Proceedings of PME XX*, v.3, pp. 59-66.

Si tratta di un lavoro di ricerca didattica, in cui vengono presentati alcuni risultati che suggeriscono la presenza di alcuni schemi comportamentali riguardanti l'attività dimostrativa degli studenti e particolarmente resistenti all'azione didattica: schemi di tipo empirico (gli studenti pensano di poter dimostrare basandosi su osservazioni non esaustive di casi particolari); schemi di tipo rituale o simbolico (gli studenti sono maggiormente impressionati dalla forma in cui viene presentata una dimostrazione, che non dalla sua correttezza); schemi autoritari (gli studenti sono portati ad accettare o a rifiutare una dimostrazione in base alla fonte che la propone, più che in base alla correttezza della dimostrazione stessa)...
Il test sui sensi degli studenti verso la dimostrazione è stato in parte costruito sul lavoro di Harel e Sowder.

Iaderosa, R.: 1996, L'avvio all'argomentazione e alla dimostrazione nella scuola media, in Grugnetti, L., Iaderosa, R. & Reggiani, M., *Argomentare e dimostrare nella scuola media*, Atti XV convegno nazionale dei nuclei di ricerca in didattica della matematica per la scola meda, Salice Terme.

Si analizzano alcuni aspetti problematici dell'insegnamento della dimostrazione. Opinione dell'autrice è che gli allievi a livello di scuola media inferiore vadano preparati non solo ad affrontare in futuro le dimostrazioni, ma anche a comprendere le dimostrazioni fatte da altri. A tal fine si illustra l'utilità di far analizzare il testo delle dimostrazioni, per far acquisire agli allievi la capacità di individuare diversi metodi. Altri aspetti di insegnamento sono:

l'argomentazione per convincere gli altri e la dimostrazione. Viene affrontato anche il difficile problema della valutazione degli studenti in attività di questo tipo.
Nell'articolo sono presentati i risultati di un'indagine effettuata nella scuola media e le proposte per un lavoro di raccordo con il biennio della scuola secondaria, utile nella prospettiva di una continuità tra i due livelli scolari.

Laborde, C. & Capponi, B.: 1994, Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique, *Recherches en didactique des mathématiques,* v. 14, 1.2, 165-210.

Per *figura geometrica* si intende qui l'insieme dei rapporti tra un oggetto geometrico e i disegni che sono ad esso associati. La costruzione di tali rapporti richiede un apprendimento che non può essere spontaneo. Si richiama la teoria delle situazioni-problemi di Brousseau, nelle quali lo studente deve costruire procedure risolutive che presentano carattere di novità per lui. In termini di sistemi, se il sistema didattico è quello costruito attorno a un triangolo insegnante, sapere, allievo, il mezzo è, in tale sistema, il sottosistema antagonista dello studente. È attraverso le azioni sul mezzo, attraverso l'interpretazione delle retroazioni del mezzo suscettibili di fornire elementi di validazione della sua soluzione, che lo studente elabora delle modificazioni alla soluzione che ha fornito per il problema.
I rapporti tra disegno e oggetto possono essere caratterizzati dal fatto che le proprietà dell'oggetto geometrico si traducono graficamente in relazioni spaziali. Vi sono però rapporti più complessi tra figura e disegno:
1. un disegno geometrico non necessariamente è interpretato da chi lo osserva come rinviante a un oggetto geometrico;
2. le interpretazioni di uno stesso disegno in quanto *signifiant* (*segno*) di un oggetto geometrico sono tante per due ragioni: la prima è dovuta al fatto che le interpretazioni dipendono dal lettore e dalle sue conoscenze; la seconda è dovuta alla natura stessa del disegno; da solo non può caratterizzare un oggetto geometrico.
Tra l'altro l'interpretazione dipende anche dalla teoria che il lettore ha scelto per interpretare il disegno.

Si presenta Cabri come un ambiente particolarmente adatto all'acquisizione della nozione di *figura* geometrica. Vengono individuate cinque categorie di utilizzazione delle primitive in Cabri:
1. uso delle primitive del tipo *disegno puro*, unicamente fondate sulla percezione, che non resistono allo spostamento dei parametri;
2. uso empirico delle primitive geometriche (non si tratta, però, di disegno puro);
3. uso delle primitive fondato su un'analisi geometrica;
4. uso della primitiva di disegno puro cerchio di base fondata su conoscenze geometriche;
5. uso combinato di primitive di disegno puro e di conoscenze geometriche.
Si può notare un'utilizzazione frequente da parte degli allievi del trascinamento del disegno come mezzo di validazione della figura.
L'aspetto dinamico dei disegni di Cabri è fondamentale per riconoscere invarianti.
Sono gli stessi allievi che si pongono il problema di produrre il fenomeno visivo, di interpretarlo in termini di invarianti e si pongono il problema della sua riproduzione.

Laborde C.: 1995, Cabri-géomètre ou un nouveau rapport à la géomètrie, in *Notiziario UMI XVII Convegno sull'insegnamento della matematica: l'insegnamento della geometria. Temi d'attualità.,* supplemento al n°8-9, Anno XXII.

Si illustrano i vantaggi di Cabri come software per la geometria euclidea, in cui i comandi vengono dati nel linguaggio geometrico, attraverso:
- primitive di disegno puro
- primitive geometriche
- manipolazione diretta del disegno (operazione particolarmente importante, perché se un disegno è stato fatto correttamente, manipolandolo conserva le sue proprietà altrimenti no).

Si descrive la possibilità di sperimentare sul modello, cioè sulla figura costruita come insieme di relazioni:
- siccome una proprietà dipende da altre, per esempio per vedere se un parallelogramma è stato disegnato correttamente è possibile controllare se le diagonali si dimezzano

- oppure si possono sopprimere delle relazioni e vedere se la relazione che supponiamo dipendere da queste non è più soddisfatta.

Laborde C. & Laborde J.M.: 1992, Problem Solving in Geometry: From Microworlds to Intelligent Computer Environments, in *Mathematical Problem Solving and New Information Technologies. Research in Contexts of Practice*, NATO ASI Series, Series F Vol. 89.

Obiettivo descritto nell'articolo è l'identificazione, negli ambienti basati sul computer, delle caratteristiche delle situazioni problema che possono favorire la costruzione di nuovi strumenti di risoluzione da parte di colui che apprende.
Si prendono in considerazione i problemi in geometria con la scelta di alcuni criteri:

- i problemi a risposta aperta (es. problema di Varignon)
- gli strumenti disponibili o le azioni che possono fare gli studenti (azioni primitive)
- il feedback, importante perché è un fattore di evoluzione dei processi di risoluzione.

La percezione è vista sia come strumento di soluzione che di validazione.
Le figure in geometria hanno un ruolo complesso. Si distingue tra disegno e figura. L'aspetto percettivo e quello teorico possono cooperare o entrare in conflitto, come ha mostrato Duval. Per es. nel problema di Varignon il disegno può portare gli studenti a occuparsi dei lati del quadrilatero e non delle diagonali, perché non sono disegnate. Ma per la soluzione occorrono le diagonali. Ciò è difficile per gli studenti. Con Geometric Supposer gli studenti concludono che se ABCD è un rombo, MNPQ è un rettangolo e se ABCD è un rettangolo, MNPQ è un rombo. Il software non aiuta a vedere le variazioni della figura. In Cabri è più facile perché la figura varia in maniera continua. Si viene indotti a tracciare le diagonali se si mantiene MNPQ rettangolo. Con carta e matita gli studenti non tracciano in genere le diagonali.

Lolli, G.: 1997, Morte e resurrezione della dimostrazione, *Le Scienze*, n.345, 50-57.

Articolo comparso recentemente su Le Scienze, di alta divulgazione, è una risposta, sotto certi aspetti anche divertente, all'articolo *Morte della dimostrazione* di John Horgan apparso sulla stessa rivista nel 1993. Gabriele Lolli, con la solita competenza e chiarezza, illustra i motivi per cui la dimostrazione, se mai l'avesse persa, ha riacquistato presso i matematici piena vita e dignità.

Marchini, C.: 1992, Procedimenti dimostrativi presenti nei manuali scolastici, in Furinghetti, F. (editor) *Definire, argomentare, dimostrare. Atti del secondo internucleo scuola secondaria superiore*, Genova 1991, Quaderno TID - CNR, serie FMI, n.13, 97-110.

In questo articolo Carlo Marchini presenta una serie di passi tratti dai vari manuali scolastici per mostrare gli schemi di inferenza che vengono usualmente utilizzati nelle dimostrazioni effettuate sui libri di testo. Gli schemi di riferimento sono quelli della deduzione naturale.

Mariotti, M.A.: 1998, Introduzione alla dimostrazione all'inizio della scuola secondaria superiore, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate,* vol.21B, n.3.

L'autrice distingue tra processi euristici di costruzione del sapere e processi di sistemazione rigorosa di questo sapere. Insieme con Hanna, Schoenfeld, Greeno l'autrice si esprime a favore dell'importanza e del valore della dimostrazione nell'educazione matematica. Non solo nella geometria, ma anche nell'algebra, che sembra essere del tutto refrattaria ad una trattazione teorica a livello scolastico. Il problema della dimostrazione riguarda tutta la matematica. L'articolo è suddiviso in varie parti:

<u>Il problema della dimostrazione.</u>

A seguito delle difficoltà dei ragazzi a comprendere il senso di quanto viene loro chiesto (produrre dimostrazioni autonomamente) si evidenziano i seguenti punti nodali:

difficoltà a motivare gli allievi al dimostrare

difficoltà di distinguere tra argomentazione e dimostrazione matematica.

Viene presentato il progetto didattico, fondato sull'uso dell'ambiente Cabri e della discussione matematica.

La geometria a scuola.
Si possono distinguere due approcci: deduttivo ed empirico. L'educazione dovrebbe fornire un'ampia varietà di esperienze geometriche dalle quali spontaneamente emerge una concettualizzazione coerente con la teoria matematica. Questo non c'è nella pratica scolastica.
Problema: Come trattare la delicata relazione tra la base di conoscenze geometriche che i ragazzi hanno e un nuovo approccio a queste conoscenze secondo una prospettiva teorica? Occorre introdurre il senso della dimostrazione e il senso della teoria. La proposta dell'autrice consiste nel passaggio dal ragionamento argomentativo a quello deduttivo.
Il contributo di Cabri.
Non solo come supporto didattico, ma come parte essenziale del processo di insegnamento/apprendimento. Le attività in Cabri sono particolarmente utili per lo sviluppo di una interazione corretta tra componente figurale e concettuale del ragionamento geometrico.
Il compito di costruzione.
Esso consiste nel passare dall'idea di costruzione (senso empirico) in Cabri all'idea di teorema di geometria (senso teorico).
Attività in classe:
1. fornire una procedura per ottenere una figura
2. fornire una giustificazione per la correttezza della costruzione.

La giustificazione deve essere data all'interno di un particolare sistema teorico.
Le discussioni collettive.
Dal confronto delle diverse procedure di disegni si approda alla validazione in termini del sistema di regole definite.
Evoluzione del significato di giustificazione. Esempi.
Es. Costruire con Cabri il punto medio di un segmento. Descrivere e giustificare geometricamente la costruzione eseguita.

Simon, M.A.: 1996, Beyond inductive and deductive reasoning: the search for a sense of knowing, *Educational Sudies in Mathematics*, 30, 197-210.

Si presenta una forma differente di ragionamento, differente da quello deduttivo e induttivo, il *trasformational reasoning*, che si genera con la ricerca dello studente di come funziona un certo

sistema matematico. Le riforme dei curricula suggeriscono che la partecipazione degli studenti all'attività matematica in classe includa non solo la generazione delle idee matematiche, ma anche la loro validazIone e modificazione. Balacheff, Van Dormolen, Bell hanno focalizzato la loro attenzione sul ragionamento induttivo e deduttivo. In questo lavoro Simon ritiene che la caratterizzazione dell'esplorazione matematica mediante ragionamento induttivo e deduttivo sia incompleta. La conoscenza è spesso il risultato di osservazioni mentre l'oggetto di conoscenza sta funzionando. Il chiedersi in che modo funziona tale oggetto porta all'attivazione di un terzo tipo di ragionamento, che Simon chiama trasformazionale, che non è una raccolta di osservazioni, ma lo sviluppo di un feeling per il sistema che si sta studiando. Transformational reasoning: "l'aver luogo fisico o mentale di un'operazione o di un inseme di operazioni su un oggetto che porta a rivedere le trasformazioni cui tali oggetti sono soggetti e l'insieme dei risultati di tali operazioni". Centrale per il transformational reasoning è l'abilità a considerare non uno stato statico, ma un processo dinamico dal quale un nuovo stato o una continuità di stati vengono generati.
Il transformational reasoning è ragionamento per analogia, ragionamento anticipatorio. Può non solo produrre un differente modo di pensare agli oggetti matematici, ma può anche portare a un diverso insieme di domande e di problemi.
Simon porta quasi tutti esempi di situazioni geometriche, ma dice che il trasformational reasoning può estendersi ad altre aree matematiche.
Secondo Simon vi è naturale inclinazione al transformational reasoning, ma essa non viene favorita dalla scuola.

Thurston, W.P.: 1994, On proof and progress in mathematics, *Bulletin of the American Mathematical Society,* v.30, n.2, 161-177.

Memorabile risposta all'articolo di Jaffe e Quinn da parte di una medaglia Fields: partendo dalla sua esperienza personale Thurston costruisce un suggestivo affresco dell'attività (e dei doveri) del matematico, del ruolo del linguaggio matematico come strumento di comunicazione e, di riflesso, di quello della dimostrazione nell'attività del matematico.

APPENDICE

Test informativo sui *sensi* degli studenti nei confronti della dimostrazione

Premessa

Prima di avviare attività didattiche finalizzate alla trattazione di un certo concetto è utile cercare di capire se e quali concezioni, eventualmente implicite e inconsapevoli, gli studenti hanno relativamente all'oggetto di studio. Il test che qui presentiamo si propone proprio questo obiettivo: quello di ottenere informazioni sui *sensi* che gli studenti hanno nei confronti delle dimostrazioni, ossia sull'insieme delle concezioni che gli studenti si sono costruiti, durante le esperienze scolastiche ed extra scolastiche, sulla nozione di dimostrazione.

In particolare, uno degli scopi del test è vedere se si rilevano negli studenti alcuni dei comportamenti osservati in Harel & Sowder, (1996, in stampa):

- gli studenti sono maggiormente impressionati dalla forma con cui una dimostrazione viene presentata (schema rituale/simbolico) o dalla fonte che la propone (schema autoritario), piuttosto che non dalla sua correttezza e dalla sua completezza
- gli studenti sembrano prediligere l'esibizione di esempi, che considerano maggiormente affidabili rispetto a una dimostrazione (schema empirico).

Infine il test dovrebbe contribuire a fornire informazioni sulla difficoltà da parte degli studenti ad accettare certe regole della logica classica deduttiva.

Qui di seguito vengono elencati comportamenti e difficoltà che abbiamo cercato di rilevare con il test.

Difficoltà :

D1. articolazione ipotesi-teorema-conclusione;

D2. ruolo del controesempio;

D3. regola di introduzione della disgiunzione;

D4. regola di generalizzazione (introduzione del quantificatore universale);

D5. regola di particolarizzazione (eliminazione del quantificatore universale);

D6. regola di introduzione dell'implicazione.

Comportamenti o “schemi” (Harel & Sowder, 1996; in stampa):
S1. rituale-simbolico
S2. autoritario

Precisazioni varie

Il ricorso a questionari scritti del tipo di quello da noi proposto è stato ed è oggetto di critiche e perplessità senza dubbio motivate. Siamo d’accordo sul fatto che l’osservazione puntuale e sistematica dei comportamenti degli studenti durante la normale attività di lavoro e sul lungo periodo offra dati più numerosi e significativi, soprattutto quando si vogliano ottenere informazioni su un ben precisato gruppo di studenti o su una classe particolare. L’obiettivo del test era però quello di confermare ipotesi avanzate nella ricerca didattica sui *sensi* degli studenti nei confronti della dimostrazione. Poiché si tratta di testare un’ipotesi riferita a comportamenti generali e non relativi a una particolare classe o a determinati studenti, abbiamo ritenuto che la proposta di un questionario scritto a studenti di varie classi avrebbe potuto costituire un discreto strumento di indagine (gli studenti che hanno risposto al questionario sono poco più di cento). L’indagine è stata affinata con interviste rivolte ad alcuni studenti durante le attività di lavoro gruppo nelle classi che hanno effettuato la sperimentazione durante l’a.s.1996/97 e che hanno confermato il quadro fornito dalle risposte al questionario.

Ci è sembrato significativo indagare se gli allievi danno la stessa importanza alle informazioni scritte in linguaggio simbolico e a quelle scritte in linguaggio naturale o se esistono convinzioni indotte dall'esterno che portano a prediligere le informazioni date nel linguaggio simbolico. Ecco perché sono state proposte (nella domanda 1 del test) una argomentazione corretta, ma condotta senza ricorrere ad alcun simbolo e due scorrette condotte secondo il rituale simile a quello usato in molte dimostrazioni matematiche presentate sui libri di testo, in cui si usano simboli, per vedere se sono entrambe accettate (una delle due scorrette usa esclusivamente simboli[31], l'altra fa uso di un linguaggio misto). Secondo Harel &

[31] Si è fatto volutamente un uso spinto della simbologia, proprio per vedere

Sowder (1996; in stampa), accettare dimostrazioni scorrette sulla base della loro apparenza rivela serie carenze nella propria educazione matematica, attribuibili all'eccessiva enfasi che l'educazione scolastica mette nel richiedere dimostrazioni scritte prima ancora che gli studenti abbiano prodotto, compreso, apprezzato e accettato dimostrazioni (e i risultati a cui tali dimostrazioni si riferiscono).

Le altre domande dovrebbero essere utili a evidenziare il livello di accettazione di determinate regole logiche che troppo spesso sono ritenute *naturali* per gli studenti, ma che invece sembrano in realtà poco naturali.

Domanda 2: eliminazione del quantificatore universale (si indaga sul valore che lo studente dà a proposizioni di carattere universale).

Domanda 3. Introduzione del quantificatore universale (si indaga sul ruolo dell'esempio generico per lo studente).

Domanda 4. Introduzione della disgiunzione (dagli studenti non viene in genere accettata, perché in generale non viene accettata la *dissipazione semantica:* sembra inutile aggiungere *qualcosa che non è vero* a informazioni corrette).

Domande 5. e 6. Ruolo del controesempio.

Domanda 7. Introduzione dell'implicazione.

Domande

1. Qui di seguito ti vengono proposti i testi di tre esercizi assegnati in classe e le relative risoluzioni di uno studente, Ariele. Per ciascuna di esse, evidenzia eventuali errori di carattere logico, oppure segnala passi che non ti convincono, che eventualmente non comprendi, che ritieni non sufficientemente giustificati. Alla fine di ogni risoluzione hai a disposizione un riquadro per effettuare i commenti che ti sono stati richiesti. Dì anche se, nel complesso, la risoluzione ti sembra accettabile, cercando di spiegare brevemente i motivi della tua valutazione.

Testo del primo esercizio proposto ad Ariele:

risolvi la seguente equazione

---

se lo studente si lascia influenzare principalmente dalla forma piuttosto che dal contenuto della dimostrazione.

$$\frac{4x+6}{x^2-4}=\frac{2}{x^2-4}+\frac{3}{x-2}$$

Risposta di Ariele:

data l'equazione numerica frazionaria

$$\frac{4x+6}{x^2-4}=\frac{2}{x^2-4}+\frac{3}{x-2}$$

dopo aver scomposto $x^2 - 4$ *in* $(x-2)(x+2)$ *riduco entrambi i membri allo stesso denominatore ottenendo*

$$\frac{4x+6}{(x-2)(x+2)}=\frac{2}{(x-2)(x+2)}+\frac{3(x+2)}{(x-2)(x+2)}$$

Addizionando a secondo membro le due frazioni aventi lo stesso denominatore ottengo

$$\frac{4x+6}{(x-2)(x+2)}=\frac{2+3x+6}{(x-2)(x+2)}$$

Moltiplicando entrambi i membri per il denominatore delle due frazioni ho l'equazione numerica intera di secondo grado equivalente alla data (grazie all'applicazione del secondo principio)

$4x+6= 8+3x$

E, infine, ottengo l'equazione equivalente $x=2$ *che consente di individuare immediatamente la soluzione dell'equazione. Anche la verifica è immediata, infatti* $4(2)+6=8+3(2)$ *come volevasi dimostrare.*

Pensi che la risoluzione di Ariele sia nel complesso accettabile? Giustifica la tua risposta, segnalando, se ne trovi, errori di carattere logico, oppure segnala eventuali passi che non ti convincono o che non comprendi o che ritieni non sufficientemente giustificati. Usa il seguente riquadro per i commenti che ti sono stati richiesti.

Testo del secondo esercizio proposto ad Ariele:

è vero che se x e y sono due numeri reali tali che la loro somma è 10, allora x è diverso da 3 e y è diverso da 8?

Risposta di Ariele:

Ipotesi	*Tesi*
$x \in \mathbf{R}$	$x \neq 3 \wedge y \neq 8$
$y \in \mathbf{R}$	
$x+y = 10$	

Dimostrazione
Conduco la dimostrazione per assurdo.
$(\sim(x \neq 3 \wedge y \neq 8) \Rightarrow (x=3 \wedge y=8) \Rightarrow (x+y)=11 \Rightarrow \sim (x+y = 10))$ $\Rightarrow \sim\sim(x \neq 3 \wedge y \neq 8) \Rightarrow (x \neq 3 \wedge y \neq 8)$ c.v.d.

Pensi che la risoluzione di Ariele sia nel complesso accettabile? Giustifica la tua risposta, segnalando, se ne trovi, errori di carattere logico, oppure segnala eventuali passi che non ti convincono o che non comprendi o che ritieni non sufficientemente giustificati. Usa il seguente riquadro per i commenti che ti sono stati richiesti
Testo del terzo esercizio proposto ad Ariele:
Dimostra che il prodotto di tre numeri naturali consecutivi è divisibile per 6
(Nota bene: tre numeri *a, b, c* tali che $a<b<c$ si dicono consecutivi se $b=a+1$ e $c=b+1$.)

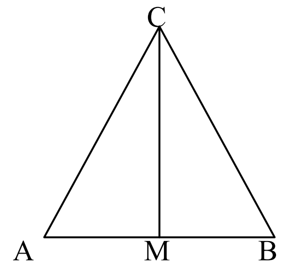
Risposta di Ariele:
Comunque siano presi tre numeri naturali consecutivi, almeno uno dei tre è pari e uno dei tre è multiplo di 3. Quindi il loro prodotto è un multiplo di 6, il che è ciò che volevamo dimostrare.

Pensi che la risoluzione di Ariele sia nel complesso accettabile? Giustifica la tua risposta, segnalando, se ne trovi, errori di carattere logico, oppure segnala eventuali passi che non ti convincono o che non comprendi o che ritieni non sufficientemente giustificati. Usa il seguente riquadro per i commenti che ti sono stati richiesti.

2. Calibano ha dimostrato che, per ogni A e per ogni B,
$A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2)$.
Il suo insegnante gli ha chiesto di dimostrare che
$1234^3 + 173^3 = (1234+173)(1234^2 - 1234*173 + 173^2)$. Calibano è rimasto perplesso.
Tu come effettueresti la dimostrazione che l'insegnante ha chiesto a Calibano? Rispondi nel seguente riquadro.

3. Ariele ha effettuato la seguente dimostrazione:
Considero il triangolo isoscele ABC della figura. Considero la mediana CM relativa alla base AB e voglio dimostrare che tale

mediana è anche altezza. Allo scopo considero i due triangoli AMC e BMC della figura.



Essi sono congruenti per il terzo criterio, infatti AC = CB perché il triangolo è isoscele. CM in comune e AM = MB perché CM è mediana. Quindi i due triangoli di figura hanno congruenti anche gli angoli adiacenti <AMC e <BMC che, pertanto, sono retti. Allora CM è anche altezza. Quanto ho dimostrato vale anche per tutti i possibili triangoli isosceli del piano e non solo per quello di figura, sul quale ho condotto il mio ragionamento.

Sei d'accordo con la dimostrazione di Ariele? Egli può concludere che la sua dimostrazione ha carattere generale, ossia si applica a tutti i triangoli isosceli? Rispondi alle domande poste e giustifica le tue risposte nel seguente riquadro.

4. Ariele ha affermato che
Poiché x^2+1 *è maggiore di 0, qualunque numero reale x si consideri, posso concludere che* x^2+1 *è maggiore o uguale di 0, qualunque numero reale x si consideri.*
Ritieni che il ragionamento di Ariele sia corretto? Rispondi e giustifica la tua risposta nel seguente riquadro.

5. Ariele ha affermato:
non esiste un numero reale tale che $x^2 + 1 = 0$
e ha giustificato la sua affermazione dicendo
se prendiamo -1 *e lo eleviamo al quadrato otteniamo* $1+1$*, diverso da 0.*
Secondo te:

[a] la spiegazione di Ariele può essere considerata una dimostrazione, in quanto è sufficiente un controesempio per provare una proposizione che ha per dominio tutti gli oggetti di un discorso.
[b] la spiegazione potrebbe assumere il valore di una dimostrazione se venisse dato un maggior numero di esempi.
[c] la spiegazione non può essere considerata una dimostrazione.
Segna con una croce quale delle opzioni [a], [b], [c] ritieni corretta. Puoi aggiungere un breve commento alla tua risposta nel riquadro seguente.

6. Ariele ha detto:
ogni numero primo è dispari.
La sua affermazione è
[a] vera, se si eccettua 2, che è primo e pari
[b] falsa
[c] vera
[d] né vera né falsa
Segna con una croce quale delle opzioni [a], [b], [c], [d] ritieni corretta. Puoi aggiungere un breve commento alla tua risposta nel riquadro seguente[32].

Commenti su alcune risposte fornite

In precedenza abbiamo cercato di precisare perché il questionario scritto ci è sembrato uno strumento informativo adeguato ai nostri scopi. D'altra parte il numero di studenti a cui il test è stato somministrato è a nostro avviso troppo esiguo per rendere significative analisi quantitative delle risposte. Ci sembra invece possibile individuare comportamenti o risposte paradigmatiche, che rivelano determinate tendenze e, soprattutto, confermano le ipotesi delle ricerche che abbiamo utilizzato come ipotesi di lavoro.

---

[32] Ci è stato fatto notare che l'opzione [a] è un'inutile 'cattiveria'. In effetti, le risposte degli studenti a questa domanda sarebbero state più significative senza la presenza dell'opzione [a]. D'altra parte, molti studenti a cui, in altri questionari, era stata proposta la stessa domanda in forma vero/falso, avevano sentito il bisogno di precisare che la proposizione che la proposizione è vera se si esclude il numero 2.

I commenti che qui presentiamo sono relativi a risposte di alcuni studenti che possono essere considerate, appunto, paradigmatiche. Anche i quesiti discussi sono solo una parte di quelli proposti. Abbiamo scelto quelli che hanno fornito informazioni più significative.

Molti studenti ritengono maggiormente convincenti argomentazioni presentate in forma rituale o simbolica, suggerendo la presenza di schemi rituali e autoritari.

Per esempio Simona, rispondendo alla domanda 1C del test dice:

"Penso che la risposta di Ariele sia troppo a livello intuitivo. Avrebbe potuto dare una spiegazione più matematica:
abc = q divisibile per 6
$n(n+1)(n+2) = n^3+n^2+2n+2n^2= ... = n(n^2+3n+2)$
Risolvendo l'equazione tra parentesi n=2, 1 (escludendo n=0). Le due risoluzioni danno 6n, 12n, entrambi divisibili per 6."

Inoltre emergono in tutta la loro evidenza schemi di carattere empirico.

Per esempio, Manuela dice rispondendo alla stessa domanda:

"Secondo me è nel complesso accettabile, forse io da sola non ci sarei arrivata, comunque ho provato a fare degli esempi e mi è sembrata corretta, forse anche lui avrebbe dovuto portare degli esempi a suo favore ..."

e produce alcuni esempi.

Mario scrive (sempre relativamente al quesito 1C):

"Occorreva fare una dimostrazione più precisa aiutandosi con l'algebra, anche se nel complesso ciò che afferma Ariele corrisponde a verità."

Si nota qui lo schema autoritario/rituale della dimostrazione, rafforzato dalla accettazione da parte di Mario della giustificazione prodotta nel quesito 1B.

Per quanto riguarda le risposte al quesito 2, ci limitiamo a osservare che nessuno studente ha scritto semplicemente che si tratta di un caso particolare di una formula valida per tutti i numeri reali. Ciò conferma che la regola di eliminazione del quantificatore non è ritenuta molto naturale dagli studenti. Forse è maggiormente naturale l'introduzione del quantificatore, anche quando non è permessa, ossia quando viene effettuata sulla base di alcune osservazioni empiriche.

D'altra parte ciò non è sorprendente, dato che vi sono vari studi che mettono in evidenza come alcune regole della logica formale siano accettate con maggiore difficoltà di altre dagli studenti, che, nei loro ragionamenti, usano regole non logiche, nel senso che la loro verità non risulta invariante per ogni possibile interpretazione. Il fatto che il modo in cui funziona la mente umana, ossia il modo in cui viene rappresentata la conoscenza e il modo in cui si compiono inferenze sia differente da quello della logica matematica non deve stupire più di tanto. Intanto l'inferenza logica è monotona, ossia se da un insieme di premesse si possono trarre certe conclusioni, aggiungendo a quelle premesse altre premesse, si possono ancora trarre almeno tutte le conclusioni che si era in grado di trarre prima. Nuove premesse non possono diminuire il numero di conclusioni che si è in grado di fare. Il ragionamento di senso comune non è monotono. Le conclusioni che traiamo in genere sono solo di carattere probabilistico e nuove informazioni possono modificarle sostanzialmente. Noi ragioniamo spesso su prototipi, ossia su esempi tipici, e da essi traiamo conseguenze che siamo pronti a ritrattare se scopriamo di trovarci in situazioni atipiche. Per esempio dal fatto che Joe è un uccello concludiamo che possa volare, essendo pronti a ritrattare la conclusione se nuove informazioni ci dicono che Joe è uno struzzo o che Joe ha un'ala rotta. Questo atteggiamento è necessario per effettuare inferenze in tempi ragionevoli. Nella logica non è così.

Altre regole che gli studenti fanno più fatica ad accettare sono quelle dell'introduzione della disgiunzione, perché sono più inclini a dire tutta la verità, come si deve fare in un tribunale, piuttosto che la verità. Anche questo fatto è stato confermato dall'analisi delle risposte al test, in particolare di quelle relative al quesito 4, alcune delle quali riportiamo qui di seguito:

"Non va bene, perché è maggiore, non uguale a 0."

"No, il ragionamento di Ariele non è corretto, perché se x^2+1 fosse uguale a 0, allora x^2 sarebbe uguale a -1, il che non è possibile, perché un numero elevato al quadrato è sempre positivo."

"... Ariele deve concludere che $x^2+1 > 0$ per ogni x e non maggiore o uguale a 0!"

Nelle risposte alla domanda 6 gli studenti, nella grande maggioranza, tendono a dire che la proposizione è vera tranne che per 2. In altri termini, anche quando trovano un controesempio non considerano falsa la proposizione, ma restringono il dominio della stessa. Questo è un atteggiamento pienamente giustificato nell'ambito del comportamento quotidiano e, quindi, nell'ambito del ragionamento di senso comune: sapendo che una determinata situazione vale tranne che in alcuni casi, che ragione c'è di considerarla falsa con la conseguenza (relativamente al senso comune) di rifiutare il valore semantico e le informazioni che la stessa proposizione fornisce? Molto meglio precisarne le condizioni di validità. In tal modo non c'è dissipazione semantica. Secondo Zazkis (1995), ciò porta alla opportunità, anche in ambito didattico, di iniziare a prendere in considerazione logiche non classiche, in particolare le *fuzzy logics*.

Ci siamo limitati a indicare i dati che ci sembrano emergere con maggior forza dall'analisi delle risposte degli studenti al test e dai successivi colloqui informali avuti con alcuni di essi. Bisogna però aggiungere che, nonostante le linee di tendenza che abbiamo individuato emergano con una certa chiarezza, è anche vero che si sono osservate significative differenze fra alcune delle classi esaminate. In una di esse, per esempio, la gestione di proposizioni universali è risultata molto più efficace che nelle altre. Ciò suggerisce l'ipotesi che si possa educare all'uso di una certa logica. Ma quello di cui deve essere ben conscio l'insegnante è che non si può considerare innata, ossia *naturalmente* posseduta dagli studenti la logica classica. Partire da tale presupposto vuol dire precludersi la possibilità di un'azione e di un dialogo efficaci con i propri studenti.

BIBLIOGRAFIA

Duval, R.: 1991, Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration, *Educational studies in mathematics*, 22, 231-261.

Harel, G. & Sowder, L.: 1996, Classifying processes of proving, in A. Gutierrez & L. Puig (eds), *Proceedings of PME 20* (Valencia), v.3, 59-65.

Harel, G. & Sowder, L.: in stampa, Students' proof schemes, in J. Kaput (ed.), *Research on collegiate mathematics.*

Zazkis, R.: 1995, Fuzzy thinking in non-fuzzy situations: understanding students' perspective, *For the learning of mathematics*, v.15, n.3, 39-41.