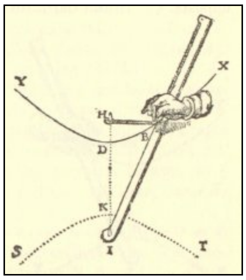
La costruzione di un menu di *Cabri-géomètre*: un'esemplificazione didattica per lo studio delle coniche[1]



Luigi Tomasi

Riassunto In questo articolo si illustra come si possa costruire, a partire da una serie di "macro" di *Cabri-géomètre*, un menu "personalizzato" e adatto allo studio di uno specifico argomento di geometria. Si presenta, come esemplificazione didattica, la costruzione di un menu dedicato allo studio delle coniche. Questa possibilità rende particolarmente flessibile l'uso di *Cabri*, permettendo di adattare le caratteristiche del software al percorso didattico dell'insegnante in una data classe.

Abstract In this article we show how to build, using a series of "macros" of *Cabri-géomètre* as starting point, a "personalized" menu, useful for the study of a specific topic of geometry. We show, as didactic example, the building up of a menu addressed to the study of conics. This possibility makes the use of *Cabri-géomètre* more flexible, allowing to adapt the features of the software to the teacher's didactic path in a specific class.

Luigi Tomasi
Docente di Matematica e Fisica
Liceo Scientifico "Galileo Galilei", Adria (Rovigo)
S.S.I.S. Emilia Romagna, Università di Ferrara
e-mail: luigitomasi99@tin.it

---

[1] Il presente articolo riprende, con alcune integrazioni e in maniera più estesa, il contenuto di una comunicazione tenuta dall'autore al 3° Convegno nazionale della A.D.T. - Associazione per la Didattica con le Tecnologie, Cattolica (Rimini), ottobre 2001.

1. Le coniche, il loro insegnamento e *Cabri-géomètre* [2]

Le possibilità offerte da *Cabri-géomètre*, come strumento per l'insegnamento della geometria (della matematica), sono ben note a molti insegnanti. Forse non è altrettanto usata, dal punto di vista didattico, la flessibilità di questo software, che permette di creare degli "strumenti" personalizzati e di adattare i diversi menu, mediante l'uso delle macro-costruzioni. Alcuni strumenti presenti nelle "caselle" del menu di *Cabri* possono infatti essere tolti oppure, al contrario, se ne possono aggiungere altri. Un insegnante può quindi costruire e far usare ai propri studenti, se lo ritiene didatticamente opportuno, dei menu iniziali meno ricchi di quello solito per poi ampliarli in seguito. In particolare si può, ad esempio, creare un "menu euclideo", del tutto simile a quello che era presente nelle versioni iniziali di *Cabri*, oppure un menu per esplorare particolari argomenti di geometria.
In questo articolo sarà presentata, come possibile esemplificazione didattica, la costruzione di un menu di *Cabri* per lo studio delle coniche, un argomento classico, presente quasi in ogni curricolo di matematica, ma che nell'insegnamento soffre forse di un'eccessiva formalizzazione algebrica, con una quasi sola presenza della geometria analitica su quella sintetica.
Si inizierà con la descrizione di una serie di "macro-costruzioni" che serviranno, per esempio nella classe terza di liceo scientifico, ad arricchire progressivamente il menu di *Cabri*. In questo modo, il software diventerà uno strumento particolarmente efficace per migliorare l'apprendimento di alcune nozioni fondamentali di geometria analitica, rendendole più costruttive ed intuitive, fondate dunque su un'esperienza iniziale di geometria sintetica molto più ricca.
Nelle classi accade normalmente, quando si inizia lo studio della geometria analitica, che quasi si abbandoni l'aspetto sintetico delle figure che si studiano, con la quasi esclusiva presenza del metodo analitico. Sappiamo che questo metodo è molto efficace e potente, ma esso acquista significato solo se gli allievi hanno una buona conoscenza di geometria sintetica. Molto spesso, anzi, soprattutto per le coniche, prevale l'aspetto analitico fino a "nascondere" tutto il resto. In un certo senso, nell'insegnamento, si parte fin dal primo momento

[2] Questo contributo è dedicato alla memoria di Lina Mancini Proia, Maestra nella didattica della matematica, autrice del libro *Il metodo matematico* (scritto con Lucio Lombardo Radice) dove ci ha insegnato come si deve "parlare" delle coniche ai nostri allievi.

da Cartesio (1596 - 1650) e si fanno scarsi riferimenti alle proprietà sintetiche delle coniche, che storicamente sono invece state studiate prima di quelle analitiche; in particolare nell'opera di Apollonio di Perga (ca. 262 - 190 a.C.)[3].
Un software di geometria dinamica, come *Cabri-géomètre*, può aiutare l'insegnante a dare il giusto rilievo didattico ad alcune proprietà fondamentali delle coniche, introducendole, date le notevoli potenzialità dello strumento, in modo costruttivo e dinamico, come se si avesse a disposizione una "macchina matematica" che permette di generare le coniche meccanicamente, tramite l'utilizzo degli strumenti *Traccia* e *Luogo*, prima ancora di arrivare al più raffinato strumento *Conica* (per cinque punti).
Questa impostazione didattica, intuitiva e costruttiva prima ancora di essere analitica, sembra anche corrispondere in modo significativo a quanto è consigliato dai programmi del Piano Nazionale per l'Informatica (1996) dove, per quanto riguarda le coniche, si dice:

> Proseguendo nello studio del metodo cartesiano si definiranno le coniche come luoghi geometrici e se ne scriveranno le equazioni con riferimento a sistemi di assi cartesiani opportunamente scelti. Il cambiamento del sistema di riferimento sarà collegato alla determinazione delle equazioni delle isometrie, già studiate nel biennio in forma sintetica; potrà anche servire per ampliare lo studio delle coniche. (M.P.I., Programmi di Matematica del P.N.I. per il triennio di Liceo Scientifico, settembre 1996).

Cabri-géomètre mette a disposizione diverse possibilità per studiare le coniche, tutte di notevole rilievo didattico. Oltre allo strumento *Luogo*, contenuto nella casella *Costruzioni*, si può usare anche lo strumento *Conica* della casella degli strumenti *Curve* (con le voci *Circonferenza* e *Arco di circonferenza*). Ad un primo livello intuitivo e "sperimentale", per certi versi ludico, si può usare anche lo strumento *Traccia* che, associato con lo strumento *Animazione* (la "molla" di *Cabri*), permette di fare un'esperienza quasi sensoriale della generazione delle coniche. Solo alla fine del percorso si potrà usare lo strumento *Conica* (per cinque punti), uno degli strumenti più sensazionali di *Cabri*. In [4], Paolo Boieri così lo descrive:

> La conica è visualizzata a passi, senza attendere l'assegnazione dei cinque punti. I primi due punti determinano un arco di circonferenza; quando creiamo il terzo punto viene visualizzata una conica e, spostando il mouse, essa può essere deformata passando da ellisse ad iperbole (con molta fortuna si può anche ottenere la parabola e

[3] M. Kline, *Storia del pensiero matematico. Vol. I. Dall'antichità al Settecento*, Einaudi, Torino 1991, p. 107.

la conica degenere data da una coppia di rette); assegnando gli altri due punti si ha il risultato finale.[4]

Per cercare di comprendere lo strumento *Conica* di *Cabri*, occorre ricordare che una conica è determinata da un'equazione di secondo grado, a coefficienti reali, ossia da un'equazione del tipo:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

con la condizione, se la conica è non degenere:

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Il minore estratto dalla matrice precedente togliendo l'ultima riga e l'ultima colonna,

$$M = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$$

determina, con il suo segno, il tipo di conica. Si dimostra, con un procedimento che non si può introdurre nella scuola secondaria superiore, che
se $M > 0$, la conica è un'ellisse;
se $M = 0$, la conica è una parabola;
se $M < 0$, la conica è un'iperbole.
Ponendo $A = a$, $2B = b$, $C = c$, $2D = d$, $2E = e$ ed $F = f$, si ottiene l'equazione:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 .$$

In questa equazione vi sono sei coefficienti, ma dividendo per uno di essi, ad esempio per $a \neq 0$, si vede subito che basta conoscerne soltanto cinque per caratterizzare una conica. Per individuare una generica conica del piano occorrrono quindi cinque equazioni lineari tra loro indipendenti; tali equazioni si possono ottenere imponendo il passaggio per cinque punti del piano. Queste sono, evidentemente, le operazioni che *Cabri* esegue "dietro le quinte" quando, con semplici "clic" del mouse, scegliamo i cinque punti. Nel caso in cui tre dei punti assegnati siano allineati, si ottiene una conica degenere.
Cabri-géomètre possiede inoltre un ambiente di geometria analitica che, tra l'altro, permette di lavorare in modo dinamico ed interattivo con le equazioni

[4] P. Boieri P., A. Ramassotto, Da Cabri 1.7 a Cabri II, in *CABRIRRSAE*, Bollettino degli utilizzatori di Cabri-géomètre, n. 12, IRRSAE Emilia Romagna, Bologna, Giugno 1997.

cartesiane o polari delle coniche. La geometria analitica è quasi tutta disponibile: riferimento cartesiano, creazione e modifica dei sistemi di riferimento, coordinate di punti, equazioni di rette, cerchi e coniche in più sistemi di assi, griglia di punti a coordinate intere e sistema di riferimento polare. I coefficienti delle equazioni delle rette e delle coniche sono visualizzati, salvo casi particolari, in forma approssimata, perché *Cabri* non è un programma di manipolazione simbolica.

È da notare che lo strumento *Conica* è completamente indipendente dallo strumento *Luogo*. Se si disegna una conica con lo strumento *Conica* essa è un nuovo oggetto di *Cabri* che si può intersecare con altri oggetti; si può ad esempio intersecarla con rette, semirette, … e anche altre coniche. Un'altra riprova di questa diversità tra lo strumento *Luogo* e lo strumento *Conica* si ha nell'ambiente di geometria analitica di *Cabri*, dove è possibile ottenere da *Cabri* l'equazione cartesiana oppure polare di una conica solo se è stata ottenuta con lo strumento *Conica*, ma non di una conica ottenuta come *Luogo*.

Come si possono presentare in classe le coniche con l'aiuto di *Cabri* ? Le coniche possono essere definite:

- come *luoghi geometrici piani*: è la definizione più usata quando si introduce questo argomento nel triennio della scuola secondaria superiore ed è utile quando si vogliono determinare le equazioni delle coniche. Questa è anche la definizione raccomandata dai programmi sperimentali per la scuola secondaria (Piano Nazionale per l'Informatica e Programmi elaborati dalla Commissione Brocca). *Cabri* da questo punto di vista è uno strumento notevolissimo, perché possiede fin dalle prime versioni lo strumento *Luogo* (di punti, di rette, di segmenti, di circonferenze, ecc.), che permette di vedere i luoghi geometrici in maniera dinamica, superando la distinzione tra luoghi geometrici e luoghi generati in maniera meccanica. In un certo senso, in *Cabri* tutti i luoghi si generano in modo cinematico.
- possono essere definite, tutte e non soltanto la parabola, usando i fuochi, le direttrici e l'eccentricità. Questa definizione, in particolare, dà ragione dei nomi dati alle coniche dai matematici greci: riferendoci all'eccentricità, ellisse deriva da "mancanza"; iperbole da "eccesso" e parabola da "uguale". Ha il vantaggio didattico di presentare le coniche in modo unitario, ma di solito per gli allievi risulta più difficile della prima, perché in questo modo di vedere le coniche si presenta quasi naturale l'uso delle le equazioni polari piuttosto che si quelle cartesiane.

- come sezioni di un cono con un piano (questo spiega perché si chiamano *coniche*); si tratta della impostazione classica di Apollonio di Perga (fine del III sec. a. C.). In questa presentazione viene privilegiato l'aspetto sintetico piuttosto che quello analitico; richiede però una certa intuizione geometrica dello spazio e abilità nel disegno di situazioni dello spazio. Per collegare inoltre questa definizione con la definizione delle coniche come luoghi geometrici, è necessario ricorrere alle sfere iscritte nel cono e tangenti alla sezione conica (G.P. Dandelin)[5].

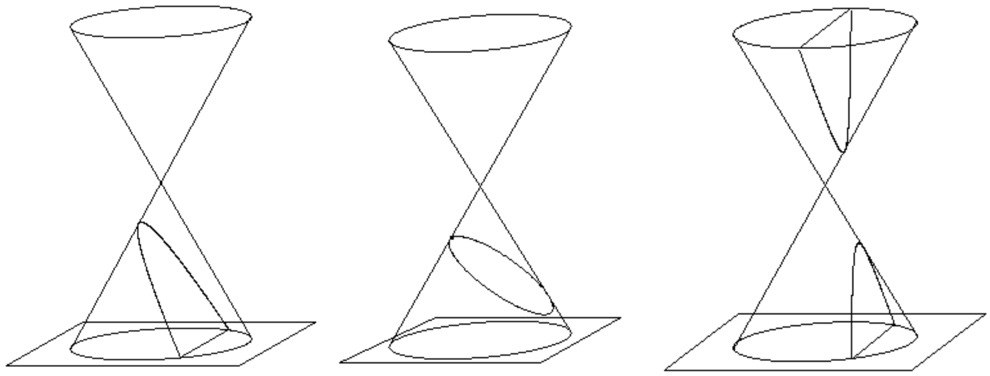


Figura 1. Coniche come sezioni

- come trasformate di una circonferenza tramite una proiettività; questo si presenta di solito difficile a meno che non si trovi un percorso adatto e alla portata della scuola secondaria superiore[6];

[5] Per una presentazione chiarissima di queste figure si veda:
R, Courant, H. Robbins, *Che cos'è la matematica ?*, seconda edizione riveduta da I. Stewart, Bollati Boringhieri, Torino, 2000, p. 262.

[6] Per alcune indicazioni didattiche in tal senso, si veda il seguente libro di testo per le scuole secondarie superiori, uno dei testi più belli ed innovativi per l'insegnamento della matematica: L. Lombardo Radice, L. Mancini Proia, *Il metodo matematico*, vol. 3, Principato, Milano 1979, pag. 68-94.

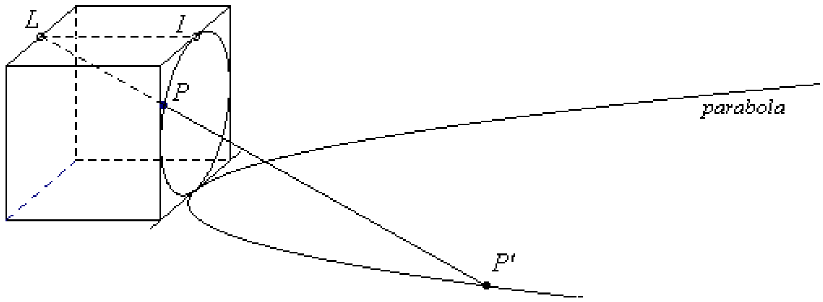


Figura 2. Parabola come proiezione di una circonferenza

- in modo analitico, come curve che soddisfano ad un'equazione algebrica di secondo grado del tipo:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 .$$

Quest'ultima definizione è talvolta presente anche nei libri di testo per la scuola secondaria superiore e soprattutto più avanti, all'università, ma è inizialmente molto astratta. Nella scuola secondaria non può essere presentata all'inizio; eventualmente si può arrivare a questa definizione dopo un percorso didattico abbastanza lungo, che deve necessariamente far uso delle trasformazioni geometriche del piano. Per arrivare infatti alla forma canonica dell'equazione di una conica occorre conoscere le equazioni delle isometrie del piano, in particolare le traslazioni e le rotazioni.
Nella scuola secondaria superiore gli studenti riconosceranno progressivamente i seguenti casi particolari dell'equazione precedente, fermo restando che non si inizierà fin da subito con gli aspetti analitici:

$x^2 + y^2 = r^2$ circonferenza di centro O;

$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$; circonferenza generica

$y = ax^2 + bx + c$ parabola di asse parallelo a y;

$x = ay^2 + by + c$ parabola di asse parallelo a x;

$\pm x^2 \mp y^2 = a^2$ iperbole equilatera di centro O;

$xy = k$ iperbole equilatera riferita ai propri asintoti;

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ellisse di centro O;

$\pm \dfrac{x^2}{a^2} \mp \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ iperbole di centro O;

ma anche le seguenti (ottenute dalle precedenti tramite una traslazione):

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ circonferenza di centro $O'(\alpha, \beta)$;

$\pm(x-\alpha)^2 \mp (y-\beta)^2=a^2$ iperbole equilatera di centro $O'(\alpha, \beta)$;

$(x-\alpha)(y-\beta)=k$ iperbole equilatera di centro $O'(\alpha, \beta)$, riferita ai propri asintoti;

$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ ellisse di centro $O'(\alpha, \beta)$;

$\pm\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}\mp\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ iperbole di centro $O'(\alpha, \beta)$.

Le coniche hanno moltissime applicazioni nelle altre scienze oltre che in matematica. Si possono presentare le applicazioni nella fisica, nell'astronomia, nell'ottica, nell'arte … Si ricordino, ad esempio le proprietà ottiche delle coniche; la traiettoria di un proiettile; il paraboloide e l'antenna parabolica[7]; la sfera; gli specchi sferici; i meccanismi articolati. Per questo si possono vedere le mostre "Oltre il Compasso" e il "Theatrum machinarum" (1998) dell'Università di Modena, i cd-rom collegati, oltre a visitare, oggi, alcuni siti Internet sulle coniche particolarmente belli (vedi bibliografia). Questo tipo di presentazione permette di dare senso e motivazioni allo studio dell'argomento.
Qualunque sia il modo di presentare le coniche scelto dall'insegnante, *Cabri* può dare un contributo notevole per un insegnamento più attivo e dinamico dell'argomento, che certamente può favorire l'apprendimento. Prima di tutto, *Cabri* esegue degli ottimi disegni. Si spera quindi, con l'uso di *Cabri*, di non osservare più, in classe, disegni dell'ellisse o delle altre coniche con delle "punte" (dei punti angolosi). E forse gli allievi si abitueranno a disegnare i rami di un'iperbole in modo che si avvicinino agli asintoti. La caratteristica principale di *Cabri*, comunque, è quella di poter eseguire delle figure che sono dinamiche ed interattive, permettendo tutta una serie di esplorazioni e di congetture che favoriscono un migliore apprendimento dell'argomento.
Si riportano di seguito alcune figure, costruite con *Cabri*, che possono dare un'idea delle varie possibilità di presentazione dell'argomento nella classe terza della scuola secondaria superiore. Le figure saranno successivamente trasformate in macro-costruzioni di *Cabri*.

---

[7] Si veda anche il seguente libro (recentemente ristampato, 2000):
E. Castelnuovo, M. Barra. *Matematica nella realtà*, Boringhieri, Torino 1976.

2. La casella degli strumenti “Macro” di *Cabri*

La casella degli strumenti “Macro” contiene gli strumenti per la creazione delle macro-costruzioni. Durante una sessione di lavoro con *Cabri*, se non è stata ancora creata nessuna macro, la casella contiene soltanto i seguenti strumenti: *Oggetti iniziali, Oggetti finali, Definizione della macro.* Si illustrano qui di seguito le caratteristiche fondamentali di essi.

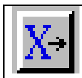
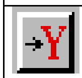
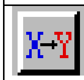
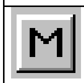
	**Oggetti iniziali**	Permette di definire gli oggetti iniziali di una macro-costruzione.
	**Oggetti finali**	Permette di definire gli oggetti finali di una macro-costruzione.
	**Definizione della macro**	Essendo già stati definiti gli oggetti iniziali e finali, questo strumento controlla la validità della macro, la crea, la registra ed edita un messaggio di aiuto.
	**Macro creata**	Nuovo strumento definito da una macro-costruzione creata dall’utente. Nell’icona della nuova macro è inserita per “default” la lettera M. Si può tuttavia creare una propria icona.

Tabella 1 – Gli strumenti della casella Macro di Cabri.

Le nuove macro-costruzioni create dall’utente vengono incluse in questa casella degli strumenti. Se si esce da *Cabri* e poi si riavvia il programma, le macro costruite dall’utente nella precedente sessione di lavoro sono tolte automaticamente dalla casella Macro e la configurazione degli strumenti ritorna ad essere quella solita, di “default”. Per riavviare il programma con la presenza di una data macro-costruzione, si può mandare in esecuzione *Cabri* mediante un doppio “clic” sull’icona del file contenente la macro-costruzione. Se invece si vuole aprirne più d’una, conviene seguire la procedura diretta che consiste nell’aprire una di seguito all’altra, dopo avere avviato il programma, le macro-costruzioni mediante il menu File/Apri/Solo le macro (estensione *.mac).
Una volta costruita una macro si può scegliere di registrarla sotto forma di file - ovviamente questa è l’operazione consigliata - oppure di non registrarla; in quest’ultimo caso la macro viene perduta quando si esce dal programma.

3. La costruzione di una macro di *Cabri*

Richiamiamo di seguito la costruzione di una macro, seguendo quanto è proposto nella bibliografia in [1] e [5]. Supponiamo di volere trasformare in una macro la costruzione della circonferenza passante per tre punti dati *A*, *B* e C, che equivale a quella della circonferenza circoscritta ad un triangolo. Dopo aver realizzato la costruzione del circocentro del triangolo *ABC*, salviamo la figura ottenuta. La costruzione è molto semplice - una delle prime che si esegue con *Cabri* - ma vogliamo ugualmente registrare il "procedimento" con cui è stata costruita, per poterlo ripetere in altri contesti. In *Cabri-géomètre* questo è possibile grazie ad una macro-costruzione.
Le macro-costruzioni sono, in *Cabri*, l'equivalente dei sottoprogrammi - procedure e funzioni - presenti nei linguaggi di programmazione, perché permettono di memorizzare e riutilizzare una certa costruzione senza essere costretti ogni volta a ripetere tutti i passaggi. A questa necessità risponde la casella degli strumenti "Macro" che permette di registrare su disco lo stesso procedimento costruttivo di una data figura, ampliando le possibilità di *Cabri* e rendendolo uno strumento più flessibile.
Si noti che gli stessi strumenti di *Cabri*, contenuti nelle varie caselle, non sono altro che delle macro-costruzioni. Si possono pertanto aggiungere altri strumenti a *Cabri*, oppure toglierne alcuni, se lo si ritiene didatticamente opportuno, adattando quindi il software alle proprie esigenze didattiche e costruendo eventualmente dei menu "speciali", che servano per sviluppare alcuni argomenti di geometria.

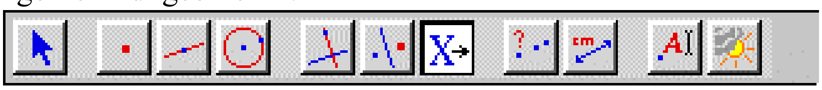
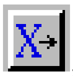
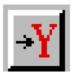
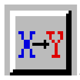


Figura 3 - La barra delle caselle degli strumenti di *Cabri* e la casella Macro.

Per definire la macro-costruzione apriamo (File-Apri) la figura, salvata in precedenza, contenuta in un file. Per definire una macro-costruzione si utilizzano le voci del menu *Macro*, la cui modalità d'uso è la seguente.
Si seleziona l'icona che permette la scelta degli *Oggetti iniziali* della figura e si indicano gli oggetti iniziali. Nel nostro caso vogliamo definire una macro che costruisca la circonferenza passante per tre punti dati. Gli oggetti iniziali sono dunque i tre punti *A*, *B*, *C*; dopo averli selezionati essi iniziano a lampeggiare. Per togliere eventualmente la selezione occorre "cliccare" di nuovo sull'oggetto. L'icona visualizza una X maiuscola e una freccia verso

destra, , per ricordare l'interpretazione delle macro come delle funzioni, in cui gli oggetti iniziali sono da considerare come delle “variabili indipendenti”.
Si seleziona poi l’icona per gli *Oggetti finali* e si assegnano gli oggetti finali; anche in questo caso l'icona è significativa in quanto, continuando nell’interpretazione funzionale delle macro, mostra una freccia ed una Y: .
Nella macro che stiamo costruendo, l’unico oggetto finale è la circonferenza passante per i tre punti dati.

Si passa infine allo strumento *Definizione della macro* , che genera una finestra di dialogo in cui si assegna il nome della macro ed il messaggio di aiuto: è anche possibile assegnare un nome al primo oggetto finale e definire un'icona che viene inserita, insieme al nome della macrocostruzione, nel menu *Macro*.

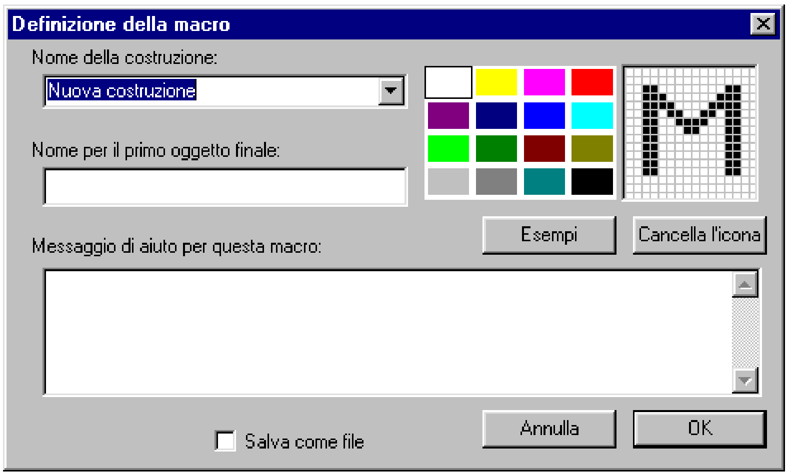


Figura 4 – La finestra di dialogo per la definizione di una macro-costruzione.

È da notare che quest’ultima finestra di dialogo, denominata *Definizione della macro*, compare soltanto se la costruzione eseguita viene ritenuta “valida” da *Cabri-géomètre*. Il programma infatti riesce a stabilire se una data macro è valida oppure no, ovvero se, a partire dagli oggetti iniziali assegnati, è in grado

di costruire gli oggetti finali scelti. Se la costruzione di *Cabri* non è trovata corretta compare invece il messaggio: "Questa macro non è coerente. Cabri non può determinare tutti gli oggetti finali a partire dagli oggetti iniziali assegnati".
Se si vuole si può anche disegnare un'icona che contraddistingua la nuova macro-costruzione. L'icona viene disegnata con un semplice programma grafico in cui si ha a disposizione una matita che riempie di colore i quadratini di un reticolo di 16 per 16. Si noti la convenzione usata dagli autori del software che, nelle icone, indicano con il colore blu gli oggetti dati dall'utente ed in rosso gli oggetti costruiti dalla macro.
Dopo aver registrato in un file la macro, apriamo la casella degli strumenti Macro; si nota che la macro è stata aggiunta, col nome "Circonferenza per 3 punti", in fondo all'elenco; da questo momento essa può essere utilizzata come tutte le altre costruzioni presenti in *Cabri-géomètre*: abbiamo quindi ottenuto un nuovo strumento di *Cabri*.
Le macro costruzioni accettano, come oggetti iniziali e come oggetti finali, tutti gli oggetti di *Cabri*, e anche i "quasi-oggetti", come sono i luoghi geometrici generati dal programma. I luoghi geometrici, infatti, non sono veri e propri oggetti di *Cabri* perché non è possibile fare l'intersezione di un oggetto, ad esempio di una retta, con un luogo geometrico e neppure ottenere l'equazione di un luogo.
È da ricordare che le macro-costruzioni vengono "incorporate" nelle figure che le utilizzano. Quando si apre un file contenente una figura in *Cabri*, non solo viene visualizzata la figura, ma vengono anche "caricate" in memoria le macro-costruzioni utilizzate dall'utente per la figura; le macro, aggiunte alla casella degli strumenti Macro, sono disponibili all'utente, anche quando si chiude la figura in questione e se ne apre un'altra. Queste caratteristiche della memorizzazione delle figure, oltre a facilitare l'uso di *Cabri*, permettono un'ottima leggibilità delle figure e la possibilità di interpretare le figure realizzate da altri utenti.

4. Come creare un menu "ridotto" oppure "aumentato" di *Cabri*

Descriviamo ora come si può costruire un menu ridotto di *Cabri*. Si avvia il programma e si apre il menu Opzioni/Configurazione degli strumenti. Compare la schermata indicata nella fig. 5 riportata di seguito.

Figura 5 - La finestra di dialogo per la configurazione degli strumenti.

A questo punto si aprono le varie caselle degli strumenti e si selezionano gli strumenti che si vogliono eliminare dal menu di *Cabri*. Basta trascinare con il mouse gli strumenti da cancellare e portarli sopra l'icona del "cestino" che nel frattempo è comparsa a destra della barra degli strumenti.

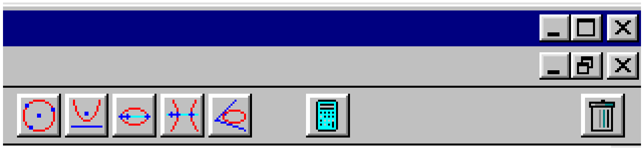


Figura 6 - Il "cestino" nella barra degli strumenti di Cabri.

Quando tutti gli strumenti "di troppo" sono stati eliminati, si può salvare la nuova configurazione degli strumenti e dare ad essa un nome, selezionando la voce "Salva come file". Si può dare ad esempio il nome nuovomenu.men. Il file viene quindi salvato con l'estensione "*.men" che indica un menu di *Cabri*. Se lo si ritiene opportuno, si può anche inserire una parola chiave, una "password", che permette di impedire le ulteriori modifiche del menu da parte di altri utenti nelle successive sessioni di lavoro. Per aprire ad esempio il menu nuovomenu.men si procede nel seguente modo:

- Si avvia *Cabri* e si apre una nuova pagina (File/Nuovo).
- Si usa il menu File/Apri e nella finestra di dialogo si seleziona "Solo gli strumenti (*.men)". Compaiono allora i file con estensione MEN
- Si seleziona un file che contiene un meno, ad esempio nuovomenu.men.

In questo modo viene avviato il programma con la nuova configurazione degli strumenti voluta.
Oltre a creare un nuovo menu, si potrebbe ad esempio cambiare la posizione di un qualche strumento sulla barra degli strumenti, ma questa operazione di

solito non si fa, perché, se si mantengono le stesse posizioni degli strumenti di *Cabri*, si favorisce la memorizzazione dei comandi da parte dello studente e quindi anche la rapidità nell'uso del programma.
Per esercitazione, si può ad esempio aprire il menu *File/Configurazione degli strumenti* e selezionare lo strumento *Calcolatrice*; si trascina tale voce del menu e la si deposita sulla barra degli strumenti a destra delle varie caselle, ma non nel cestino. In questo modo lo strumento *Calcolatrice* diventerà direttamente accessibile nella barra degli strumenti rispetto alla posizione normale, velocizzando in questo modo tutti questi disegni dove si fa un continuo uso di questo strumento. Si vede che *Cabri* aggiunge questo strumento a destra, di seguito a tutti gli altri strumenti.
Operati gli spostamenti voluti, non si ottiene un menu diverso da quello normale - perché gli strumenti rimangono gli stessi - ma vengono cambiate soltanto le posizioni delle icone nella barra degli strumenti. Si potrebbe comunque salvare anche questa nuova "barra" degli strumenti, chiamandolo ad esempio "menuspostato.men".
Ma ciò che è più interessante è la possibilità di creare un menu particolare, finalizzato ad una data situazione didattica, soprattutto se alcune macro di *Cabri* vengono frequentemente usate. Si può quindi creare un menu più adatto al biennio della scuola secondaria superiore od uno più adatto allo studio della geometria analitica; analogamente, si può costruire un menu più ricco ed adatto allo studio, ad esempio, della geometria affine o di quella iperbolica.
Per costruire uno di questi menu, si deve iniziare con la definizione di tutta una serie di macro che poi andranno a formare questo menu. Tali macro devono essere prima di tutto "caricate" in *Cabri*, nella casella Macro, e in seguito spostate nelle caselle più opportune. Basterà, come si è detto in precedenza, aprire il menu Opzioni/Configurazione degli strumenti e cominciare a trascinare le nuove macro a destra delle caselle degli strumenti soliti, raggruppandole in diverse caselle in base alle loro caratteristiche. Di solito conviene collocare tali nuove caselle a destra delle altre, sulla barra degli strumenti, per non creare problemi nell'uso di *Cabri* agli allievi, abituati a trovare i comandi nelle posizioni abituali. Al termine dell'operazione si salva il nuovo menu sotto forma di file.
In vari siti Internet dedicati a *Cabri-géomètre* è possibile prelevare dei menu particolari, finalizzati allo studio di vari aspetti della geometria o ad introdurre in *Cabri* alcune utilità che possono servire nello studio di particolari argomenti di geometria. Alcuni di questi menu sono di particolare interesse per lo studio

dei modelli della geometria non euclidea; si veda ad esempio il menu iperbolico per il modello del disco di Poincaré di geometria iperbolica e quello dedicato al modello di Beltrami-Klein[8].
Nel paragrafo seguente presenteremo la costruzione di un menu di *Cabri* adatto allo studio delle coniche nell'ambito della geometria analitica. Il menu può essere costruito alla fine di un percorso didattico fatto con la classe e che prevede la costruzione di una serie di macro, man mano che l'argomento coniche viene svolto con l'uso di un software di geometria dinamica come *Cabri.*

5. Alcune macro-costruzioni sulle coniche

Nel percorso didattico sulle coniche si seguiranno alcune attività proposte in [1], ma trasformando i vari passi in macro-costruzioni di *Cabri* e creando poi un menu per lo studio delle coniche.
Si inizia costruendo alcune nuove macro dedicate alla circonferenza: le prime sono particolarmente facili e servono per fare familiarizzare gli allievi con la casella degli strumenti *Macro* di *Cabri*. Le successive potranno essere proposte come approfondimenti per la risoluzione di particolari problemi nello studio della geometria analitica.

-Macro-costruzione: *circonferenza per tre punti*
oggetti iniziali: tre punti;
oggetti finali: la circonferenza passante per i tre punti.

[8] Entrambi i menu citati si trovano nel sito di AbraCAdaBRI:
http://www.cabri.net/abracadabri.
Per una presentazione del menu sul modello di Poincaré, vedi: L. Tomasi, *Introduzione al modello di Poincaré della geometria non euclidea iperbolica con Cabri-géomètre II*, in CABRIRRSAE n. 21 - Bollettino degli utilizzatori di software matematici, settembre 1999, IRRSAE Emilia-Romagna, Bologna (ripubblicato in *Progetto Alice*, 2000 II, vol. I, n. 2, pp. 337-350).

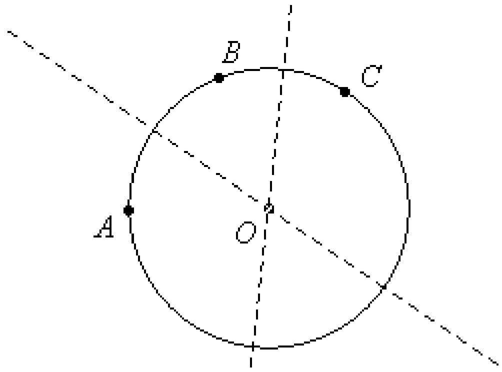


Figura 7 – Una macro semplicissima e molto utile.

-Macro-costruzione: *retta tangente ad una circonferenza in un suo punto*
oggetti iniziali: circonferenza e punto su di essa
oggetti finali: retta tangente alla circonferenza nel punto;

-Macro-costruzione: *rette tangenti ad una circonferenza condotte da un punto esterno*
oggetti iniziali: circonferenza e punto esterno
oggetti finali: rette tangenti passanti per il punto alla circonferenza data;

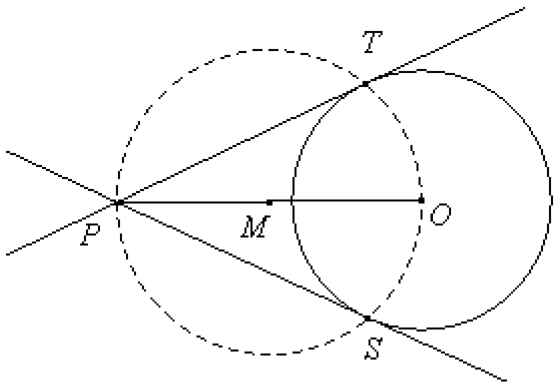


Figura 8 - Tangenti alla circonferenza da un punto.

-Macro-costruzione: *asse radicale di due circonferenze* (per la costruzione di questa macro si veda [3])
oggetti iniziali: due circonferenze
oggetti finali: asse radicale.

Date le due circonferenze, scegliamo due punti P e Q sulla prima ed un punto R sulla seconda. Usando la macro circonferenza per tre punti tracciamo una terza circonferenza che interseca la seconda circonferenza in S oltre che in R. Ci si può dunque sempre ricondurre alla costruzione dell'asse radicale di due circonferenze incidenti. I due assi radicali a_1 e a_2 si incontrano in un punto I. Dal punto I basta tracciare la perpendicolare a alla retta r dei centri. Questa retta è l'asse radicale cercato. La costruzione viene trasformata in una macro.

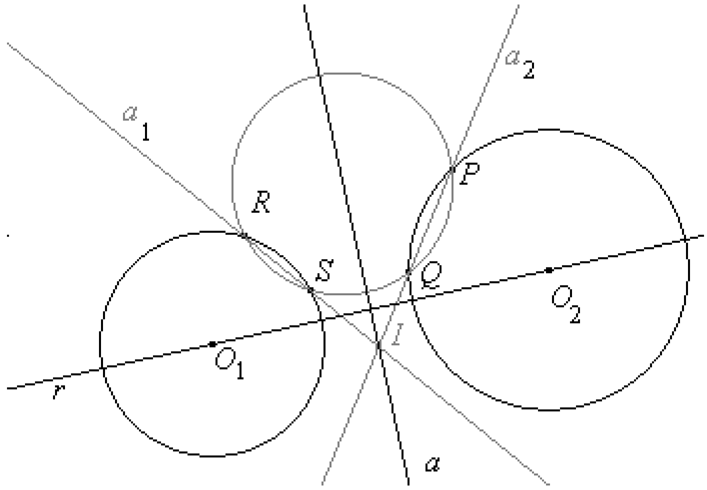


Figura 9 – Costruzione dell'asse radicale di due circonferenze.

-Macro-costruzione: *circonferenze passanti per due punti e tangenti ad una retta data*:

oggetti iniziali: una retta e due punti (nello stesso semipiano);

oggetti finali: circonferenze passanti per i due punti e tangenti alla retta data.

Questa macro è stata costruita per fornire un esempio di risoluzione sintetica di un problema che di solito viene presentato nei libri di testo solo in modo analitico, parlando delle "condizioni" per determinare l'equazione di una circonferenza.

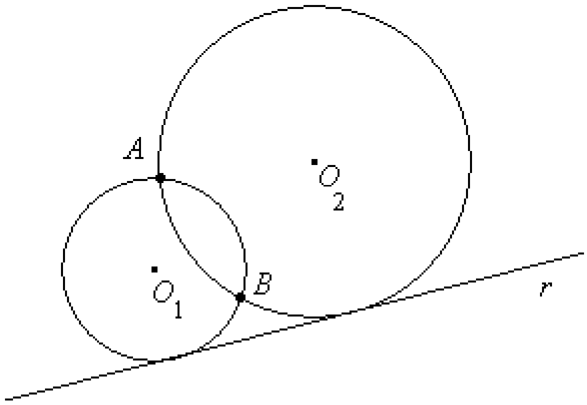


Figura 10 - Circonferenze per due punti e tangenti ad una retta.

Quando si installa *Cabri* in un computer, vengono automaticamente create le cartelle *Figure* e *Macro*. In quest'ultima cartella sono contenute diverse macro, anche molto utili. Riguardo alle coniche sono presenti alcune utilissime macro-costruzioni, ricavate tutte dallo strumento *Conica* (per 5 punti), che possono essere interessanti dal punto di vista didattico, per disegnare le coniche, per determinare le rette tangenti da un punto esterno oppure da un punto appartenente alla conica e, successivamente, per lo studio delle coniche dal punto di vista analitico.

Evidentemente gli autori di *Cabri* hanno preferito mettere a disposizione alcune macro sulle coniche che utilizzano tutte lo strumento *Conica* (per 5 punti), perché sappiamo che non è possibile ottenere da *Cabri* l'equazione di una conica ottenuta usando lo strumento *Luogo*.

L'impossibilità di ottenere l'equazione di un luogo non è una limitazione di *Cabri*: se si pensa alla varietà di luoghi che si possono ottenere con questo software, è evidente che non ci sarà anche in futuro la possibilità di ottenere l'equazione di tutti i possibili luoghi che si possono creare con il software. Come sappiamo, con *Cabri*, possiamo ottenere non solo luoghi algebrici, ma anche trascendenti e che si prestano ad essere espressi più facilmente con equazioni parametriche o polari. E' quindi facilmente comprensibile che nessun software - nemmeno *Cabri* - sia in grado di fornire l'equazione di una qualsiasi curva tracciata come luogo di punti. Tuttavia su di un luogo di *Cabri* c'è la possibilità di scegliere un punto con lo strumento "Punto su un oggetto". In altre parole i luoghi di *Cabri* sono dei "quasi-oggetti".

Per controllare tuttavia, in modo empirico, se una data curva ottenuta con *Cabri* è una conica si può procedere nel seguente modo: scegliamo cinque punti sul luogo e tracciamo una conica per questi cinque punti e vediamo se la conica ottenuta si sovrappone "esattamente" al luogo. Si tratta di un controllo del tutto empirico, ma non c'è altro modo per farsi dare da *Cabri* l'equazione di un dato luogo. In ogni caso conviene sottolineare ancora una volta che *Cabri* è in grado di fornire l'equazione soltanto di rette, circonferenze e coniche e purché siano state create rispettivamente con gli strumenti *Retta*, *Circonferenza* e *Conica* (per 5 punti) e non con lo strumento *Luogo*. E' inoltre da notare che per *Cabri* la circonferenza non rientra nelle coniche…
Per proseguire con lo studio delle coniche, anche da punto di vista analitico, conviene quindi usare, ad un certo punto, lo strumento "Conica (per 5 punti)". Quasi tutte le macro riportate nel seguito faranno uso di tale strumento.
Alcune delle macro elencate di seguito sono già presenti nella cartella *Macro* all'atto dell'installazione di *Cabri-géomètre*); tutte le altre si possono far costruire in classe. Le macro utilizzate per il menu sulle coniche sono le seguenti:

-Macro-costruzione: *parabola di fuoco F e direttrice una retta d* (parabola.mac):

oggetti iniziali: un punto *F* ed una retta *d*;

oggetti finali: la parabola di fuoco *F* e direttrice *d*.

Data la direttrice *d* e il fuoco *F*, costruiamo il vertice *V,* punti *L* ed *L'*, estremi del lato retto ed altri due punti *P* e *P'* della parabola; abbiamo ottenuto cinque punti della parabola. Con lo strumento *Conica* disegniamo la parabola e trasformiamo in una macro il procedimento.

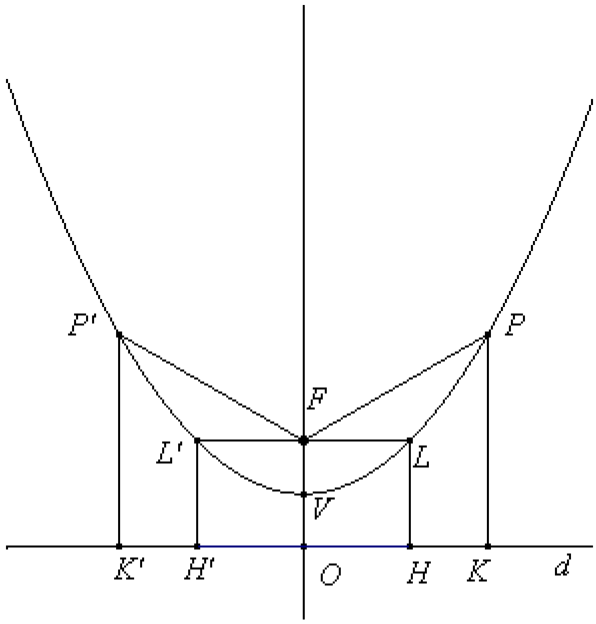


Figura 11 - Costruzione di una parabola.

La costruzione proposta in precedenza non è quella che si fa per prima in classe. Di solito si preferisce inizialmente costruire la parabola come luogo geometrico di punti, con la costruzione riportata nella seguente figura.
Si disegna una retta *d* ed un punto *F* non appartenente a *d.* Sulla retta *d* si considera un punto *H* e si congiunge con il fuoco *F*. Si traccia l'asse del segmento *HF* e la retta perpendicolare a *d* passante per *H.* L'intersezione delle due ultime due rette fornisce il punto *P* che appartiene, come si vede facilmente, alla parabola.
Con *Cabri* si deve chiedere il luogo dei punti descritto dal punto *P* al variare del punto *H.*
Il punto *H* funge da "variabile indipendente" e il punto *P* da "variabile dipendente". Questo è il modo di generare i luoghi in *Cabri*. I luoghi sono tracciati da punti, da rette, da segmenti, da circonferenze, …, al variare di un altro punto che si muove su un dato "oggetto" iniziale, che funge da "campo di variazione" del punto. In un certo senso, si può dire che i luoghi di *Cabri* dipendono da un solo "parametro".

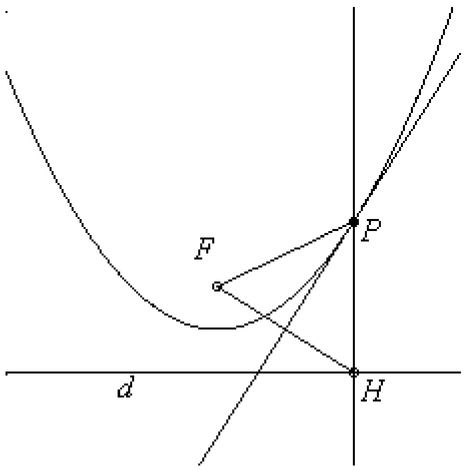


Figura 12 - Costruzione di una parabola come luogo di punti.

-Macro-costruzione: *parabole per 4 punti*; la costruzione di questa macro non è adatta alla scuola media superiore. Per una discussione su di essa si veda l'articolo di Michel Guillerault[9] in [2]:

oggetti iniziali: quattro punti;
oggetti finali: due parabole.

-Macro-costruzione: *ellisse dato l'asse maggiore e un fuoco* (ell_assf.mac):

oggetti iniziali: un segmento AB ed un punto F appartenente a questo segmento
oggetti finali: ellisse di asse maggiore il segmento AB e fuoco il punto F.

-Macro-costruzione: *ellisse dato un segmento (asse maggiore) ed un punto sull'asse del segmento* (ell_assp.mac):

oggetti iniziali: un segmento AB e un punto P appartenente all'asse del segmento;
oggetti finali: ellisse di asse AB e passante per il punto P.

[9] M. Guillerault, Le point de vue de Cabri-géomètre II sur le coniques, in AA.VV., *Université d'été "Cabri-géomètre" 1996: de l'ordinateur à la calculatrice. De nouveaux outils pour l'enseignement de la géométrie*, IREM de Grenoble - Université Joseph Fourier, Grenoble 1998. L'articolo è riportato anche nel sito di AbraCAdaBRI: http://www.cabri.net/abracadabri

-Macro-costruzione: *iperbole dato l'asse trasverso AB ed un fuoco F* (iperbole.mac):

> oggetti iniziali: segmento *AB* ed un punto *F* appartenente alla retta di *AB*, esterno ad *AB*;
> oggetti finali: iperbole di asse "trasverso" la retta *AB* e uno dei fuochi in *F*.

-Macro-costruzione: *retta tangente ad una conica in un suo punto* (tangpcon.mac); questa macro è già fornita con il programma, ma la sua costruzione è difficile da motivare nella scuola secondaria superiore:

> oggetti iniziali: una conica (costruita con lo strumento *Conica* !) ed un punto *P* su di essa;
> oggetti finali: retta tangente alla conica nel punto *P*.

-Macro-costruzione: *tangenti ad una conica condotte da un punto esterno alla conica* (tang_con.mac); questa macro è già fornita con il programma, ma la sua costruzione, almeno in generale, è difficile da spiegare nella scuola superiore

> oggetti iniziali: una conica (costruita con lo strumento *Conica*) ed un punto *P* esterno ad essa;
> oggetti finali: rette tangenti condotte da *P* alla conica.

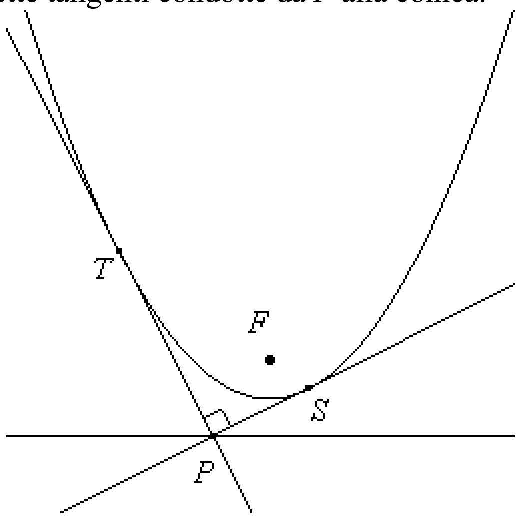


Figura 13 - Un'applicazione della macro "Tangente da un punto P ad una conica".

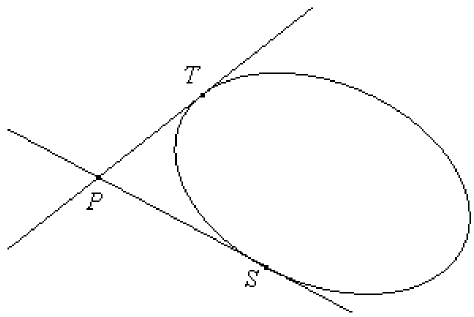


Figura 14 - Tangenti da *P* ad un’ellisse

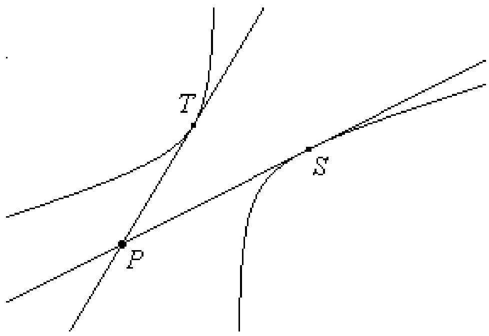


Figura 15 - Tangenti da *P* ad un’iperbole

Si possono inoltre creare ancora le seguenti macro-costruzioni:

-Macro-costruzione: *iperbole equilatera avente per asse trasverso il segmento dato AB* (iperbole_equilatera.mac):

oggetti iniziali: due punti, *A* e *B*;
oggetti finali: iperbole equilatera di asse trasverso la retta di *AB*;
(per questa macro si fa uso della macro iperbole.mac precedente; basta individuare il punto *F* sulla retta *AB*; vedi la figura seguente).

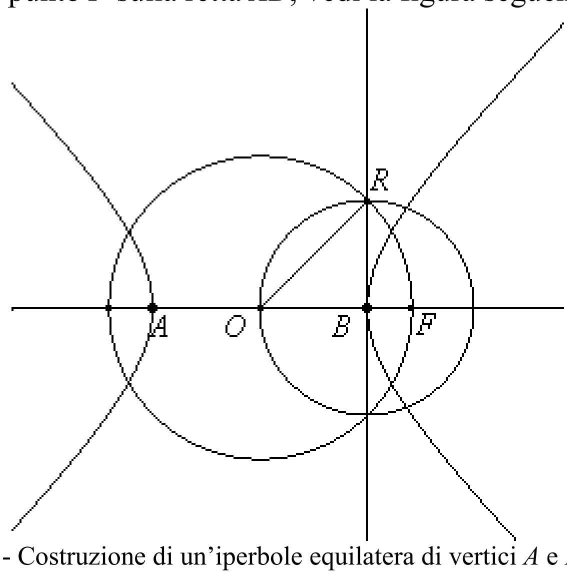


Figura 16 - Costruzione di un’iperbole equilatera di vertici *A* e *B*.

-Macro-costruzione: *iperbole equilatera e asintoti dati i vertici A e B* (iperbole_e_asintoti.mac):

oggetti iniziali: un segmento AB e un punto F sulla retta di AB, esterno al segmento AB;

oggetti finali: iperbole e asintoti.

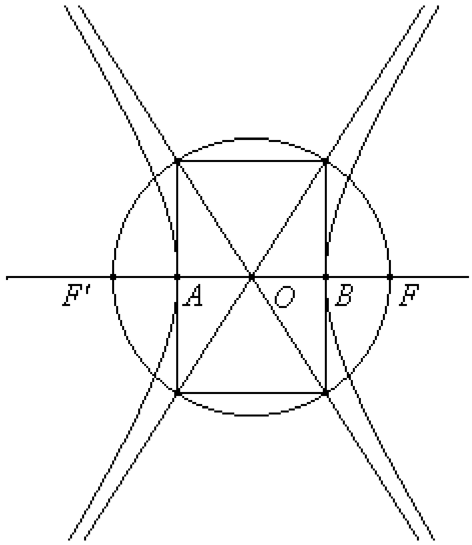


Figura 17 - Costruzione degli asintoti di un'iperbole.

6. Coniche definite tramite l'eccentricità

Le coniche possono essere definite in modo unitario usando i fuochi e le direttrici e la nozione di eccentricità così come è stato fatto per la parabola. Riprendendo la definizione di parabola, si è visto che, data una retta d ed un punto F non appartenente a d, essa si può definire come è il luogo geometrico dei punti del piano tali che $PF = PH$, ovvero:

$$\frac{\text{distanza}(P,F)}{\text{distanza}(P,d)} = 1 .$$

Possiamo chiederci cosa succede se il rapporto

$$\frac{\text{distanza}(P,F)}{\text{distanza}(P,d)} = \varepsilon ,$$

rimane costante con $\varepsilon > 1$ oppure $0 < \varepsilon < 1$. In questi casi si dimostra che si ottengono gli altri due tipi di coniche: nel primo caso iperboli e nel secondo ellissi.

Il rapporto ε si dice *eccentricità* della conica ed è anche indicato con la lettera *e* (da non confondere con il numero di Nepero). L'eccentricità è un numero reale positivo che caratterizza la conica. Per definizione, nel caso della circonferenza, si pone ε = 0. Oltre che in matematica, questa definizione di conica ha applicazioni in astronomia e in fisica ed è utile quando si vuole esprimere l'equazione di una conica sotto forma polare invece che cartesiana.
Si può dimostrare la seguente proposizione
Siano dati nel piano una retta d, detta direttrice, e un punto $F \notin d$, detto fuoco. Consideriamo il luogo geometrico dei punti P del piano per cui è costante il rapporto delle distanze dal fuoco F e dalla direttrice d (questo rapporto è un numero reale positivo indicato con ε, detto eccentricità).
Il luogo geometrico di tali punti è una conica di fuoco F, direttrice d ed eccentricità e.
Se ε > 1 il luogo è un'iperbole, se ε = 1 il luogo è una parabola, se 0 < ε <1 il luogo è un'ellisse.

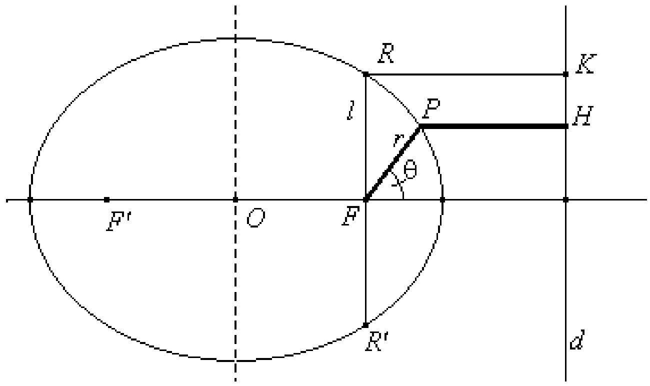


Figura 18 - Conica, fuoco, direttrice e "lato retto".

Dalla figura precedente, considerando il punto *F* come *polo* di un sistema di riferimento polare, si ricava:

$$r = FP = \varepsilon PH = \varepsilon(RK - FP\cos\theta) = \varepsilon RK - \varepsilon FP\cos\theta.$$

Posto *l* = *FR* (*RR'* viene chiamato *lato retto* della conica), si ottiene:

$$r = l - \varepsilon\ r\cos\theta,$$

da cui si ottiene:

$$r = \frac{l}{1 + \varepsilon\ \cos\theta},$$

che è l'equazione polare di una conica riferita ad un proprio fuoco e ad un asse polare coincidente con l'asse focale della conica.

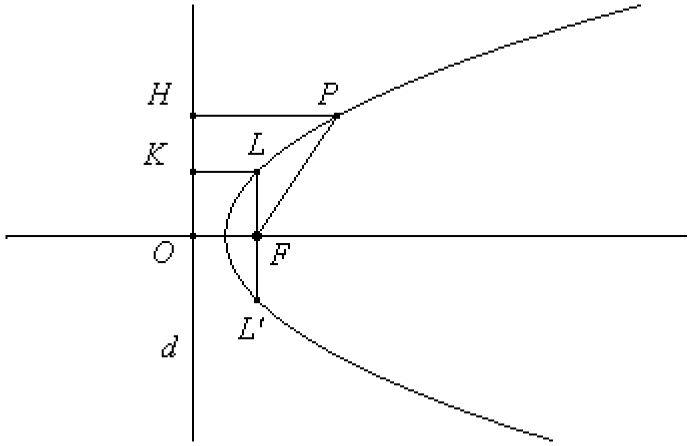


Figura 19 - La parabola come conica di eccentricità 1.

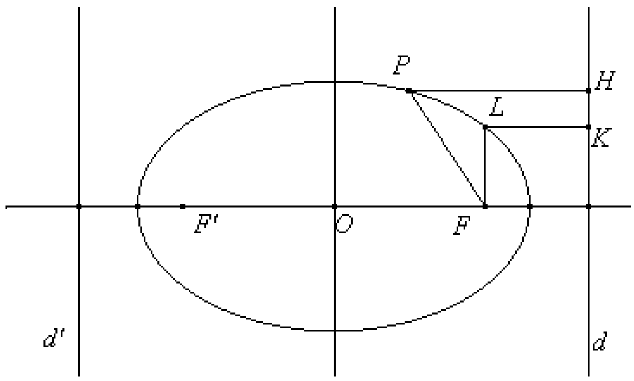


Figura 20 - Ellisse, fuochi e direttrici.

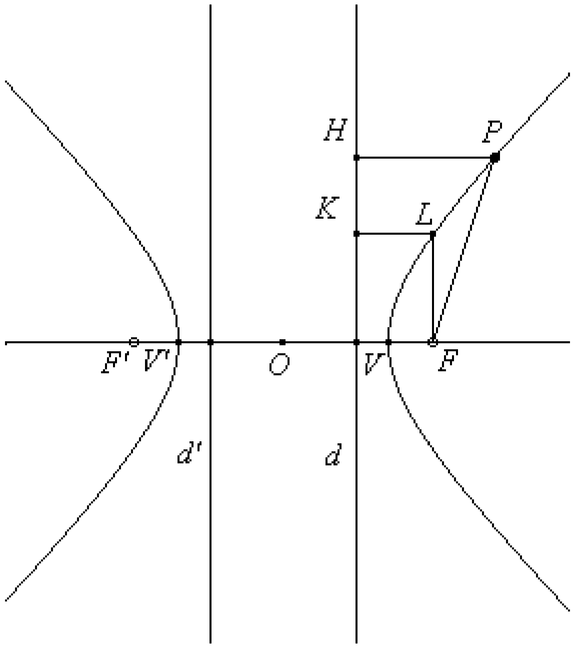


Figura 21 - Iperbole, fuochi e direttrici.

Nel caso particolare in cui $\varepsilon = \sqrt{2}$, si ottiene un'iperbole equilatera.
Anche per la definizione delle coniche tramite l'eccentricità si possono creare delle macro-costruzioni di *Cabri* per disegnare le direttrici di ellissi e iperboli. Vedi ad esempio le seguenti:

-Macro-costruzione: *ellisse e direttrici dato un segmento e un punto sul segmento* (ellisse_e_direttrici.mac):

oggetti iniziali: un segmento AB e un punto F appartenente al segmento;

oggetti finali: disegna l'ellisse di asse maggiore AB, i fuochi (uno è F) e le direttrici dell'ellisse.

La figura seguente è stata costruita con i seguenti passi:

- ellisse di vertici A, B e un fuoco in F;
- segmento FC uguale al semiasse maggiore dell'ellisse (OB);
- segmento EF uguale alla semidistanza focale dell'ellisse (OF);
- si ottiene il punto D;

- costruzione della retta *FD* e della sua intersezione *G* con la retta passante per *L* parallela all'asse *OC*;
- perpendicolare alla retta *OC* passante per *G*; quest'ultima retta è una delle direttrici.

Con questa figura si definisce la relativa macro-costruzione.

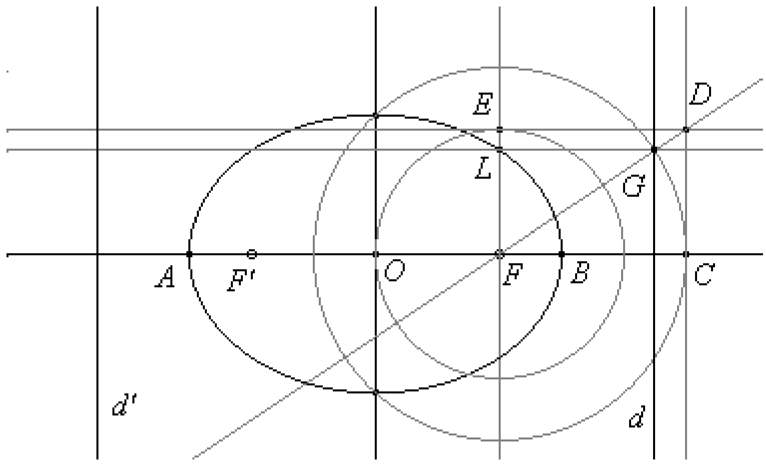


Figura 22 - Figura per definire la macro su ellisse, fuochi e direttrici.

-Macro-costruzione: *iperbole, asintoti e direttrici dato un segmento (asse trasverso) ed un fuoco* (iperbole_e_direttrici.mac):

oggetti iniziali: un segmento *AB*, un punto *F* appartenente alla retta *AB* ed esterno al segmento *AB*;

oggetti finali: iperbole di asse traverso la retta *AB*, i fuochi (uno di essi è *F*) e le direttrici dell'iperbole.

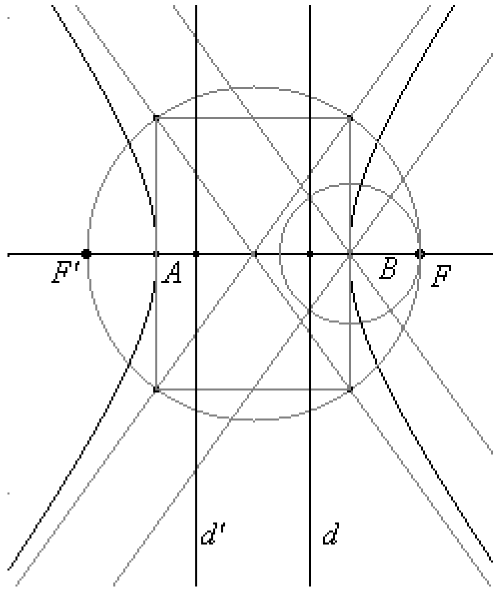


Figura 23 - Figura per definire la macro su iperbole, fuochi e direttrici.

7. Conclusione: la costruzione di un menu di *Cabri* sulle coniche

Dopo aver aperto tutte le macro richiamate in precedenza, si conclude con la costruzione del menu sulle coniche aggiungendo sulla barra degli strumenti alcune nuove caselle. Per comodità separiamo la casella delle macro sull'ellisse da quella sulla circonferenza (per *Cabri* la circonferenza non fa parte delle coniche…). Otteniamo così la seguente barra degli strumenti "aumentata" che contiene tutti i nuovi strumenti descritti in precedenza sulla circonferenza, la parabola, l'ellisse e l'iperbole. Per comodità, sono state collocate a destra della solita barra cinque nuove caselle di strumenti: la prima raggruppa le macro presentate in precedenza sulla circonferenza; la seconda contiene le macro sulla parabola, la terza quelle sull'ellisse, la quinta le macro sull'iperbole e l'ultima quella sulle tangenti alle coniche.

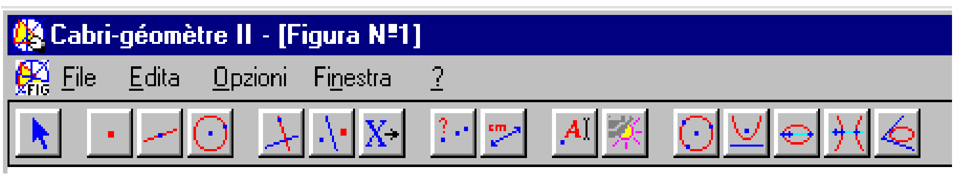


Figura 24 - La barra sulle coniche ottenuta al termine del percorso didattico.

Dal punto di vista didattico, la barra degli strumenti "Coniche" non verrà introdotta una volta per tutte, ma costruita progressivamente in classe. In questo modo gli studenti arricchiranno progressivamente la loro esperienza sulle coniche, soprattutto dal punto di vista sintetico e costruttivo, con il risultato di una maggiore padronanza quando queste curve saranno in seguito studiate con l'uso dello strumento analitico.

Bibliografia e siti essenziali di particolare interesse

[1] AA.VV., *Esplorare la Geometria con Cabri II*, IRRSAE Emilia Romagna, Bologna 1998;

[2] AA.VV., *Université d'été "Cabri-géomètre" 1996: de l'ordinateur à la calculatrice. De nouveaux outils pour l'enseignement de la géométrie*, IREM de Grenoble - Université Joseph Fourier, Grenoble 1998;

[3] Benaglia L., Fasci di circonferenze, in *CABRIRRSAE*, Bollettino degli utilizzatori di software matematici, n. 25, IRRSAE Emilia Romagna, Bologna, Ottobre 2000 (il bollettino è disponibile anche in formato elettronico nel sito: http://arci01.bo.cnr.it/cabri/rivista.html);

[4] Boieri P. (a cura di), *Fare geometria con Cabri,* Centro Ricerche Didattiche "U. Morin", G. Battagin Editore, 1996;

[5] Boieri P., Ramassotto A., *Da Cabri 1.7 a Cabri II,* CABRIRRSAE, Bollettino degli utilizzatori di Cabri-géomètre, n. 12, IRRSAE Emilia Romagna, Bologna, Giugno 1997;

[6] Lombardo Radice L., Mancini Proia L., *Il metodo matematico*, vol. 3°, Principato, Milano 1979;

[7] Mancini Proia L., Menghini M., Coniche in cielo e in terra, in *Progetto Alice*, 2000 II, vol. I, n. 2.

[8] Sito di "AbraCAdaBRI":

http://www-cabri.imag.fr/abracadabri/Coniques/ConiquesGene.html

[9] Sito di Geneviève Tulloue (Università di Nantes, Francia):

http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/Coniques/Index_coniques.html

Luigi Tomasi