Ivano Lodato
Classe V A
Liceo Scientifico “P.Farinato” - ENNA

Problema di Febbraio 2004

E’ dato un segmento AB e l’asse r di esso.
Si prenda un qualunque punto P su AB ed un qualunque punto Q su r.

1. **Dimostrare che: $AP*PB = QA^2 – QP^2$**
2. **Nel caso che sia P sul prolungamento di AB, come deve essere modificata la relazione data?**

Consideriamo la fig. 1.
Il prodotto AP*PB induce a considerare il “secondo teorema di Euclide”.
Tracciamo la circonferenza avente centro in O, punto medio del segmento AB, e raggio AO. Per il punto P tracciamo la perpendicolare al segmento AB che incontra la circonferenza in L. Il triangolo ALB, essendo iscritto in una semi circonferenza è rettangolo e per il secondo teorema di Euclide

$$AP*PB = PL^2$$

Considerando i triangoli rettangoli QAO e QPO, per il teorema di Pitagora si ha:

$$QA^2 – AO^2 = QO^2$$
$$QP^2 – PO^2 = QO^2$$

sottraendo membro a membro:

$$QA^2 – QP^2 = AO^2 – PO^2$$

Ma: $$AO = LO$$

perché raggi della circonferenza,
e per il teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo LPO

$$LO^2 – PO^2 = PL^2$$

Riepilogando si ha:

$$\underline{AP*PB} = PL^2 = LO^2 – PO^2 = AO^2 – PO^2 = \underline{QA^2 – QP^2}$$

Se il punto P è sul prolungamento del segmento AB, come nella fig.2, tracciamo da P la tangente alla circonferenza e sia T il punto di tangenza.
Le rette PT e PB sono rispettivamente la tangente e la secante alla circonferenza condotte da un punto esterno P e per esse vale il “teorema della tangente e della secante” secondo il quale il segmento tangente, PT, è medio proporzionale tra l’intera secante, PB, e la sua parte esterna, PA, per cui si ha:

$$PB*PA = PT^2$$

Considerando i triangoli rettangoli QAO e QPO, per il teorema di Pitagora si ha:

$$QP^2 - PO^2 = QO^2$$
$$QA^2 - AO^2 = QO^2$$

sottraendo membro a membro:

$$QP^2 - QA^2 = PO^2 - AO^2$$

ma: $AO = TO$

perché raggi della circonferenza,

poiché la tangente ad una circonferenza è perpendicolare al raggio condotto nel punto di tangenza, il triangolo PTO è rettangolo e applicando il teorema di Pitagora si ha:

$$PO^2 - TO^2 = PT^2$$

Riepilogando si ha:

$$\underline{AP*PB} = PB*PA = PT^2 = PO^2 - TO^2 = PO^2 - AO^2 = \underline{QP^2 - QA^2}$$

La relazione: $\mathbf{AP*PB = QA^2 - QP^2}$ deve essere modificata nella relazione:

$$\mathbf{AP*PB = QP^2 - QA^2}$$

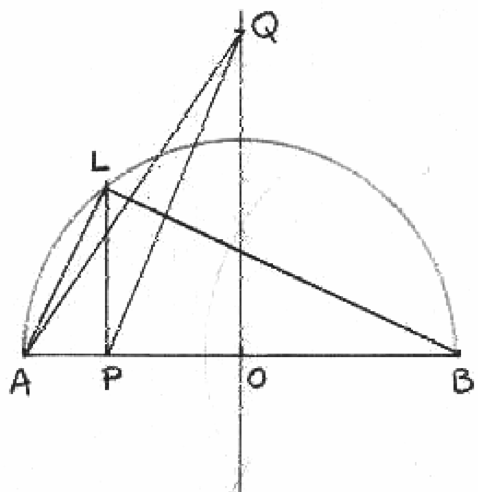

fig. 1

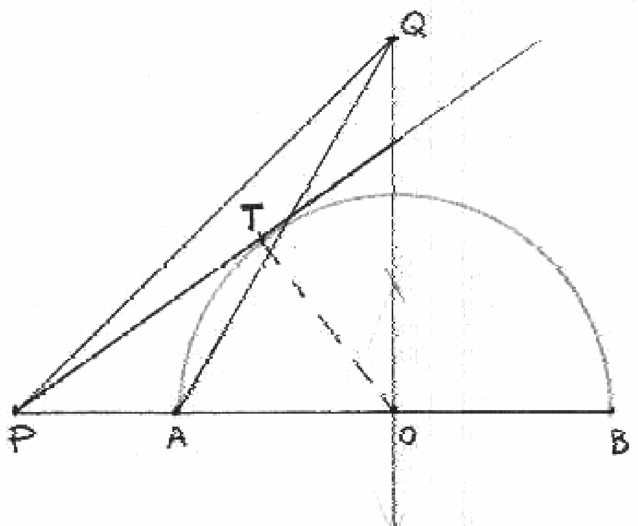

fig. 2