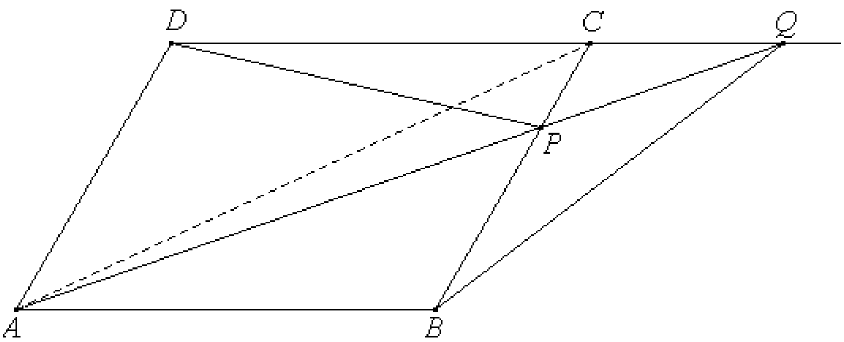
FLATlandia

Flatlandia 4-18 Febbraio 2008

Il testo del problema:
È dato un parallelogrammo $ABCD$.
a) Detto P il punto medio del lato BC, condurre da A la retta passante per P e sia Q il punto in cui essa interseca il prolungamento del lato DC. Congiunti P con D e B con Q, dire quali sono nella figura così ottenuta i triangoli fra loro equivalenti.
b) Se P è un generico punto del lato BC, quali fra i triangoli prima individuati nel punto a) risulteranno ancora equivalenti? Esaminare anche i casi limite (se P coincide con B oppure con C).

Motivare le risposte



Commento
Abbiamo ricevuto nove risposte così suddivise: due provenienti da due diverse Scuole Medie, quattro dal biennio delle Scuole Superiori, due dal triennio delle Scuole Superiori (sempre III anno) e infine una risposta da uno studente che non fornisce alcuna indicazione né sul tipo di Scuola, né sull'anno di corso (e pertanto si è ritenuto corretto non poter pubblicare la sua soluzione). Il problema poneva due domande (tra loro collegate): nel primo quesito si chiedeva di individuare triangoli equivalenti nella figura proposta; nel secondo quesito (che costituiva una generalizzazione del primo) si chiedeva di stabilire quali, tra i triangoli individuati nel primo quesito, conservavano, nella nuova situazione, la loro equivalenza.
In tutte le risposte pervenute viene risolto in modo sostanzialmente corretto il primo quesito (segnaleremo caso per caso le eventuali imprecisioni). Per il secondo quesito, solo alcuni rispondono in modo esauriente. Altri considerano solo i casi limite e altri ancora non forniscono alcuna giustificazione delle proprie affermazioni [l'equivalenza di certi triangoli non si può dedurre in base alla semplice "osservazione"]. Consigliamo inoltre di evitare l'uso del simbolo "=" per indicare l'equivalenza di triangoli.
Un'ultima osservazione che è anche un invito pressante per il futuro: cercate di resistere alla tentazione di costruire figure gigantesche. Questa loro caratteristica non solo non le rende più "leggibili", ma risulta poi impossibile "ritagliarle" e inserirle nel documento da pubblicare.
Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:

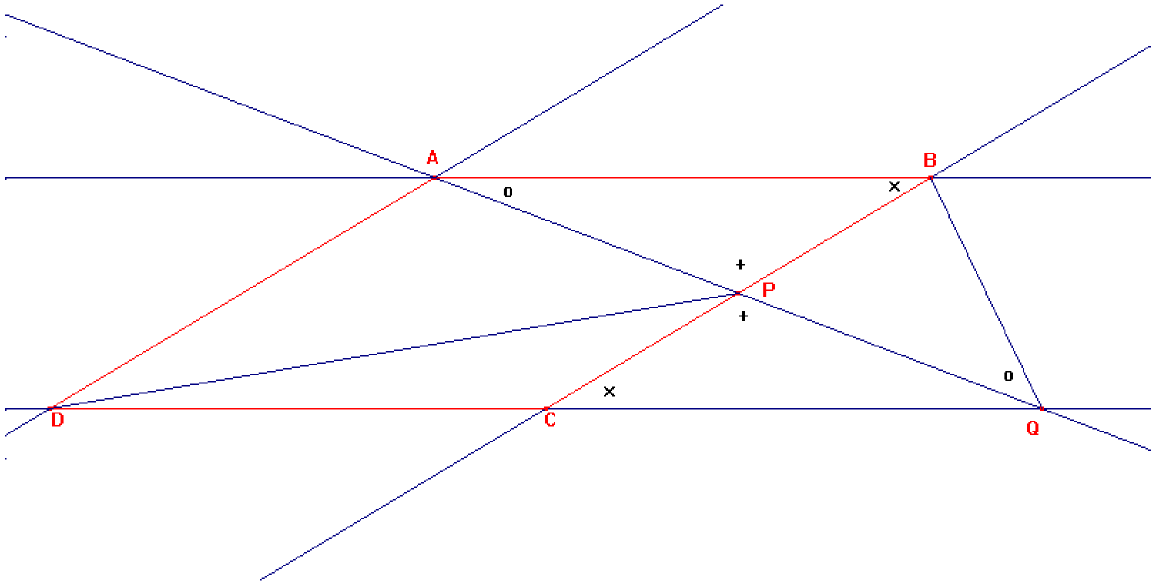
SM "C.A. Dalla Chiesa", S.Genesio ed Uniti (PV)
SM "A. Brofferio", Asti (AT)

Ist. Sup., Sez. LST, “F. Alberghetti”, Imola (BO)
ITIS, LST “F. Berenini”, Fidenza (PR)
ITCG “Ruffini”, Imperia (IM)
ITCG “E. Majorana”, Castrolibero (CS)
LS “Pitagora”, Rende (CS)
LS “Aristosseno”, Taranto (TA)

NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

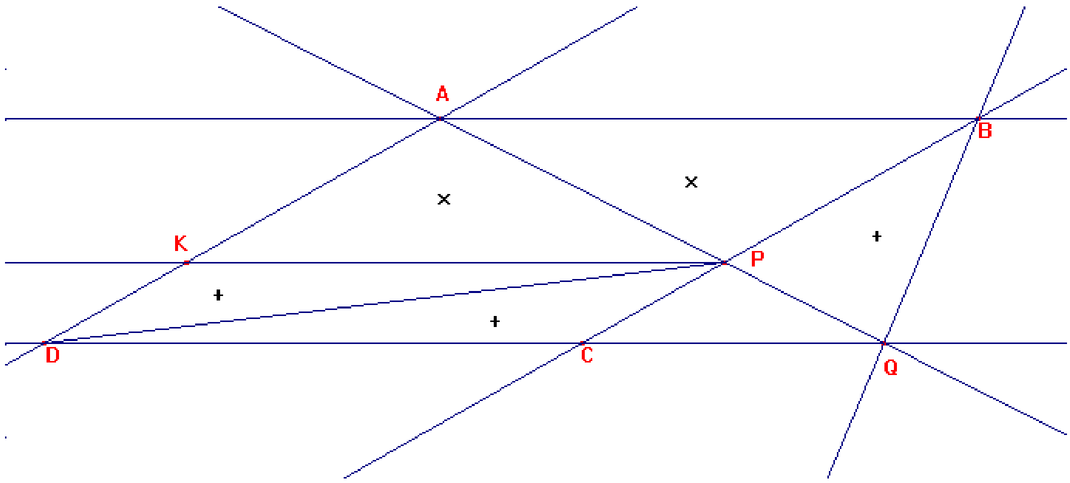
Soluzioni
Alessandro Trancuccio, Classe 2S
Scuola Media di San Genesio e Uniti (PV)

a)



Costruito il parallelogramma ABCD chiamo P il punto medio del lato BC.
I triangoli APB e PCQ sono uguali, perché hanno i lati CP e PB uguali per costruzione e tutti gli angoli uguali [nella figura sopra il "tondino" sembra indicare l'uguaglianza degli angoli BAP e PQB, mentre in realtà sono uguali gli angoli BAP e PQC come è detto nel testo]. Infatti l'angolo ABP = PCQ, essendo angoli alterni interni rispetto alle rette parallele (lati del parallelogrammo) AB e DC, tagliate dalla trasversale BC e gli angoli APB = CPQ, perché sono angoli opposti al vertice e di conseguenza anche gli angoli BAP = PQC.
I triangoli APB e PCQ sono quindi equivalenti tra loro ed anche al triangolo DCP, perché i triangoli APB e DCP hanno la stessa base cioè CP = PB e la stessa altezza cioè la distanza dei punti D ed A dalla retta BC in quanto appartengono alla retta DA parallela a BC. Anche i triangoli CPQ e BPQ sono equivalenti in quanto hanno la stessa base (CP = PB) e la stessa altezza, cioè la distanza del punto Q dalla retta BC. Quindi per la proprietà transitiva dell'equivalenza sono equivalenti i triangoli DCK =AKB = BKQ = QKC [DCP, APB, BPQ, QPC].

b)



Se P è un generico punto sul segmento BC rimangono equivalenti i triangoli DCP e BPQ perché:

L'area di ABQ = ½ area del parallelogramma ABCD, perché hanno la stessa base AB e la stessa altezza, cioè la distanza tra le rette parallele AB e CD (Il punto Q si trova sulla retta CD) e per calcolare l'area di un triangolo si deve dividere per 2 il prodotto della misura della base per l'altezza.

Tracciando la retta KP parallela alla retta AB si formano due parallelogrammi ABPK e KPCD che sono divisi dalle rispettive diagonali AP e DP in triangoli uguali ABP = APK e DKP= DPC.

Quindi si può scrivere che:

area di ABQ = 1/2 dell'area di ABCD = 1/2 dell'area di (ABP + APK + KPD + DPC)

area di ABQ = ½ dell'area di (2ABP + 2DCP)

area di ABQ = area di ABP + area di DPC

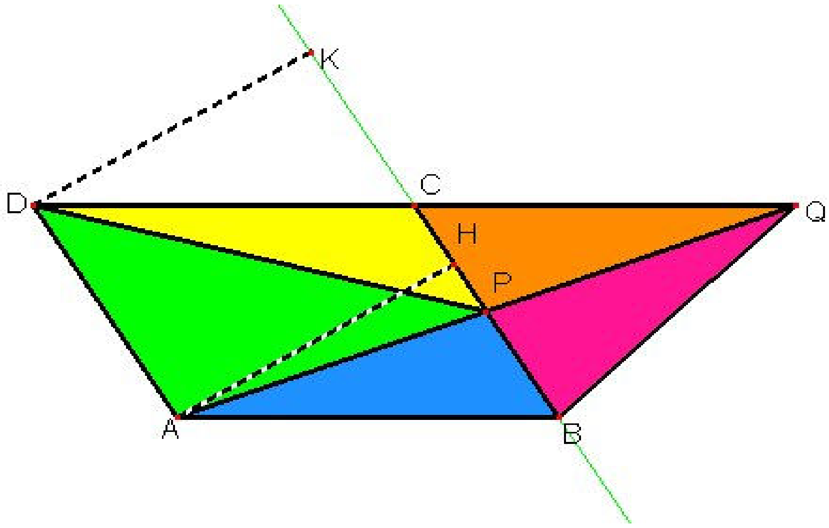
Quindi l' area di ABQ = area di ABP + area di BQP = area di ABP + area di DPC questo significa che i triangoli BQP e DPC sono equivalenti.

Nel caso limite, in cui il punto P coincide con C, Q coincide con C e P e coincidono anche i punti K e D. Quindi AQ diventa la diagonale del parallelogramma ABCD e l'area dei due triangoli DPC e BQP diventa zero.

Nel caso limite in cui il punto P coincide con B , il segmento DP diventa la diagonale del parallelogrammo ABCD e il triangolo DPC diventa uguale a metà parallelogrammo mentre la retta AQ va a coincidere con la retta AB e quindi il triangolo BQP non esiste più.

Alfredo Giambrone (3F), Simone Rovero (3F),
Giacomo Catrambone (2F), Gianluca Clerico (2F)
Scuola Media "A. Brofferio" Asti (AT)

a)



- I triangoli DCP (giallo) e ABP (blu) hanno:

BP = CP perché P è il punto medio di CB
DK = AH perché distanze tra i lati opposti del parallelogrammo.
Segue:
Area (DCP) = Area(ABP)

- I triangoli CQP(arancione) e ABP(blu) hanno:

angolo CPQ = angolo APB perché opposti al vertice
angolo ABP = PCQ perché alterni interni (rette parallele AB e CQ tagliate dalla trasversale CB)
BP = CP.
Segue che:
il triangolo CQP è congruente al triangolo ABP per il secondo criterio di congruenza; pertanto
Area (CQP) = Area (ABP)

- I triangoli PBQ(fucsia) e CQP(arancione) hanno:

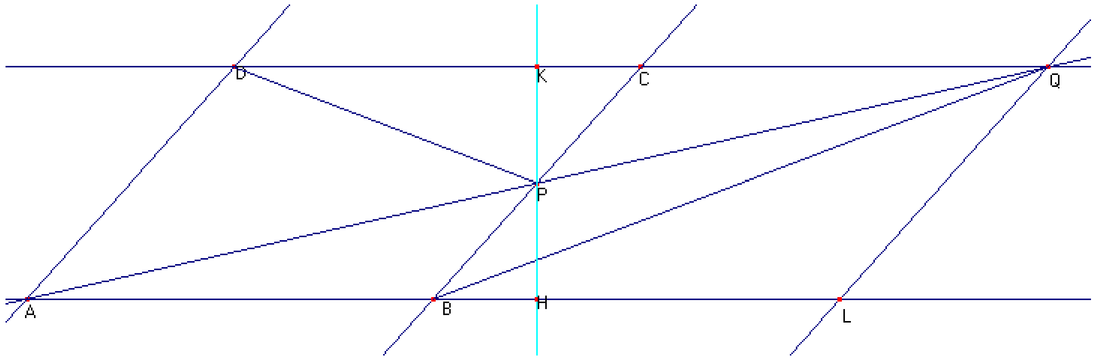
BP = CP
Il vertice Q in comune e, pertanto, altezza coincidente.
Segue:
Area (PBQ) = Area (CQP)
Concludendo:

A(DCP)(giallo) = A(ABP)(blu) = A(CQP)(arancione) = A(PBQ)(fucsia)

b) [[…]]

Ilaria Cani, Guido Gambetti, Stefano Magurno, Giuseppe Perri
Classe 2G, LST Ist. Sup."F. Alberghetti", Imola (BO)

a)



I triangoli equivalenti sono:
PAB e PCD
PAB e CPQ
CPQ e PCD
CBQ e PAD
BPQ e ABP
DPQ e ABQ

Dimostro che PAB e PCD sono equivalenti:
traccio la retta s perpendicolare alla retta su cui giace AB.
Poiché AB parallelo DC allora s perpendicolare alla retta su cui giace DC.
Considero H e K i punti di intersezione della retta s rispettivamente su [con le rette] AB e DC.

Considero i triangoli PBH e PKC. Essi hanno
PB congruente PC per ipotesi (P punto medio BC)
PBH congruente PCK perché angoli alterni interni tra due rette parallele (CQ e AB) tagliate dalla trasversale AQ [BC (e non AQ)]
BPH congruente KPC perché angoli opposti al vertice
I triangoli PBH e PKC sono congruenti per il secondo criterio di congruenza dei triangoli in particolare PH congruente PK e BH congruente KC

Considero i triangoli PAB e PCD. Essi hanno
AB congruente DC per ipotesi (lati opposti di un parallelogramma)
PH congruente PK per dimostrazione precedente
I triangoli PAB e PCD sono equivalenti in quanto hanno base e altezza congruenti.

Dimostro che PAB equivalente CPQ:
AB congruente CQ per differenza di segmenti congruenti (AH congruente KQ [questo dovrebbe essere dimostrato] e BH congruente KC per dimostrazione precedente)
PH congruente PK per dimostrazione precedente
I triangoli PAB e CPQ sono equivalenti in quanto hanno base e altezza congruenti

Dimostro che PCD equivalente CPQ:
Se PAB equivalente PCD e PAB equivalente CPQ allora PCD equivalente CPQ per la proprietà transitiva dell'equivalenza.

Dimostro che CBQ equivalente PAD:

Traccio la parallela a BC passante per Q che interseca il prolungamento di AB in L
CBLQ è un parallelogramma in quanto BC parallelo QL per costruzione e CQ parallelo BL perché prolungamenti di segmenti paralleli (AB parallelo DC per ipotesi)
ABCD congruente a BLQC in quanto hanno
AB congruente CQ per dimostrazione precedente
e hanno BC in comune [ed hanno anche gli angoli congruenti (i quadrilateri non sono figure "rigide" come i triangoli)]
Essendo congruenti risultano anche equivalenti.

Considero il triangolo ABP e il parallelogramma ABCD,essi hanno
La base congruente (AB in comune)
L' altezza del triangolo è metà rispetto a quella del parallelogramma
Perciò l' area del triangolo risulta $^{1}/_{4}$ rispetto all'area del parallelogramma (un triangolo avente stessa base e altezza doppia o doppia base e stessa altezza di un parallelogramma è equivalente al parallelogramma stesso).

Essendo ABP equivalente PCD la somma delle aree dei due triangoli risulta essere ½ rispetto all' area del parallelogramma ABCD
L' area del triangolo APD risulta quindi ½ dell' area dell' intero parallelogramma ABCD (per differenza di aree).

Considero il parallelogramma BLQC
Essendo BQ la diagonale divide il parallelogramma in due triangoli congruenti (BCQ congruente BQL)

ADP equivalente BCQ in quanto equivalenti a metà dell' area di parallelogrammi equivalenti.

<u>Dimostro che BPQ è equivalente ad APB</u>

BPQ equivalente ABP per differenza di aree (BQC equivalente alla somma delle aree di APB e DCP per proprietà transitiva e CPQ equivalente PCD per dimostrazione precedente)

Per la proprietà transitiva dell' equivalenza i triangoli ABP, PCD, PCQ e PBQ risultano tutti equivalenti

<u>Dimostro che DPQ è equivalente ad ABQ</u>

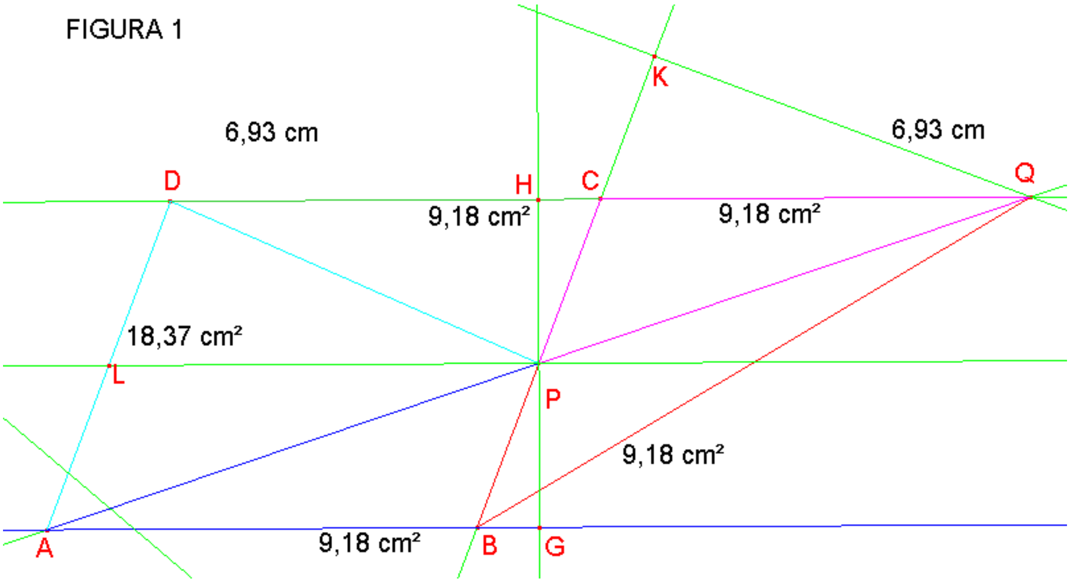
DPQ equivalente ABQ in quanto figure equicomposte (DPQ = DPC + CPQ e ABQ = ABP + BPQ).

c.v.d.

b) [[…]]

Alice Bonini, Lorenza Zanichelli, Filippo Corsini, Marianna Lorenzano, Chiara Zalaffi
Classe 2B LST "F. Berenini" Fidenza (PR)

a)

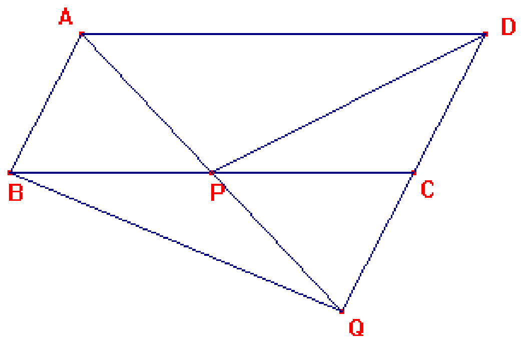


Nella figura ottenuta svolgendo il punto 'a' sono equivalenti tra loro i triangoli APB, PQC, PCD, BPQ e i triangoli DPQ, ABQ, APD, BQC.
- Consideriamo ora i triangoli PQC e APB:
Essi sono congruenti per il 2° criterio di congruenza; infatti BP è congruente a PC (perché B punto medio di BC) , l'angolo APB è congruente all'angolo CPQ (perché angoli opposti al vertice) e l'angolo ABP è congruente all'angolo PCQ (perché angoli alterni interni rispetto alle parallele DQ e AB tagliate dalla trasversale BC); tali triangoli essendo congruenti sono anche equivalenti.
- Consideriamo ora i triangoli PQC e PBQ:
Essi sono equivalenti perché hanno la stessa altezza QK e la stessa base, infatti BP e PC sono congruenti in quanto P è punto medio.
- Consideriamo ora i triangoli PQC e PCD;
Essi sono equivalenti perché hanno stessa altezza PH e basi congruenti in quanto, se AB è congruente a DC [CQ] (perché lati di triangoli congruenti) e AB è congruente a DC (essendo lati opposti di un parallelogrammo), per la proprietà transitiva DC è congruente a CQ.
Quindi i triangoli PCD, APB, PBQ, PQC sono equivalenti tra loro per la proprietà transitiva.
DPQ, ABQ, CBQ sono triangoli equivalenti tra loro perché somme di triangoli equivalenti:
Tracciando la mediana dell'angolo APD [del triangolo APD (e non dell'angolo)] relativa al lato AD, osserviamo che essa passa per il punto medio P e quindi è parallela ai lati DC e AB.
- Prendiamo ora in considerazioni i triangoli DLP e DCP:
Essi sono congruenti per il 3° criterio di congruenza in quanto DP è lato in comune, DH [DC] è congruente a LP e DC [DL] è congruente a CP perché lati opposti di un parallelogramma.
- Prendiamo ora in considerazione i triangoli ABP e LAP:
sono anch'essi equivalenti per il 3° criterio di congruenza infatti AB è congruente a LP, LA è congruente a PB e AP è lato in comune.
Essendo i triangoli ABP e CDP equivalenti,come dimostrato precedentemente, allora i triangoli LAP e DLP sono anch'essi equivalenti. Dunque APD è equivalente ai triangoli ABQ, DPQ, CBQ perché somme di triangoli equivalenti.

b) [[…]]

Nicole Gonzalez, Antonella Nardi
Classe 2° Geom., ITCG "E. Majorana", Castrolibero (CS)

a)

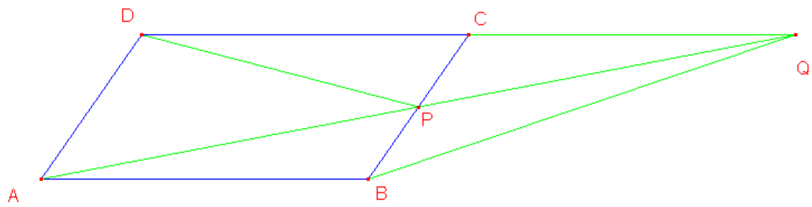


Angolo APB = Angolo CPQ perché angoli opposti al vertice
Angolo BAP = Angolo CQP perché angoli alterni interni rispetto alle parallele AB e DQ tagliate dalla trasversale AQ
BP = PC perché P è il punto medio.
Di conseguenza i triangoli APB e CPQ sono congruenti per il secondo criterio di congruenza dei triangoli e pertanto i lati BA e QC risulteranno congruenti.
Pertanto i segmenti AB, QC e CD risultano congruenti.
I triangoli BPQ e CPQ sono equivalenti perché hanno base congruente [BP congruente a PC] e altezza congruente [è la stessa per i due triangoli].
Ma anche i triangoli PQC e DPC sono equivalenti perché hanno base congruente (QC congruente a CD per precedente dimostrazione), e altezza comune.
Pertanto i triangoli APB, BPQ, CPQ e PCD sono congruenti [equivalenti (e non congruenti)].
[Mancano i triangoli somma di triangoli congruenti.]

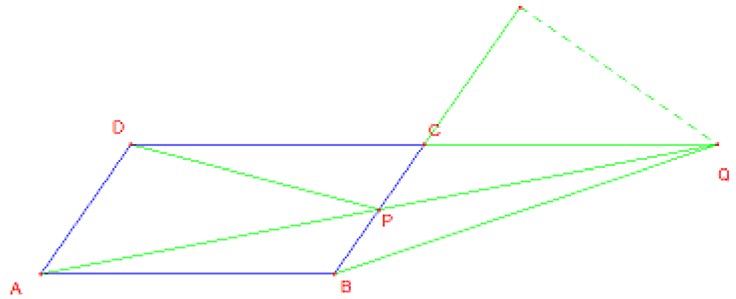
b) [[…]]

Mirko Nardi,Lara Madeo, Giulia Toscano, Pasquale Spadafora, Demetrio Guzzardi
Classe 2B, LS "Pitagora", Rende (CS)

a)



❖ Consideriamo i triangoli CQP e PQB:
essi hanno le rispettive basi CP e PB congruenti per ipotesi, in quanto P è il punto medio di CB. Essendo il triangolo CQP ottusangolo in $\hat{C}$, l'altezza relativa alla base PC cadrà sul prolungamento del lato BC e questa coincide anche con l'altezza del triangolo PQB (anch'esso ottusangolo) relativa alla base BP. I due triangoli sono quindi equivalenti in quanto hanno le basi congruenti (BP ≡ PC) e la medesima altezza.



❖ Consideriamo i triangoli ABP e CQP, che hanno:
BP ≡ PC per ipotesi
Gli angoli APB e CPQ congruenti perché opposti al vertice
Gli angoli PBA e PCQ congruenti perché alterni interni rispetto alle parallele AB e DQ tagliate dalla trasversale BC
I due triangoli sono congruenti per il secondo criterio di congruenza; di conseguenza questi sono anche equivalenti. Come conseguenza di questa dimostrazione teniamo presente che AP ≡ PQ.

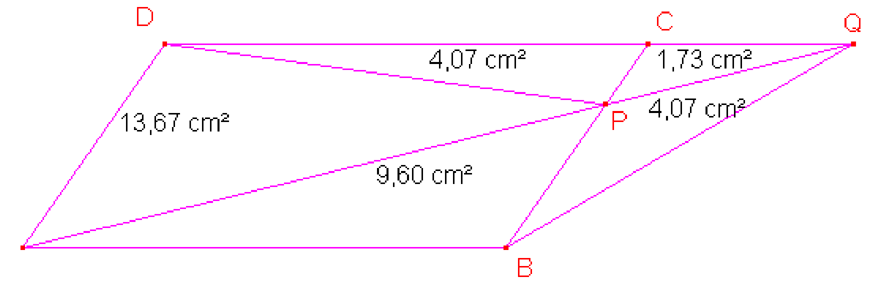
❖ Poiché, come già dimostrato, il triangolo BPQ è equivalente a PQC e quest'ultimo è a sua volta equivalente a ABP allora per la proprietà transitiva BPQ è equivalente al triangolo ABP.

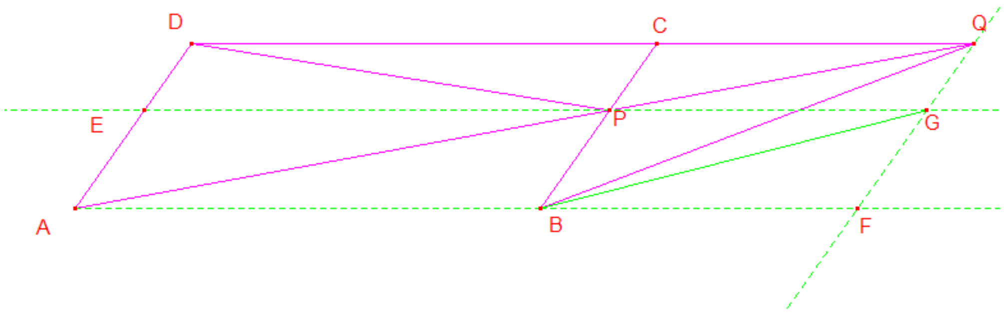
❖ I triangoli CDP e ABP
hanno le rispettive basi congruenti per ipotesi (BP ≡ PC) ; per quanto riguarda le altezze, esse coincidono con le distanze [la distanza] fra le rette parallele a cui appartengono i segmenti AD e BC. I triangoli CDP e ABP sono quindi equivalenti.

❖ Da queste dimostrazioni ricaviamo che :
- i triangoli ABQ e BCQ sono equivalenti per somma di triangoli equivalenti, ovvero ABQ = ABP + BPQ e BCQ = CPQ +BPQ ; il triangolo BPQ è comune ai triangoli considerati.
- i triangoli ABQ e DPQ sono anch'essi equivalenti per somma di triangoli equivalenti in quanto ABQ = ABP + BPQ e DPQ = DPC + CPQ
- i triangoli APD e DPQ sono equivalenti in quanto hanno rispettivamente le basi AP e PQ congruenti per dimostrazione precedente e la stessa altezza relativa alla retta AQ
- per la proprietà transitiva anche i triangoli CPD e BPQ sono equivalenti
- il triangolo APD è equivalente alla somma dei triangoli ABP e DPC in quanto, per dimostrazioni precedenti e per la proprietà transitiva, APD = DPC + CPQ
- lo stesso dicasi per l'equivalenza del triangolo APD con:

ABP + CPQ [non tutte queste somme sono triangoli]
CPQ + BPQ
CDP + BPQ
DPC + PCQ
ABP + PBQ

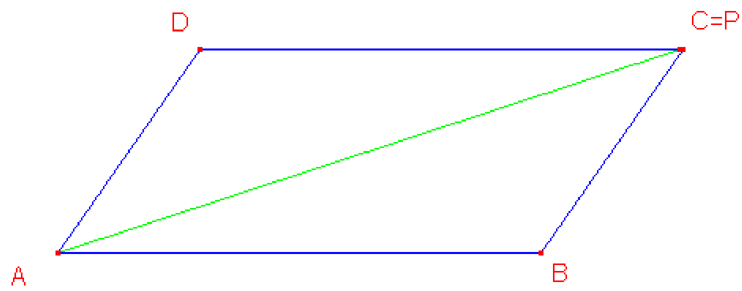
b)



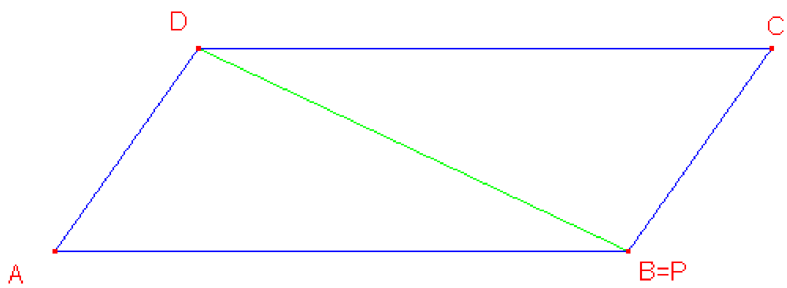


In questa situazione si individuano solo i triangoli equivalenti DPC e PQB. Per facilitare la dimostrazione tracciamo due rette parallele rispettivamente ad AB passante per P, e a BC passante per Q.
Si forma cosi in [il] parallelogramma AFQD come in figura. Il quadrilatero ABPE è un parallelogramma perché ha i lati opposti paralleli e la diagonale AP lo divide in due triangoli congruenti ABP e APE.
In [Il] quadrilatero BFGP [QCPG] è un parallelogramma perché ha i lati opposti paralleli e la diagonale PQ lo divide in due triangoli congruenti PQC e PQG.
Per differenza di triangoli congruenti, il parallelogramma EPCD e BFGP sono equivalenti : AQD – (APE + PQC) = AQF – (ABP + PGQ)
Conseguentemente la [le "due"] metà dei parallelogrammi suddetti sono equivalenti, ossia DPC è equivalente a PBG, ma PBG è equivalente a PBQ perché sono triangoli che hanno la stessa base PB e la stessa altezza che è la distanza di rette parallele. Per la proprietà transitiva DPC è equivalente a PBQ.

Nel caso in cui P coincide col punto C, come si vede in figura, AP coincide con la diagonale AC del parallelogramma ABCD, il quale viene quindi diviso in due triangoli congruenti, e quindi equivalenti.

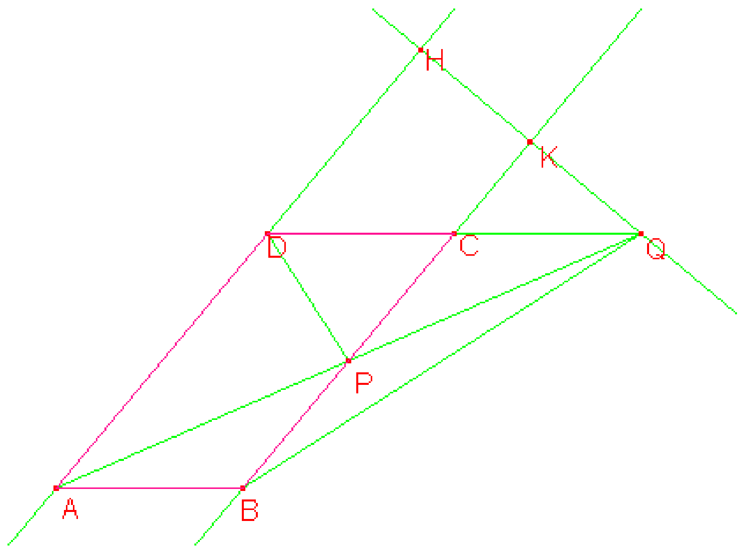


Nel caso in cui invece P coincide con B, si viene ugualmente a formare una diagonale che divide il parallelogramma ABCD in triangoli congruenti e quindi equivalenti.



Ardoino, Bortolini, Confalone, Di Pietro, Dulbecco, Grimaldi, Multani, Oda, Pinto, Razzani, Sahlaoui, Scarsella, Tallone
Classe 3A Programmatori, ITCG "Ruffini", Imperia (IM)

a)



- Risultano equivalenti i triangoli : APB, PCQ, DPC, BPQ
- Risultano equivalenti i triangoli : AQB, DPQ, DAP, BCQ

Spieghiamo il primo punto.

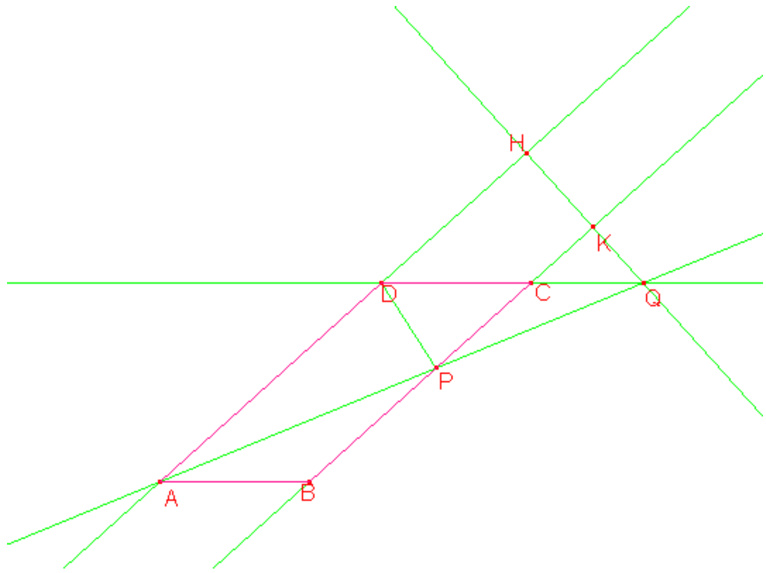
- Il triangolo APB è congruente a PCQ per il 2° criterio di congruenza, avendo: PB ≅ PC per ipotesi, ∠APB ≅ ∠CPQ opposti al vertice, ∠QCP ≅ ∠PBA alterni interni tra le parallele DQ e AB tagliate da BC. Dunque APB e PCQ sono equivalenti.
- Il triangolo PCQ è equivalente a BPQ perché hanno la base PB ≅ PC ed hanno la stessa altezza [il segmento di] perpendicolare da Q alla retta BC
- Il triangolo APB è equivalente a DPC perché hanno la base PB ≅ PC ed hanno la stessa altezza (distanza tra le rette parallele DA e BC)

Per la proprietà transitiva dell'equivalenza abbiamo dimostrato che sono equivalenti i triangoli : APB, PCQ, DPC, BPQ

Spieghiamo il secondo punto.
- Il triangolo AQB è equivalente al triangolo DQP perché hanno: la base AB ≅ (1/2) DQ [è più corretto scrivere $\overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{DQ}$] (teorema di Talete applicato alle parallele AD e BC tagliate da AQ e DQ) e la distanza di Q da AB è doppia della distanza di P da AB e di P da DC (per il teorema di Talete applicato prima al fascio di rette parallele ad AB, tagliate dalle trasversali BC e BQ e poi allo stesso fascio tagliato da BQ e dalla perpendicolare ad AB passante per Q).
- Il triangolo DAP è equivalente al triangolo BCQ perché hanno la base DA ≅ BC e l'altezza KH ≅ (1/2)QH ≅ QK [è più corretto scrivere $\overline{KH} = \frac{1}{2}\overline{QH} = \overline{QK}$] (per il teorema di Talete applicato alle parallele AD e BC tagliate dalle trasversali QA e QH [)].
- Il triangolo BCQ è equivalente al triangolo DPC perché hanno [, rispettivamente,] la base CQ ≅ (1/2) DQ [è più corretto scrivere $\overline{CQ} = \frac{1}{2}\overline{DQ}$] e l'altezza da B a DQ doppia dell'altezza da P a DQ.

Per la proprietà transitiva dell'equivalenza abbiamo dimostrato che sono equivalenti i triangoli : AQB, DPQ, DAP, BCQ

b)



- Risultano equivalenti i triangoli : BCQ [manca in figura il segmento BQ] e DPQ
- Risultano equivalenti i triangoli : DPC e BPQ
- Risultano equivalenti i triangoli : AQB e DAP

Spieghiamo il primo punto.

Area (DAQ) = $\frac{DA \cdot QH}{2}$ = Area (DAP) + Area (CPQ) + Area (DCP) =

$\frac{DA \cdot KH}{2} + \frac{CP \cdot QK}{2} + \frac{CP \cdot HK}{2}$ → DA(HK+QK) = DA*HK + CP*QK + CP*HK →

DA*HK+DA*QK=DA*HK+CP(QK+HK) → $\frac{DA \cdot QK}{2} = \frac{CP \cdot QK}{2} + \frac{CP \cdot KH}{2}$ →

$\frac{CB \cdot QK}{2} = \frac{CP \cdot QK}{2} + \frac{CP \cdot KH}{2}$ → Area(CBQ)=Area(CPQ)+Area(DCP)= Area(DPQ)

Spieghiamo il secondo punto.
Area (CBQ) =Area(DPQ) → Area (CPQ)+Area(BPQ) =Area(DCP) +Area (CPQ) →
Area (BPQ) = Area(DCP)

Spieghiamo il terzo punto.
Area(ABQ)=Area(ABP)+Area(BPQ)=Area(ABCD)-Area(APD)-Area(DPC)+Area(BPQ) =
AD*HK - $\frac{AD \cdot KH}{2}$ = Area(ADP) per il punto precedente.

Nei casi limite:

- P coincidente con B, si ha AP parallela DC → il triangolo ADP è equivalente al triangolo DPC avendo la base AB $\cong$ DC e l'altezza congruente, quale distanza fra rette parallele
- P coincidente con C, si ha il triangolo APB equivalente al triangolo ADP per i motivi precedenti.

Classe 3M Liceo Scientifico "Aristosseno" Taranto (TA)

a)

Dalla figura anzitutto osserviamo che i triangoli ABP e CPQ sono congruenti per il secondo criterio di congruenza. Essi hanno infatti BP = PC in quanto P è punto medio di BC, gli angoli APB = CPQ, in quanto opposti al vertice e gli angoli BAP = CQP [era più corretto usare l'uguaglianza tra ABP e PCQ] alterni interni delle rette parallele AB e DQ. Essendo congruenti, questi due triangoli sono anche equivalenti; le loro altezze sono perciò congruenti: QR = AS.

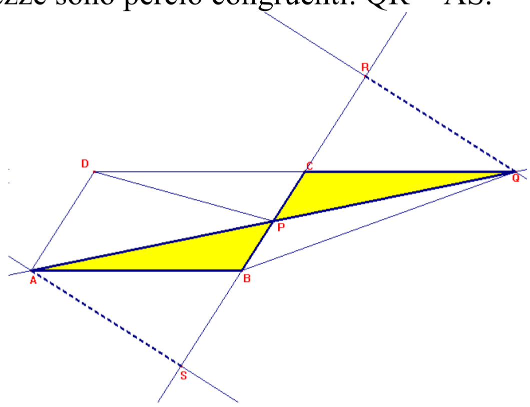


figura 1

I triangoli DPC e APB sono pure equivalenti fra loro avendo basi congruenti (BP = PC) e congruenti altezze (distanze fra rette parallele); come pure sono equivalenti e per lo stesso motivo BPQ e CPQ. In conclusione, per la proprietà transitiva dell'equivalenza, i quattro triangoli indicati nelle figure 1 e 2 hanno tutti la stessa area.

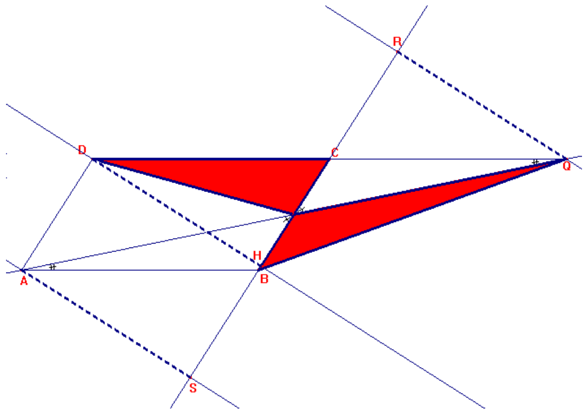
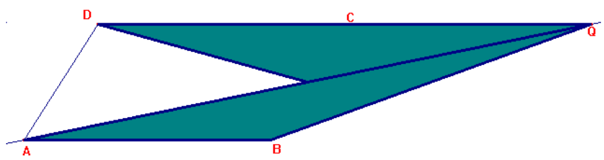
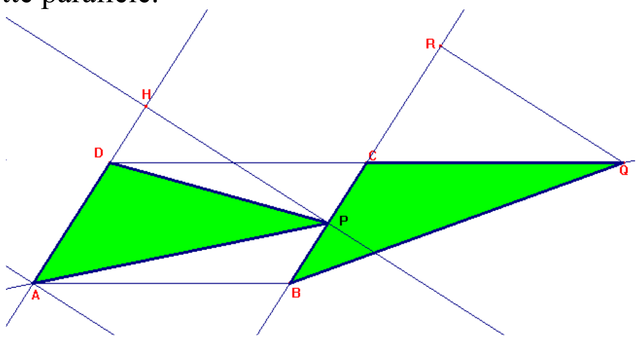


figura 2

I triangoli DPQ ed ABQ sono equivalenti perché somme di triangoli equivalenti.

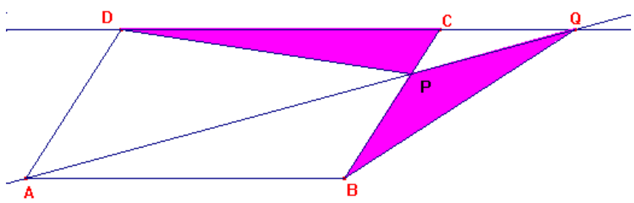


Ma sono anche equivalenti i triangoli ADP e BCQ avendo le basi congruenti: AD = BC, lati opposti del parallelogramma, e le altezze QH = PR [QR = PH], essendo QR = AS come già detto e AS = PH perché distanze fra rette parallele.

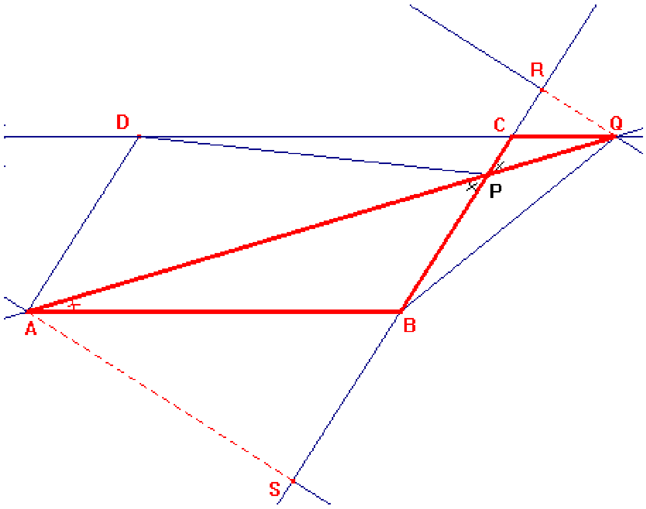


b)

Se il punto P è un generico punto del lato BC , restano equivalenti solo i triangoli DPC e BPQ.



Infatti , i triangoli ABP e CPQ sono ora simili avendo gli angoli congruenti e quindi si ha: BP:PC =AS:QR , ovvero il rapporto tra le loro basi è uguale a quello delle rispettive altezze.
Possiamo allora dire che : $Area(BPQ) = (BP \cdot QR)/2 = (PC \cdot AS)/2 = Area(DPC)$.



Nel caso in cui il punto P coincide con B, il punto Q non esiste (AP è parallela a DC) e gli unici triangoli equivalenti sono APD e DPC, i due triangoli congruenti in cui la diagonale PD divide il parallelogramma. Nel caso in cui P coincide con C, il punto Q coincide con P e C e gli unici triangoli equivalenti sono ABP e ADP, i triangoli congruenti in cui la diagonale AP divide il parallelogramma.