

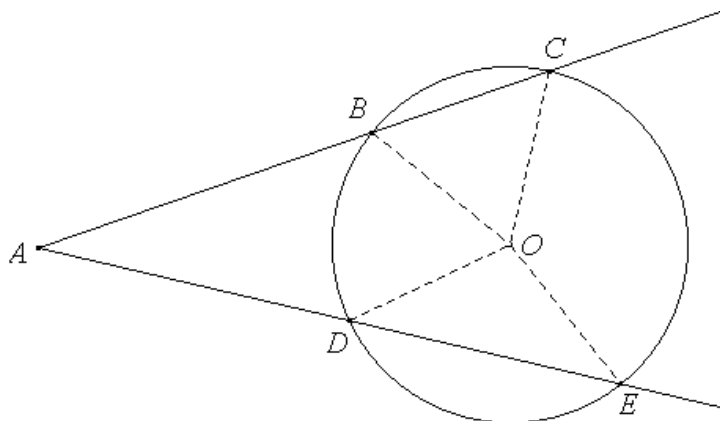
Flatlandia 3-17 Marzo 2008

Il testo del problema:

Da un punto A , esterno a una circonferenza di centro O , vengono tracciate due semirette che intersecano la circonferenza rispettivamente nei punti B, C e D, E .

- 1) Che relazione sussiste tra l'ampiezza dell'angolo $\angle A$ e le ampiezze degli angoli $\angle COE$ e $\angle BOD$?
- 2) Se la distanza tra il punto A e il centro O della circonferenza è uguale al diametro, trovare il valore massimo dell'ampiezza dell'angolo $\angle A$.

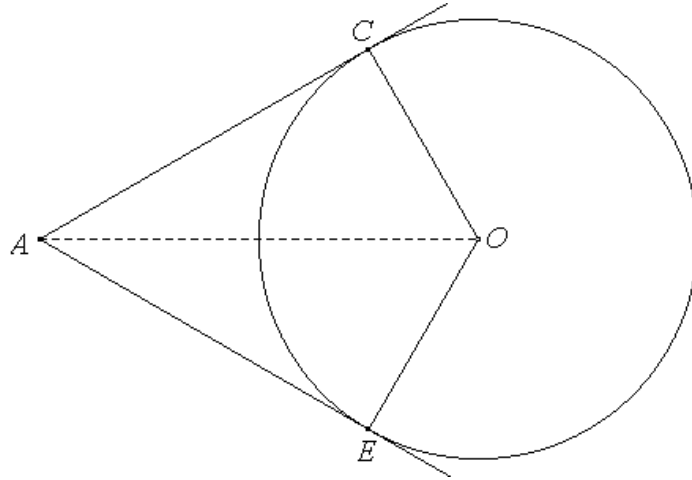
Motivare le risposte.



Commento

Abbiamo ricevuto cinque risposte così suddivise: tre dal biennio delle Scuole Superiori (e due di queste hanno come autori due diversi studenti di una stessa classe) e due dal triennio delle Scuole Superiori (sempre III anno). Il problema poneva due domande (tra loro collegate): nel primo quesito si chiedeva di individuare la relazione esistente tra le ampiezze di tre angoli nella figura proposta; nel secondo quesito si chiedeva di stabilire, in una situazione particolare, il valore dell'ampiezza massima di uno degli angoli individuati nel primo quesito.

In tutte le risposte pervenute viene risolto in modo sostanzialmente corretto il primo quesito (segnaleremo caso per caso le eventuali imprecisioni). Per il secondo quesito, una sola risposta è da ritenere sufficientemente aderente alle richieste del problema. Innanzi tutto ci preme sottolineare che, indipendentemente dalla distanza del punto A dal centro della circonferenza (purché A rimanga esterno a essa) il valore massimo dell'ampiezza dell'angolo $\angle A$ si raggiunge quando le due semirette diventano tangenti alla circonferenza; la particolare distanza tra i punti A e O prevista dal problema aveva lo scopo di evitare nella risposta l'uso delle funzioni trigonometriche (e questo ha contribuito a non considerare accettabile la risposta fornita da una terza superiore che, avendo utilizzato la prima versione del testo del problema, prevedeva l'uso della funzione *arcoseno*). La situazione che prevede il secondo quesito è quella rappresentata nella figura seguente.



Infine [come osservazione finale divertente], in una risposta al secondo quesito viene citato, come motivazione per la congruenza di due triangoli, il “teorema del triangolo rettangolo”: l’unico teorema riguardante i triangoli rettangoli di cui basta citare il nome con cui è storicamente conosciuto è il “teorema di Pitagora”, di tutti gli altri è bene esplicitare almeno parte dell’enunciato.

Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:

ITCG “Ruffini”, Imperia (IM)

ITCG “E. Majorana”, Castrolibero (CS)

LS “Pitagora”, Rende (CS)

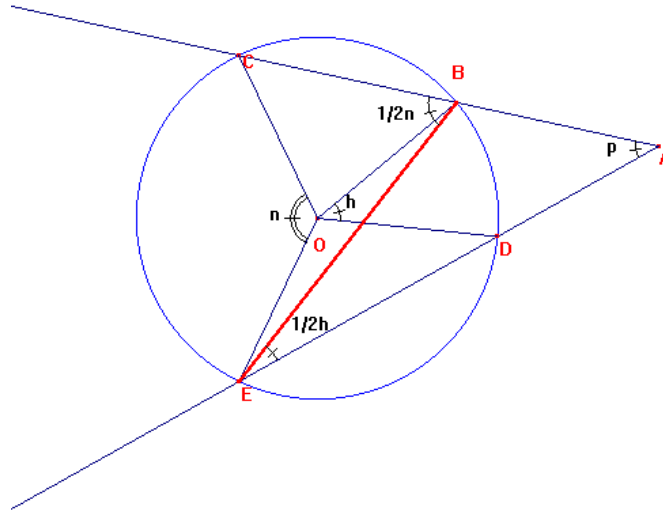
LS “Aristosseno”, Taranto (TA)

NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni

Raffaele Manna, Danilo Smeriglio, Luca Sturino
Classe 2A/G, ITCG "E. Majorana", Castrolibero (CS)

1)



con riferimento alla figura indichiamo:

$$\angle COE = n [n]; \quad \angle BOD = h; \quad \angle BAD = p.$$

$\angle CBE = \frac{1}{2}n$ perché angolo alla circonferenza che incide sullo stesso arco CE [CE] rispetto all'angolo al centro COE [$\angle COE$];

$\angle BED = \frac{1}{2}h$ perché angolo alla circonferenza che incide sullo stesso arco BD [BD] rispetto all'angolo al centro BOD [$\angle BOD$].

Per il teorema dell'angolo esterno $\angle CBE = \frac{1}{2}h + p$, pertanto avremo la seguente relazione:

$$\frac{1}{2}n = \frac{1}{2}h + p,$$

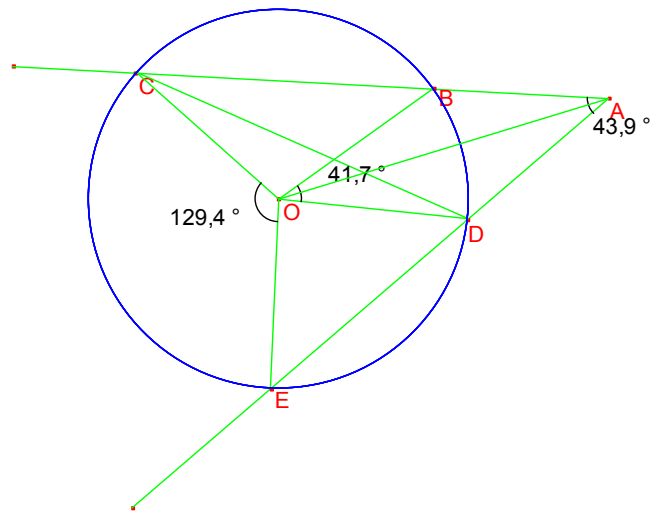
cioè ,

$$2p = n - h;$$

concludendo, possiamo dire che due volte $\angle A$ è uguale alla differenza dell'angolo [tra l'angolo...]
 $\angle COE$ e $\angle BOD$.

2) [[...]]

1)



L'angolo COE è congruente a 2 volte l'angolo CDE perchè angolo al centro che insiste sullo stesso arco CE dell'angolo alla circonferenza CDE.

L'angolo BOD è congruente a 2 volte l'angolo DCB perchè angolo al centro che insiste sullo stesso arco BD dell'angolo alla circonferenze DCB.

L'angolo CDE è esterno al triangolo CDA e quindi è congruente alla somma degli angoli DCA e CAD.

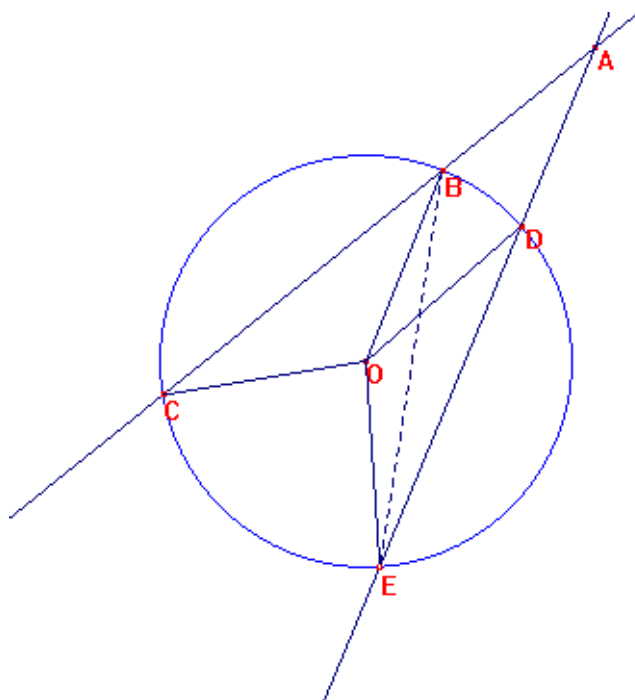
Conseguentemente L'angolo COE è congruente a due volte la somma degli angoli DCA e CAD. Poiché precedentemente si è detto che l'angolo DCB è la metà dell'angolo DOB, segue che l'angolo COE è la somma di DOB e due volte DAC e quindi l'angolo DAC è congruente alla semidifferenza degli angoli COE e DOB.

2)

Se la distanza tra il punto A e il centro della circonferenza è uguale al diametro, l'ampiezza dell'angolo OAB cresce man mano che l'ampiezza dell'angolo OBA diventa di 90 gradi; pertanto, quando le semirette assumono la posizione delle tangenti alla circonferenza e il punto B coincide con il punto C e il punto D con il punto E, allora l'ampiezza dell'angolo BAD sarà massima. Si formerà, cioè, un triangolo rettangolo che avrà la mediana relativa all'ipotenusa congruente a metà ipotenusa, vale a dire, congruente al raggio; l'angolo BOA sarà di 60 gradi e l'angolo BAO di 30 gradi perché complementari. Similmente l'angolo OAD sarà di 30 gradi e quindi l'angolo BAD sarà di 60 gradi per somma di angoli.

Roberto Ferraro
Classe 2B, LS "Pitagora", Rende (CS)

1)



Congiungo il punto E al punto B.

L'angolo al centro COE è il doppio dell'angolo alla circonferenza CBE poiché sottendono lo stesso arco CE;

L'angolo al centro BOD è il doppio dell'angolo alla circonferenza BED poiché sottendono lo stesso arco BD ;

L'angolo CBE è esterno al triangolo EBA quindi pari alla somma dell'angolo BED e dell'angolo A; Quindi l'angolo A è pari alla differenza della metà tra l'angolo COE e la metà dell'angolo BOD

2) [[...]]

Classe 3M Liceo Scientifico "Aristosseno" Taranto (TA)

1)

Tracciate dal punto A le due semirette secanti la circonferenza rispettivamente nei punti B e C la prima e C [E] e D la seconda , tracciamo la semiretta uscente dal punto A e passante per il centro O della circonferenza. Essa incontra la circonferenza nei punti G ed F . Congiungiamo il centro O con i quattro punti B,C , D ed E. Indichiamo le ampiezze di alcuni angoli come mostra la figura : $\angle OAB = a$, $\angle AOB = b$, $\angle OBC = \angle BCO = c$ (il triangolo BOC è isoscele). Poiché ogni angolo esterno ad un triangolo è uguale alla somma degli angoli interni nona [non] adiacenti ad esso , relativamente al triangolo AOB risulta : $c = a + b$ e relativamente al triangolo AOC risulta : $\angle COF = a + c$.Sarà quindi $\angle COF = a + c = a + a + b = 2a + b$. Ripetendo lo stesso ragionamento nella parte inferiore della figura si avrà che : $\angle EOF = 2\angle OAD + \angle AOD$.

Pertanto : $\angle COE = \angle COF + \angle EOF = 2(\angle AOB + \angle AOD) [(\angle OAB + \angle OAD)] + \angle BOA + \angle AOD = 2\angle CAE + \angle BOD$. Da tutto questo segue che : $\angle COE - \angle BOD = 2\angle CAE$, ovvero che la differenza delle ampiezze degli angoli $\angle COE$ e $\angle BOD$ è il doppio dell'ampiezza dell'angolo $\angle A$.

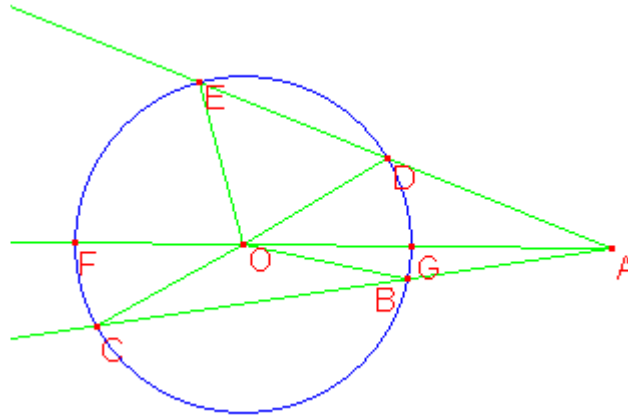
2) [[...]]

Classe 3A Programmatori, ITCG "Ruffini", Imperia (IM)

1)

Dimostriamo che $\angle CAE \cong \frac{1}{2} (\angle COE - \angle BOD)$

Uniamo A con O come in figura:

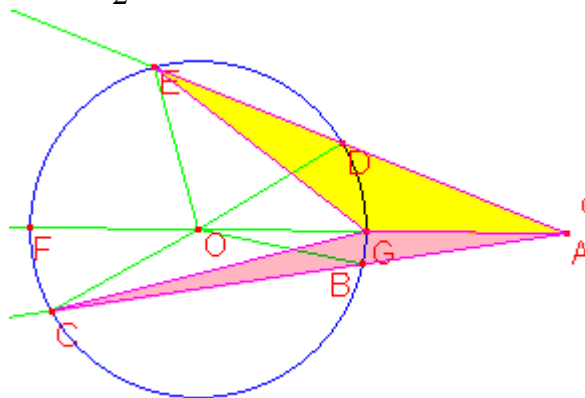


$\angle CGF + \angle EGF \cong \angle EGC \cong \frac{1}{2} \angle COE$ (angolo alla circonferenza e angolo al centro che insistono sullo stesso arco CE)

$\angle BFA + \angle DFA \cong \angle DFB \cong \frac{1}{2} \angle BOD$ (angolo alla circonferenza e angolo al centro che insistono sullo stesso arco BD)

Sottraendo membro a membro, otteniamo

$$\angle CGF + \angle EGF - \angle BFA - \angle DFA \cong \frac{1}{2} (\angle COE - \angle BOD) \quad (1)$$



Per il teorema dell'angolo esterno, applicato ai triangoli CGA e AGE, si ha

$$\angle ACG + \angle CAG \cong \angle CGF \text{ e anche}$$

$$\angle GEA + \angle GAE \cong \angle EGF$$

Sostituiamo nell'uguaglianza precedente ed otteniamo:

$$\angle CGF + \angle EGF - \angle BFA - \angle DFA \cong \angle ACG + \angle CAG + \angle GEA + \angle GAE - \angle BFA - \angle DFA$$

Poiché

$$\angle CAG + \angle GAE \cong \angle CAE \text{ e}$$

$\angle ACG + \angle GEA \cong \frac{1}{2} \angle BOD$ (somma di angoli alla circonferenza e angolo al centro che insistono sullo stesso arco BD),

possiamo scrivere la precedente uguaglianza come segue:

$$\angle CAE + \frac{1}{2} \angle BOD - \frac{1}{2} \angle BOD \cong \angle CAE \quad (2)$$

Applicando la proprietà transitiva a (1) e (2) abbiamo la tesi

$$\angle CAE \cong \frac{1}{2} (\angle COE - \angle BOD)$$

2) [[...]]