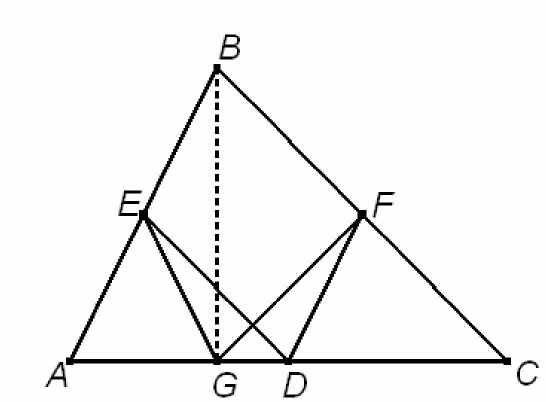
FLAT*landia*

***"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo"* [*(Edwin A. Abbott)*]**

Flatlandia 10-24 Gennaio 2011

Dato un triangolo ABC, si indichino con D, E ed F i punti medi dei lati AC, AB e BC, rispettivamente.
Sia BG l'altezza relativa al lato AC.
a) Dimostrare che gli angoli $\angle EGF$ e $\angle EDF$ sono congruenti.
b) Nell'ipotesi che gli angoli $\angle EGF$ e $\angle EDF$ siano retti di che tipo è il triangolo ABC?
E nell'ipotesi che G coincida con D?
Motivare le risposte.



Commento

Abbiamo ricevuto tredici risposte così suddivise: due da classi prime delle Scuole Superiori, nove da classi seconde, sempre di Scuole Superiori e infine una risposta da una studentessa che non precisa la Classe di appartenenza.
Il problema poneva tre domande (tra loro collegate): nella prima si chiedeva di dimostrare la congruenza di due angoli presenti nella figura avente le caratteristiche specificate dal testo; nella seconda e terza domanda (che costituivano un caso particolare della figura prevista dal problema) si chiedeva di stabilire la natura del triangolo studiato nei casi particolari indicati.
In sei delle risposte pervenute il problema viene risolto in tutte le sue parti in modo sostanzialmente corretto (salvo piccole imprecisioni). In altre risposte sono invece presenti errori e imprecisioni, spesso accompagnati da una scarsa attenzione alla elaborazione del testo. A questo proposito vogliamo ribadire nuovamente che, a differenza di quanto succede per i triangoli, nei quadrilateri e, in generale, nei poligoni di n lati (con $n > 3$) *non* si può, di regola, modificare l'ordine dei vertici [per intenderci, il quadrilatero *EFDG* *non* coincide col quadrilatero *EFGD*]. Inoltre, sempre a proposito dei quadrilateri, ricordiamo che, se due quadrilateri hanno i lati corrispondenti congruenti, questo *non* implica che i due quadrilateri siano congruenti. Persiste ancora la confusione tra grandezza geometrica e sua misura.
Infine ribadiamo ancora una volta che non è possibile "verificare" con Cabri (o con altro software di Geometria Dinamica) una dimostrazione; Cabri può solo suggerire l'esistenza di una certa proprietà che deve poi essere dimostrata.
Dobbiamo poi con rammarico osservare di nuovo il mancato rispetto delle specifiche stabilite per la scrittura del testo: oltre al già citato caso della mancata precisazione della Classe di appartenenza, abbiamo dovuto rilevare un caso in cui la soluzione era inserita all'interno di un messaggio di posta

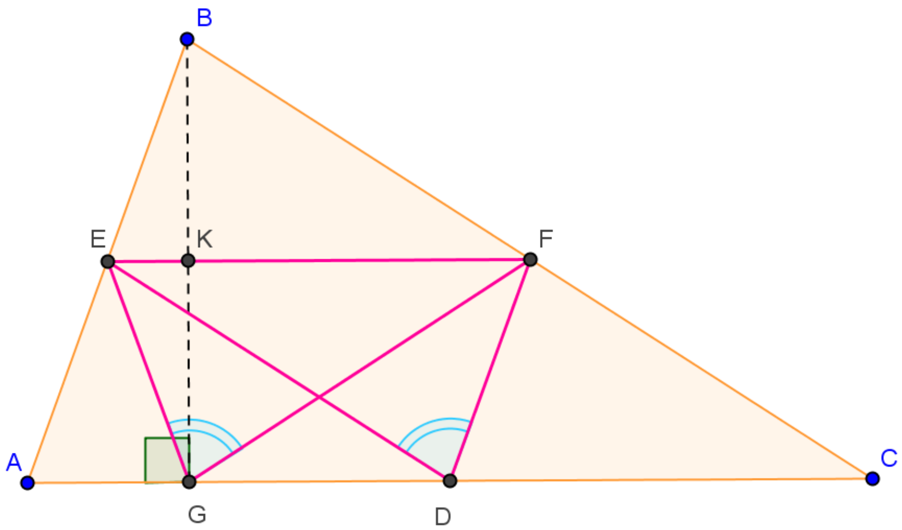
elettronica senza alcuna figura di accompagnamento, un caso in cui la figura non rispettava le specifiche del testo del problema e la soluzione non era in accordo con la figura allegata [e la figura allegata era la “fotografia” dello schermo e non inserita nel testo o su un file a parte] e infine un caso in cui, oltre a una figura praticamente illeggibile, compariva nel testo il riferimento a un punto, ma senza aver minimamente precisato in precedenza come era stato creato tale punto. Ovviamente tutti questi casi non sono stati presi in considerazione per una loro pubblicazione in rete.

Sono pervenute risposte dalle seguenti Scuole:
LS, Collegio S. Carlo, Milano (MI)
LS “Pitagora”, Rende (CS)
LS “Don Milani”, Montichiari (BS)
LS “T. Gullace Talotta”, Roma
LS “C. Cafiero”, Barletta
LS “Aristosseno”, Taranto (TA)
Sc. Inter. Europea, Liceo “A. Spinelli”, Torino (TO)
LC “Arnaldo”, Brescia (BS)
ISIT “Bassi – Burgatti”, Cento (FE)

NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni

Vanessa Roncadori, Classe 1A
Liceo Scientifico "Don Milani", Montichiari (BS)
a)

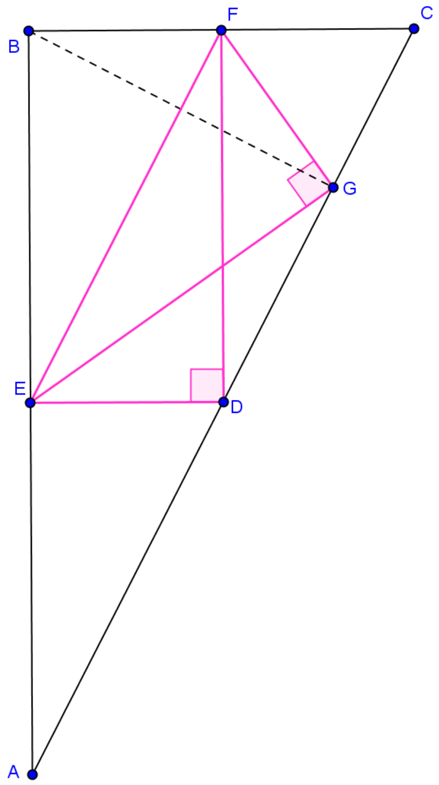


Consideriamo, innanzitutto, il teorema (che è una conseguenza del teorema di Talete) che afferma : *in un triangolo, il segmento che unisce i punti medi di due lati è parallelo al terzo lato.*
Allora posso affermare che il segmento EF è parallelo al segmento AC.
Applicando il teorema di Talete posso scrivere la seguente proporzione :

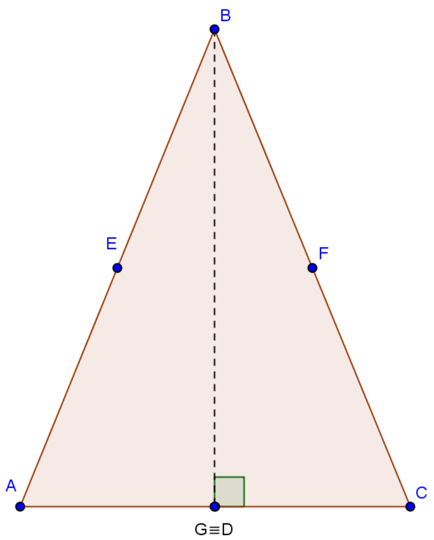
$$\overline{AE} : \overline{EB} = \overline{GK} : \overline{KB}$$

Siccome $AE \cong EB$ per ipotesi, allora $\overline{AE} : \overline{EB} = 1$, quindi $\overline{GK} : \overline{KB} = 1$, cioè $\overline{GK} = \overline{KB}$.
Poichè il segmento EF è parallelo al segmento AC e poiché l'angolo $B\widehat{G}A = 90°$, allora l'angolo $B\widehat{K}E = 90°$ perché gli angoli $B\widehat{G}A$ e $B\widehat{K}E$ sono corrispondenti.
Perciò il punto B è il simmetrico del punto G rispetto la retta passante per i punti E ed F.
Allora anche il triangolo EBF è simmetrico (rispetto la retta passante per i punti E ed F) del triangolo EGF, per cui i triangoli EBF e EGF sono congruenti.
Per il teorema citato all' inizio posso affermare anche che ED // BF e BE // DF.
Per cui il quadrilatero BEDF è un parallelogramma ed essendo EF una sua diagonale, i triangoli EBF e EDF sono congruenti.
Abbiamo quindi che il triangolo EGF è congruente al triangolo EBF ed il triangolo EBF è congruente al triangolo EDF. Per la proprietà transitiva posso affermare che il triangolo EGF è congruente al triangolo EDF e, in particolare, l'angolo $E\widehat{G}F$ è congruente all' angolo $E\widehat{D}F$.

b)
Nell'ipotesi che gli angoli EGF ed EDF siano retti, per le considerazioni svolte al punto a), e facendo riferimento alla figura seguente :

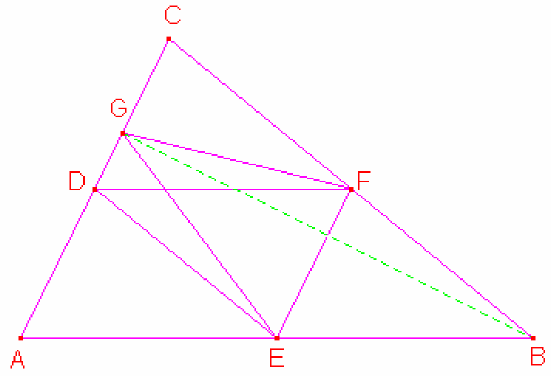


si può concludere che i triangoli EDF ed EBF sono congruenti, quindi l'angolo $E\widehat{B}F = 90°$ e il triangolo ABC è, perciò rettangolo.
Nell' ipotesi, invece, che G coincida con D , si avrebbe il caso rappresentato nella figura seguente:



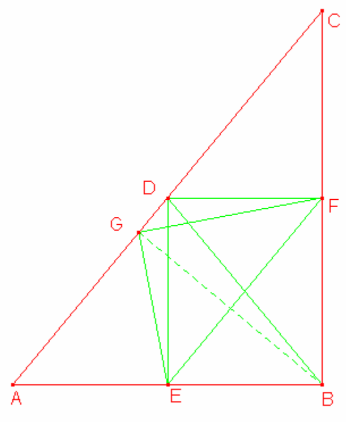
Siccome $AD \cong DC$ e siccome $BG \perp AC$, allora significa che l'altezza BG cade nel punto medio della base AC; ciò comporta che tutti i punti appartenenti all' altezza (che in questo caso giace sull' asse del segmento AC) sono equidistanti dagli estremi del segmento AC.
Questa condizione si verifica solo quando il triangolo ABC è isoscele [o equilatero].[NB. Ogni triangolo equilatero è *anche* isoscele]

Classe 1H*, *LS "Aristosseno"*, *Taranto (TA)
a)



Costruita la figura, osserviamo che i segmenti DF, EF e DE, che congiungono i punti medi dei lati del triangolo ABC, sono paralleli rispettivamente ai lati AB, AC e BC e sono anche congruenti alla metà di ciascuno dei tre lati. Inoltre il triangolo AGB è rettangolo in G e la sua mediana GE ,relativa all'ipotenusa AB, è uguale alla metà dell'ipotenusa stessa in quanto è il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo AGB. Pertanto risulta: GE = AE = EB e siccome è pure EB = DF, il quadrilatero EFDG [EFGD] è un trapezio isoscele (ha due lati paralleli e i lati obliqui congruenti). I triangoli DEF ed EGF sono quindi congruenti (per il III criterio) essendo GF =DE (diagonali del trapezio isoscele), GE = DF ed avendo il lato EF in comune [e la conclusione?].

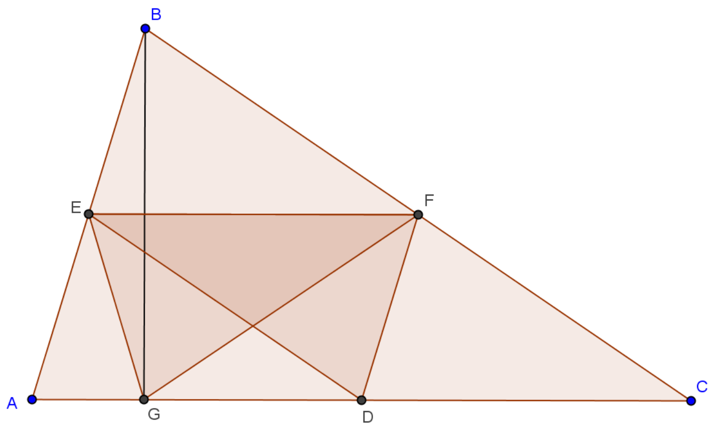
b)



Nel caso in cui EGF = EDF = 90° il triangolo ABC è rettangolo in B. Infatti DE è la congiungente i punti medi dei lati AC e AB del triangolo e dovrà essere parallela a BC e uguale alla sua metà così come DF è la congiungente i punti medi dei lati AC e BC e quindi dovrà essere parallela ad AB e uguale alla sua metà [e la conclusione?]. Il trapezio EFGD ha le diagonali perpendicolari ai lati obliqui.

[[…]] [I due casi particolari sono tra loro indipendenti: il secondo non si aggiunge al primo]

Michele Tassinari e compagni, Classe 2U
ISIT "Bassi – Burgatti", Cento (FE)
a)



Ip:
AE ≅ EB
BF ≅ FC
AD ≅ DC
BG ⊥ AC

Ts:
$E\hat{G}F \cong E\hat{D}F$

Considero i triangoli EDF e EGF:
- EF in comune;
- ED ≅ GF perché il segmento che congiunge i punti medi di due lati di un triangolo è congruente alla metà del terzo lato ed è parallelo ad esso quindi ED è la metà di BC quindi ED ≅ BF ≅ FC; d'altra parte GF ≅ BF ≅ FC perché raggi della circonferenza circoscritta al triangolo rettangolo GCB; quindi per la proprietà transitiva ED ≅ GF.
- DF ≅ GE per un ragionamento del tutto analogo a quello precedente: DF ≅ ½ AB, EG ≅ ½ AB, quindi per la proprietà transitiva DF ≅ EG.

Quindi EDF ≅ EGF per terzo criterio di uguaglianza dei triangoli, in particolare l'angolo EDF è congruente all' angolo EGF.

C.V.D.

b)
Considero i triangoli EFD ed EBF:
- EF in comune;
- ED ≅ BF perché il segmento che congiunge i punti medi di due lati di un triangolo è uguale alla metà del terzo lato ed è parallelo ad esso quindi ED è la metà di BC quindi ED = BF, essendo F punto medio di BC;
- DF ≅ EB per analogo ragionamento.

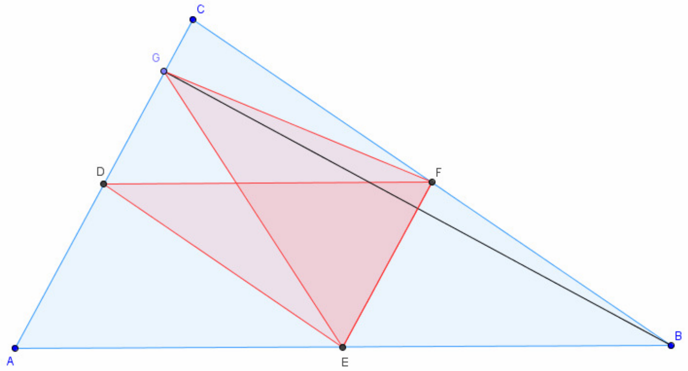
Quindi EFD ≅ EBF per terzo criterio di uguaglianza dei triangoli, in particolare $E\hat{D}F \cong E\hat{B}F$.

Se gli angoli EGF ed EDF fossero retti allora anche l'angolo in $\hat{B}$ sarebbe retto, quindi il triangolo ABC sarebbe rettangolo.

Se G coincide con D si avrebbe un triangolo isoscele perché la mediana BD coinciderebbe con l' altezza BG e questa è una condizione necessaria e sufficiente per avere un triangolo isoscele.

Nicola Rizzi, Classe 2D
Liceo Scientifico "C. Cafiero", Barletta (BA)

a)



Prendiamo in considerazione il triangolo *ABC*: osserviamo che DF ≅ AE ≅ EB poiché la congiungente dei punti medi di due lati di un triangolo è parallela al terzo lato e congruente alla sua metà (Conseguenza del Teorema di Talete). È possibile fare un ragionamento analogo per DE ≅ FC ≅ FB.
Prendiamo in considerazione il triangolo rettangolo *CGB*: osserviamo che GF è la mediana relativa all'ipotenusa $\Rightarrow$ GF ≅ CF ≅ FB (In un triangolo rettangolo la mediana relativa all'ipotenusa è congruente alla metà dell'ipotenusa stessa). Stesso discorso vale per GE che nel triangolo *GAB* è la mediana relativa all'ipotenusa AB $\Rightarrow$ GE ≅ AE ≅ EB.
DF ≅ AE ≅ EB ≅ GE e DE ≅ FC ≅ FB ≅ GF
Adesso prendiamo in considerazione e triangoli *EDF* e *EGF,* questi hanno:

$$\left.\begin{array}{r} ED \cong GF \text{ per precedente dimostrazione} \\ EG \cong DF \text{ per precedente dimostrazione} \\ EF \text{ in comune} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

i due triangoli sono congruenti per il 3° criterio di congruenza
***EGF* ed *EDF* sono congruenti perché angoli corrispondenti in triangoli congruenti.**

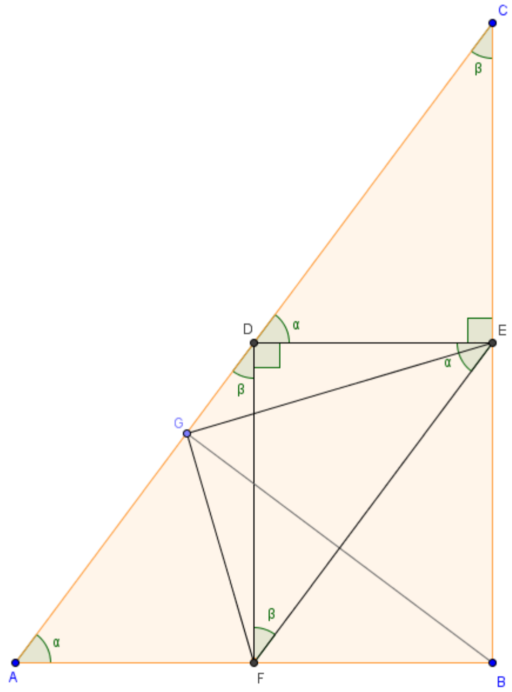
b)
Nell'ipotesi in cui EGF ed EDF siano retti avremo che la figura sarà simile a quella riportata in basso;dobbiamo dimostrare che *ABC* è un triangolo rettangolo, cioè che CBA è un angolo retto.
Innanzitutto prendiamo in considerazione il triangolo DEF retto in D e chiamiamo α l'ampiezza di DEF, β quella di DFE $\Rightarrow$ $\alpha + \beta = 90°$.
In seguito osserviamo i triangoli DEF e ADF che hanno :

$$\left.\begin{array}{r} DF \text{ in comune} \\ AF \cong DE \text{ per la conseguenza del teorema di Talete} \\ AD \cong FE \text{ per la conseguenza del teorema di Talete} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

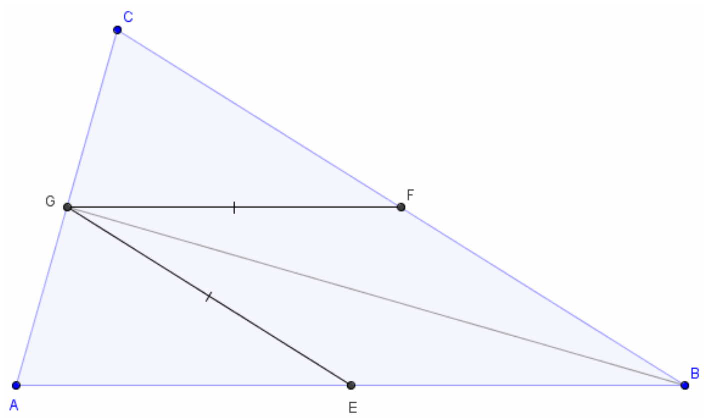
I due triangoli sono congruenti per il 3° criterio di congruenza
Quindi l'angolo DAF ≅ DEF e la loro ampiezza sarà α perché angoli corrispondenti in triangoli congruenti.
Adesso, invece, prendiamo in considerazione *DEF* ed *EDC* che hanno:

$$\left.\begin{array}{r} DE \text{ in comune} \\ DF \cong CE \text{ per la conseguenza del teorema di Talete} \\ CD \cong FE \text{ per la conseguenza del teorema di Talete} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

i due triangoli sono congruenti per il 3° Criterio di congruenza, l'angolo DCE $\cong$ DFE e la loro ampiezza sarà β.
Infine osserviamo *ABC*: **l'angolo CBA ha ampiezza 180° - (α + β); ma come detto in precedenza α + β = 90° $\Rightarrow$ CBA avrà ampiezza 180° - 90° $\Rightarrow$ CBA è un angolo retto.**



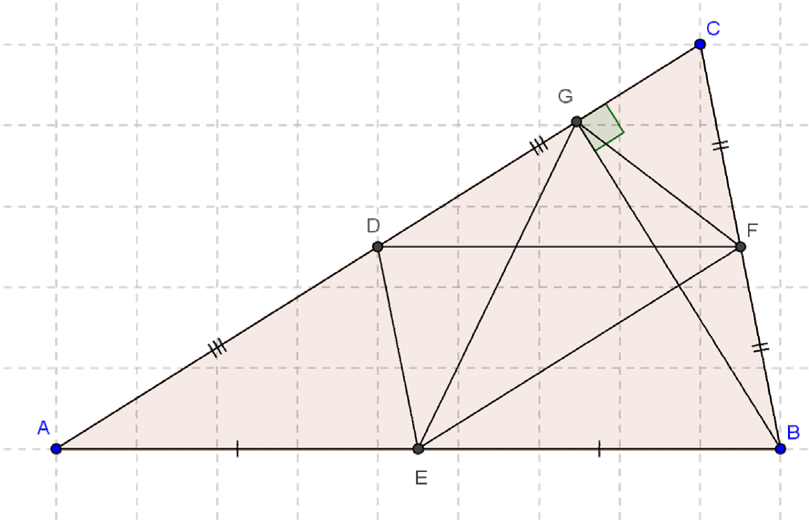
E nell'ipotesi che *G* coincida con *D*?



Nel caso in cui G coincide con D il triangolo è isoscele, infatti **un triangolo in cui coincidono la mediana e l'altezza relative a uno stesso lato è isoscele e ha per base il lato considerato.**

Federica Dimonte , Classe ??? , Liceo Scientifico "C. Cafiero" Barletta (BA)
non specifica la classe e la sezione

Claudio Donatoni, Classe 2B
Liceo Scientifico "Don Milani", Montichiari (BS)
a)



Per il teorema di Talete $\overline{DF}//\overline{AB}$ e $\overline{DF}\cong\overline{EB}$ quindi $E\hat{D}F\cong E\hat{B}F$ perché il quadrilatero EDFB è un parallelogramma.

Traccio il segmento $\overline{EF}$.

Per la proprietà caratteristica dei triangoli rettangoli (e cioè che in un triangolo rettangolo la mediana relativa all'ipotenusa è congruente a metà ipotenusa) $\overline{AE}\cong\overline{EG}\cong\overline{EB}$ e $\overline{CF}\cong\overline{BF}\cong\overline{FG}$.

I triangoli EGF e EBF sono allora congruenti per il terzo criterio e $E\hat{G}F\cong E\hat{B}F$.

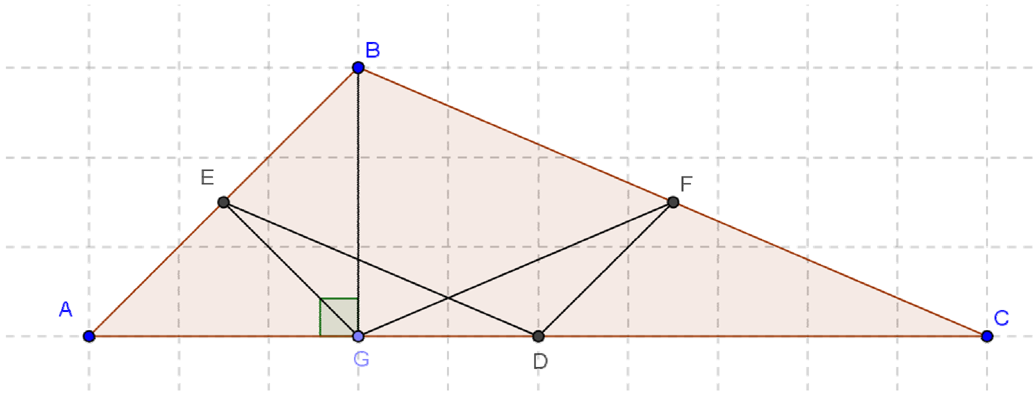
Ma $E\hat{D}F\cong E\hat{B}F$ per dimostrazione precedente, quindi $E\hat{D}F\cong E\hat{G}F$.

Dato che il quadrilatero EBFD è un parallelogramma (dimostrazione precedente), se $F\hat{G}E\cong E\hat{D}F=90°$ l'angolo $E\hat{B}F$ sarebbe retto, quindi il triangolo ABC sarebbe rettangolo.

Se il punto G coincide con il punto D il triangolo ABC diventa isoscele perché $\overline{BD}\perp\overline{AC}$ e $\overline{CA}\cong\overline{DA}$ [$\overline{CD}\cong\overline{DA}$] e perciò la retta passante per i punti B e D è l'asse del segmento $\overline{AC}$

[conclusione?].

Nicola Picenni, Classe 2B
Liceo Scientifico "Don Milani", Montichiari (BS)
a)



1) Sia $E\hat{A}G = \alpha$. Per la proprietà caratteristica dei triangoli rettangoli (e cioè che in un triangolo rettangolo la mediana relativa all'ipotenusa è congruente a metà ipotenusa) $\overline{AE} \cong \overline{EG} \cong \overline{EB}$. Quindi i triangoli AEG e BEG sono triangoli isosceli e $E\hat{G}A = \alpha$ e $E\hat{G}B \cong E\hat{B}G = 90° - \alpha$.

Sia $G\hat{C}B = \beta$. Allora $G\hat{B}C = 90° - \beta$ e, per la sopracitata proprietà caratteristica dei triangoli rettangoli, $\overline{GF} \cong \overline{BF} \cong \overline{FC}$.

Quindi i triangoli GFC e BGF sono triangoli isosceli e $F\hat{G}C = \beta$ e $F\hat{G}B = 90° - \beta$.

Perciò siccome $E\hat{B}F = 180° - \alpha - \beta$ e $E\hat{G}F = (90° - \alpha) + (90° - \beta) = 180° - \alpha - \beta$

allora $E\hat{B}F \cong E\hat{G}F$.

Per il teorema di Talete $\overline{ED} // \overline{BC}$ $\left(e \quad \overline{ED} = \frac{\overline{BC}}{2} \right)$ e $\overline{FD} // \overline{AB}$ $\left(e \quad \overline{FD} = \frac{\overline{AB}}{2} \right)$.

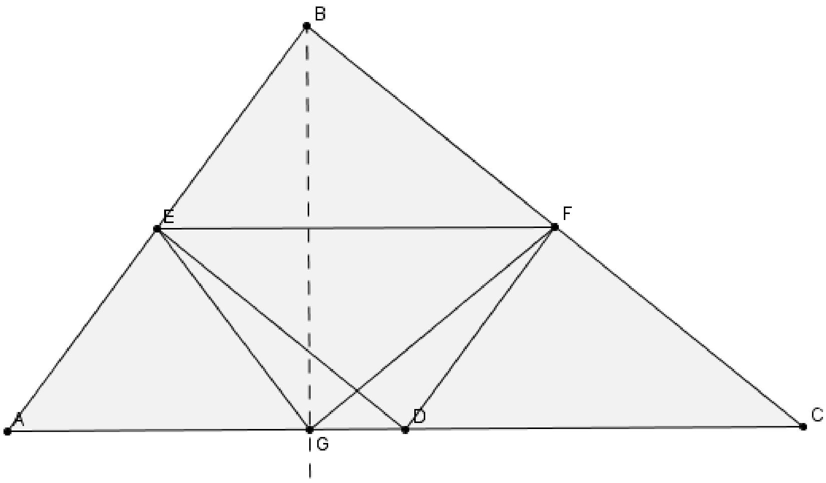
Allora BEDF è un parallelogramma e $E\hat{B}F \cong E\hat{D}F$. Quindi, per la proprietà transitiva, $E\hat{D}F \cong E\hat{G}F$.

2) Se $E\hat{G}F \cong F\hat{D}E = 90°$, per quanto dimostrato in 1) (cioè che $E\hat{B}F \cong E\hat{D}F \cong E\hat{G}F$), $E\hat{B}F = 90°$ e il triangolo ABC è un triangolo rettangolo.

Se G coincide con D, il triangolo ABC è un triangolo isoscele poiché i triangoli ABG e BGC sono congruenti per il 1° criterio di congruenza (avendo $\overline{BG}$ in comune, $\overline{AG} \cong \overline{GC}$ perchè il punto G coincide con il punto medio D e $A\hat{G}B \cong C\hat{G}B$ perché $\overline{BG} \perp \overline{AC}$) e quindi $\overline{AB} \cong \overline{CB}$.

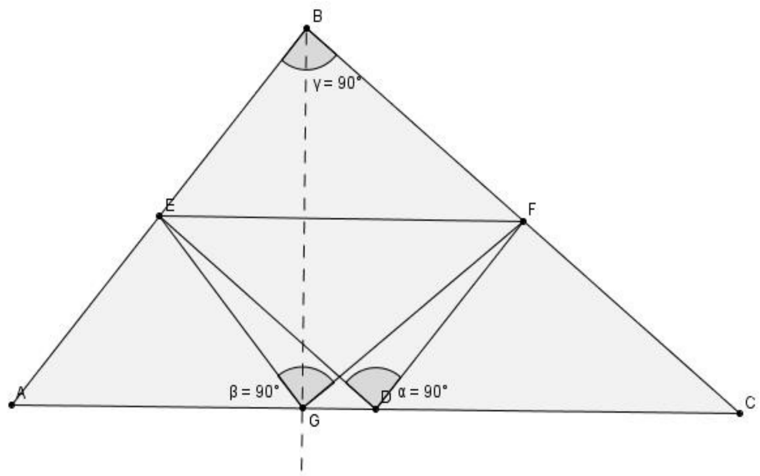
Daniele Bonavita, Valerio Bonesi, Claudio Ceccarelli, Marco Frasca, Classe 2D
Liceo Scientifico “T. Gullace”, Roma

a)

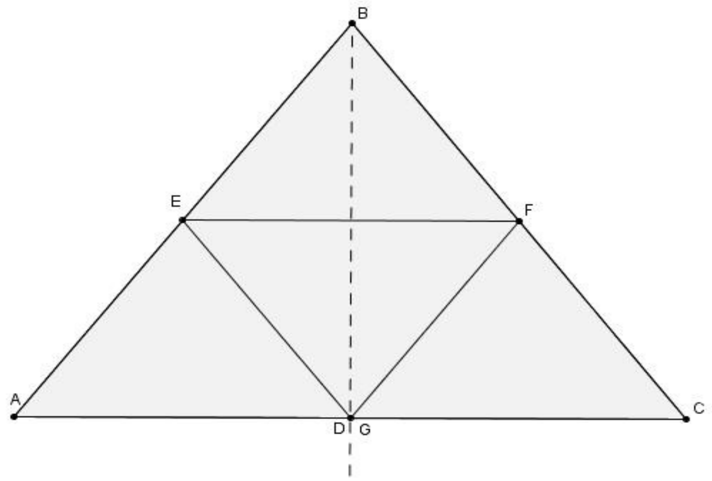


Considero il triangolo EGB. Esso è isoscele poiché EG è la mediana relativa all'ipotenusa del triangolo rettangolo AGB, pertanto la sua lunghezza è uguale alla metà della lunghezza dell'ipotenusa (AB) stessa; ovvero EG□EB [$\overline{EG} = \overline{EB}$].
DF è il segmento che congiunge i punti medi di AC e BC, quindi per il corollario del teorema di Talete (“il segmento che unisce i punti medi di due lati di un triangolo è parallelo al terzo e ne è la metà” [la sua lunghezza è pari alla metà del terzo lato]) è parallelo ad AB e la sua lunghezza è la metà della lunghezza di AB. Per questo motivo, per la proprietà transitiva delle uguaglianze, EG□DF [$\overline{EG} = \overline{DF}$].
EF è il segmento congiungente i punti medi E e F di AB e BC, quindi, per lo stesso teorema citato precedentemente, EF//GD.
Pertanto il quadrilatero EFDG è un trapezio isoscele avendo due lati opposti paralleli e gli altri due congruenti e non paralleli. Essendo un trapezio isoscele gode di tutte le proprietà del trapezio isoscele e, in particolare, di avere le diagonali congruenti.
Considero i triangoli EGF e EDF. Sono congruenti per il terzo criterio di congruenza dei triangoli poiché: EG□DF [$\overline{EG} = \overline{DF}$] per dimostrazione precedente; GF□ED [$\overline{GF} = \overline{ED}$] perché diagonali di un trapezio isoscele; EF in comune. Essendo congruenti hanno tutti gli elementi [corrispondenti] congruenti, e in particolare gli angoli EGF [e] EDF.

b)
Nell'ipotesi che *gli angoli EGF e EDF siano retti*, il triangolo ABC sarebbe un triangolo rettangolo. Infatti gli angoli EDF e ABC sono congruenti poiché i triangoli BFE e DFE sono congruenti per il terzo criterio di congruenza; essi hanno: i lati ED e FB congruenti per il corollario al Teorema di Talete (“il segmento che unisce i punti medi di due lati di un triangolo è parallelo al terzo e ne è la metà” [la sua lunghezza è pari alla metà del terzo lato]) , DF□EB [$\overline{DF} = \overline{EB}$] per lo stesso motivo e il lato EF in comune.
Essendo i due triangoli BFE e DFE congruenti hanno tutti gli elementi [corrispondenti] congruenti, ed in particolare gli angoli EDF e EBF. Dato che EDF secondo questa ipotesi è retto, allora anche EBF sarà retto e il triangolo ABC sarà rettangolo.

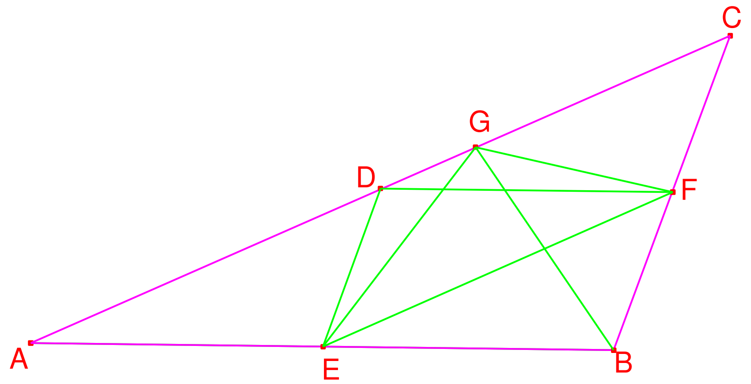


Se *D invece coincidesse con G*, ABC sarebbe un triangolo isoscele di base AC, poiché solo in quel caso l'altezza e la mediana [relative ad AC] coinciderebbero.



Maria Aragona, Manuela Scarivaglione,Anna Carmen Leonetti, Classi 2E e 2B
Liceo Scientifico “Pitagora”,Rende (CS)

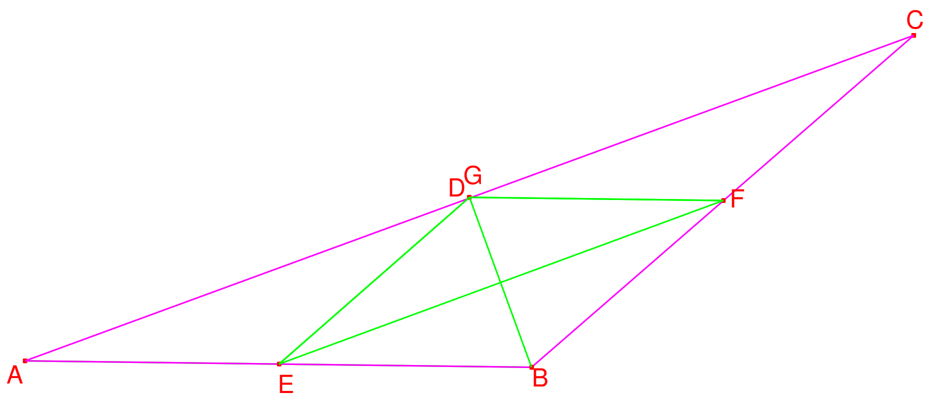
a)



Il triangolo BGC risulta essere rettangolo in quanto $\widehat{BGC} \cong \frac{\pi}{2}$.[$\widehat{BGC} = \frac{\pi}{2}$] In esso dunque FG ≅ CF poiché FG è l’altezza [la mediana] relativa all’ipotenusa del triangolo rettangolo BGC.
Lo stesso avviene per il triangolo AGB retto in $\hat{G}$, dunque EG ≅ AE per il medesimo teorema.
Abbiamo inoltre che DE ≅ CF e DF ≅ AE per il teorema di Talete [applicato ai triangoli].
Traccio una retta che congiunga i punti E ed F, ed osservo i triangoli EDF ed EGF. Essi hanno:
EF in comune;
ED ≅ FG per la proprietà transitiva della congruenza;
DF ≅ EG per la proprietà transitiva della congruenza.
I due triangoli sono congruenti per il terzo criterio di congruenza, ed in particolare:

$$\widehat{EGF} \cong \widehat{EDF}$$

b)
[[…]]



Se G ≡ D il quadrilatero DFBE risulta essere un rombo poiché:
ED ≅ BF ed ED parallelo a BF per il teorema di Talete [applicato ai triangoli],
GF ≅ EB e GF parallelo ad EB per la corrispondenza [il teorema] di Talete [applicato ai triangoli].
Per la proprietà transitiva dunque:
AE + EB ≅ BF + FC, ossia AB ≅ BC.
Il triangolo ABC risulterà essere quindi isoscele.