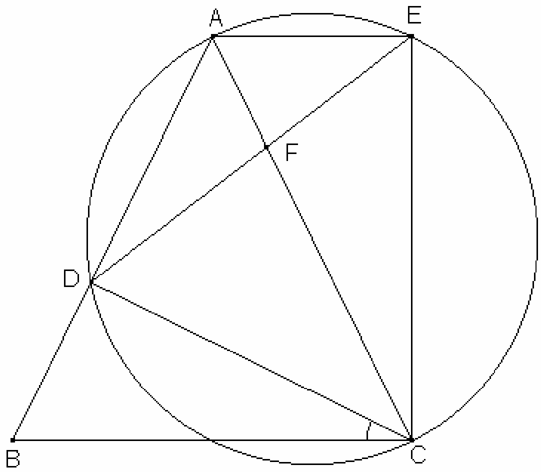
FLAT*landia*

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" [(Edwin A. Abbott)]

Flatlandia 8 - 22 Maggio 2011

Il testo del problema:

Considerato un triangolo *ABC*, acutangolo e isoscele sulla base *BC*, si chiami *D* il piede della sua altezza condotta per *C* e *si costruisca* (motivando la costruzione), dalla stessa parte di *A*, rispetto a *BC*, il punto *E* in modo che il triangolo *ECD* sia simile ad *ABC* (con i lati *CD* e *BC* che si corrispondono).
1) Dimostrare che:
a) *EC* è perpendicolare a *CB*.
b) I triangoli *EFC* e *AFD*, dove *F* è il punto comune ai segmenti *ED* e *AC*, sono simili e di conseguenza lo sono anche i triangoli *EFA* e *CFD*.
c) La retta *EA* è parallela a *CB*.
d) Il quadrilatero *AECD* è iscrivibile in una circonferenza.



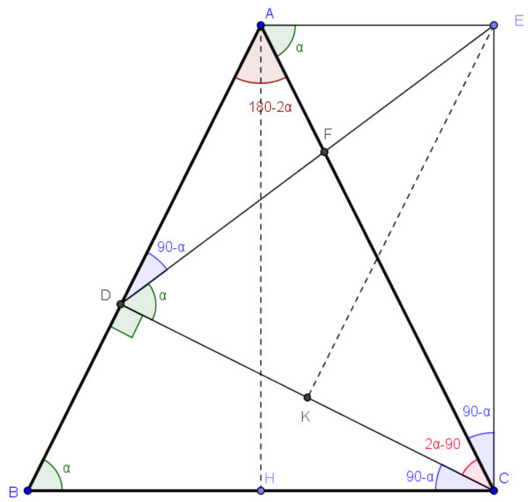
Commento
Abbiamo ricevuto cinque risposte: due da classi seconde di Licei Scientifici e tre risposte da una stessa classe terza PNI sempre di Liceo Scientifico.
Il problema chiedeva innanzi tutto di costruire, partendo da un dato triangolo isoscele acutangolo, un secondo triangolo simile al primo, motivando la costruzione effettuata. Si chiedeva poi di dimostrare quattro diverse proprietà geometriche. Precisamente: a) che un lato del triangolo costruito era perpendicolare alla base del triangolo iniziale; *b*) che quattro triangoli risultanti dalla costruzione fossero a due a due simili; *c*) che la retta congiungente i vertici opposti alle basi dei due triangoli isosceli fosse parallela alla base del primo di essi; *d*) che un quadrilatero risultante dalla costruzione fosse iscrivibile in una circonferenza.
In quattro delle risposte pervenute il problema viene risolto in tutte le sue parti in modo sufficientemente corretto (salvo alcune imprecisioni sia nella costruzione che nelle diverse dimostrazioni), mentre nella restante risposta non si fornisce un'adeguata motivazione della costruzione effettuata.
Dobbiamo di nuovo ribadire la necessità di distinguere tra un ente geometrico e la sua misura (in particolare tra un angolo e la misura della sua ampiezza).

Sono pervenute risposte dalle seguenti Scuole:
LS “Don Milani”, Montichiari (BS)
LS “Pitagora”, Rende (CS)
LS “G. Spezia”, Domodossola (NO)

NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni

Claudio Donadoni, Nicola Picenni, Classe 2B
Liceo Scientifico “Don Milani”, Montichiari (BS)



Sia $\overline{AH}$ [AH] l'altezza (e mediana) del triangolo ABC relativa a $\overline{BC}$ [BC]. Tracciando l'asse del segmento DC (passante per il suo punto medio K), sia E un punto su tale asse in modo che:

$$\overline{BC} : \overline{DC} = \overline{AH} : \overline{EK} \text{ [come si costruisce il punto } E\text{?]}$$

Il triangolo EDC è isoscele poiché E, appartenendo all'asse di $\overline{DC}$ [DC], è equidistante da D e C.
I triangoli EKD e AHB sono simili per il 2° criterio di similitudine poiché hanno :

$E\hat{K}D \cong A\hat{H}B$ [[=90°]] [di ampiezza pari a 90°] e $\dfrac{\overline{BC}}{2} : \dfrac{\overline{DC}}{2} = \overline{AH} : \overline{EK}$ cioè $\overline{BH} : \overline{DK} = \overline{AH} : \overline{EK}$.

Quindi $A\hat{B}H \cong E\hat{D}K$ [[=α]] [e indichiamo con α la loro ampiezza comune].
Poiché il triangolo ABC è isoscele $A\hat{B}C = A\hat{C}B$ [[=α]] [e la loro ampiezza vale α].
Anche il triangolo EDC è isoscele per dimostrazione precedente e quindi $E\hat{D}C \cong E\hat{C}D$ [[=α]] [e la loro ampiezza vale α].
Allora i triangoli EDC e ABC sono simili per il 1° criterio di similitudine poiché hanno :
$E\hat{D}C \cong A\hat{B}C \cong E\hat{C}D = A\hat{C}B$ [[=α]] [tutti di ampiezza α].

a)
$B\hat{C}D = 180° - C\hat{B}D - B\hat{D}C = 180° - \alpha - 90° = 90° - \alpha$
$A\hat{C}D = A\hat{C}B - B\hat{C}D = \alpha - (90° - \alpha) = 2\alpha - 90°$
$A\hat{C}E = D\hat{C}E - A\hat{C}D = \alpha - (2\alpha - 90°) = 90° - \alpha$
$B\hat{C}E = B\hat{C}D + A\hat{C}D + A\hat{C}E = 90°$, per cui BC è perpendicolare ad EC.

b)
I triangoli AFD e EFC sono simili per il 1° criterio di similitudine poiché hanno :
$A\hat{F}D \cong E\hat{F}C$ (perché opposti al vertice)
$B\hat{A}C \cong D\hat{E}C$ [[$= 180 - 2\alpha$]] [di ampiezza pari a 180° − 2α] (perché i triangoli ABC e DEC sono simili).
Quindi $\overline{AF} : \overline{DF} = \overline{EF} : \overline{CF}$.
Allora i triangoli AFE e DFC sono simili per il 2° criterio di similitudine poiché hanno :
$A\hat{F}E \cong D\hat{F}C$ (perché opposti al vertice) e $\overline{AF} : \overline{DF} = \overline{EF} : \overline{CF}$, per cui $E\hat{A}F \cong F\hat{D}C$[[$= \alpha$]] [e la loro ampiezza vale α].

c)
Allora la retta BC è parallela alla retta AE perché si formano angoli alterni interni congruenti $\left(B\hat{C}A \cong C\hat{A}E \text{ [[} = \alpha \text{]]}\right)$ con la trasversale AC.

d)
Quindi, se AE // BC, essendo $BC \perp EC$ per dimostrazione precedente, $AE \perp EC$ e $A\hat{E}C = 90°$.
Anche $A\hat{D}C = 90°$ perché $CD \perp AB$ per ipotesi.
Allora

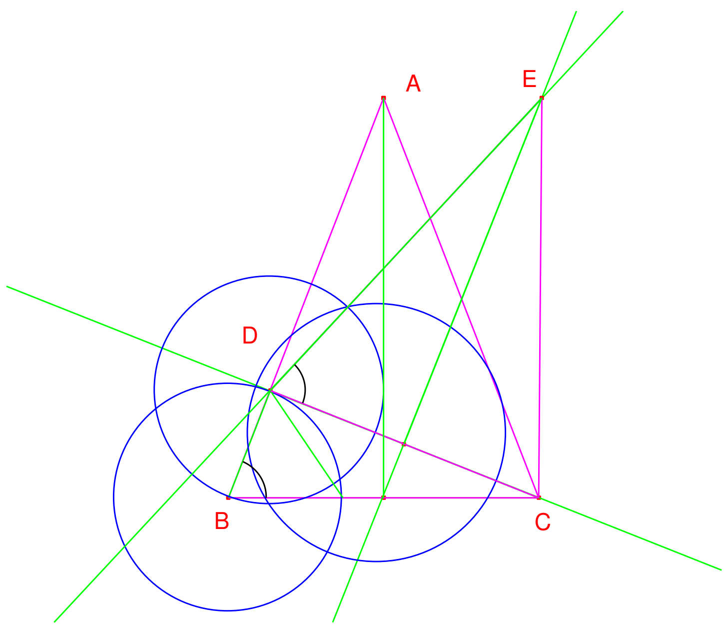
$$A\hat{D}C + A\hat{E}C = 90° + 90° = 180°$$

e

$$D\hat{A}E + E\hat{C}D = 360° - \left(A\hat{D}C + A\hat{E}C\right) = 360° - 180° = 180°$$

Quindi il quadrilatero AECD è inscrivibile [in una circonferenza] perché ha gli angoli opposti supplementari.

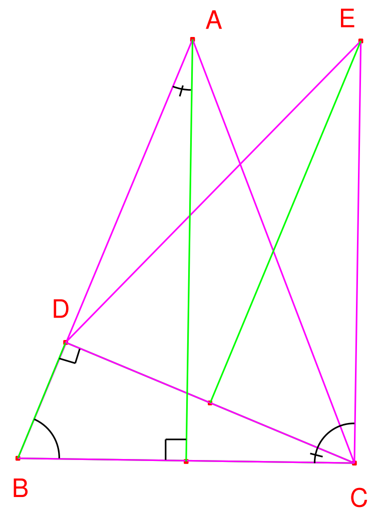
Maria Aragona, Simona Foglia, Martina Rovella, Classe 2E
Liceo Scientifico "Pitagora", Rende (CS)



Si costruiscono due circonferenze di raggio BD aventi centro rispettivamente in B e D.
Si uniscono i punti D ed L [questo punto non è segnato in figura] e si costruisce la circonferenza di raggio DL e centro P (intersezione della seconda circonferenza con l'altezza CD) [anche questo

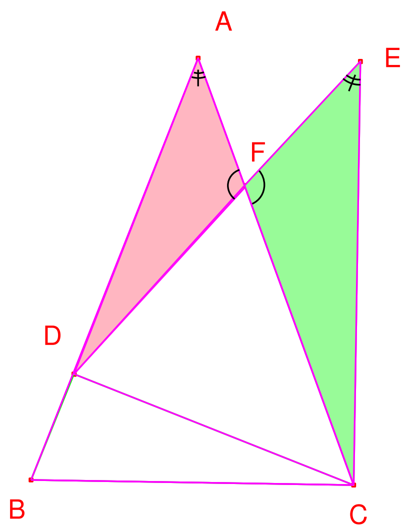
punto non è segnato in figura]. Si ottiene il punto S [anche questo punto non è segnato in figura] poiché in circonferenze uguali a corde congruenti corrispondono angoli al centro congruenti essendo DL ≅ PS allora $\widehat{SDC} \cong \widehat{DBC}$.
[Prolungando DS] Si incontra [si determina] il punto E [intersezione della retta DS con] [[sul]]l'asse di DC e si costruisce il triangolo isoscele DCE ~ ABC perché hanno due angoli congruenti.

a)



Osserviamo il triangolo BDC. Esso è retto in D poiché CD è perpendicolare ad AB per costruzione. Quindi gli angoli $D\hat{B}C$ e $D\hat{C}B$ sono complementari.
A sua volta l'angolo $D\hat{B}C$ è congruente ad $E\hat{C}D$ per dimostrazione precedente. Essendo quindi gli angoli $E\hat{C}D$ e $D\hat{C}B$ complementari e consecutivi avremo $E\hat{C}B$ [[≅]] di ampiezza pari a $\frac{\pi}{2}$, dunque EC è perpendicolare a CB.

b)



Osserviamo i triangoli AFD e FEC. Essi hanno $\widehat{AFD} \cong \widehat{EFC}$ perché opposti al vertice e $\widehat{BAC} \cong \widehat{DEC}$ per dimostrazione precedente. [Quindi i due triangoli sono …]
Ora osserviamo i due triangoli AFE e FDC. In essi [per il precedente risultato] si verifica la proporzione

AF:FE = FD:FC

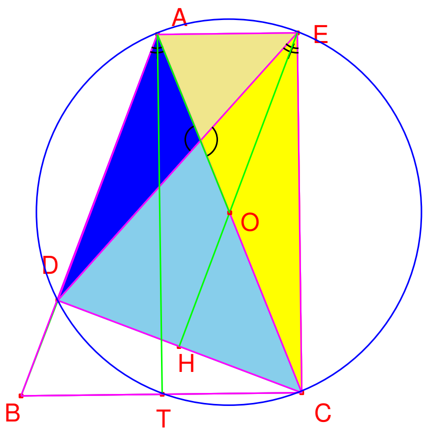
Utilizzando la proprietà del permutare dei medi, si verifica quindi la proporzione

AF:FD = FE:FC

[Inoltre gli angoli AFE e DFC sono congruenti perché …]

I due triangoli sono dunque simili, e quindi abbiamo $\widehat{FAE} \cong \widehat{FDC}$ e $\widehat{AEF} \cong \widehat{FCD}$.

c)



La retta AE risulta essere parallela a BC poiché gli angoli $\widehat{AEC}$ e$\widehat{ECB}$ sono coniugati interni supplementari per la dimostrazione che segue:

- l'angolo $\widehat{AEF} \cong \widehat{FCD}$
- $\frac{\widehat{DEC}}{2} \cong \frac{\widehat{BAC}}{2}$

-Osserviamo ora i triangoli BAT e BDC. Il primo è retto in T e il secondo in D. Essi hanno anche l'angolo B in comune dunque $\widehat{BAT} \cong \widehat{DCB}$.

-Il triangolo DHE è [[congruente]] [simile] a BTA e quindi [[congruente]] [simile] anche a BDC.

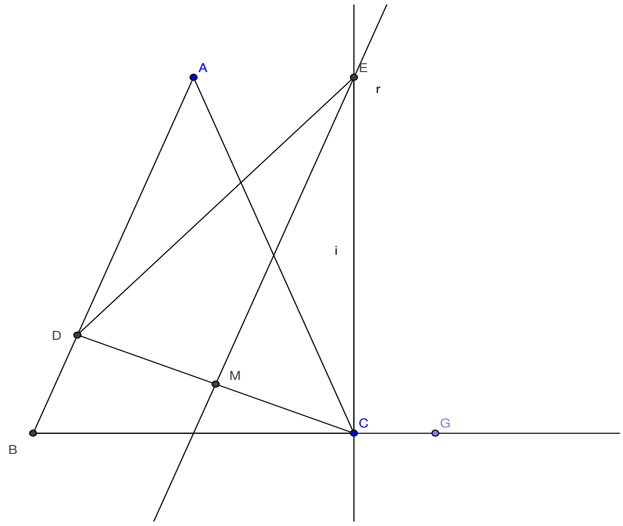
Quindi gli angoli $\widehat{AEC}$ e $\widehat{ECB}$ sono coniugati interni supplementari per somma di angoli congruenti [basta osservare che gli angoli $\widehat{AEC}$ e $\widehat{ECB}$ hanno entrambi ampiezza pari a $\frac{\pi}{2}$].

d)

Infine $\widehat{ADC}$ [[$\cong \frac{\pi}{2}$]] [ha ampiezza pari a $\frac{\pi}{2}$] poiché D è il piede della perpendicolare CD e allo stesso tempo l'angolo [[$\widehat{AEC} \cong \frac{\pi}{2}$]] [AEC di ampiezza pari a $\frac{\pi}{2}$] per dimostrazione precedente.

Avendo dunque il quadrilatero AEDC una coppia di angoli opposti supplementari e congruenti, esso risulterà inscrittibile in una circonferenza.

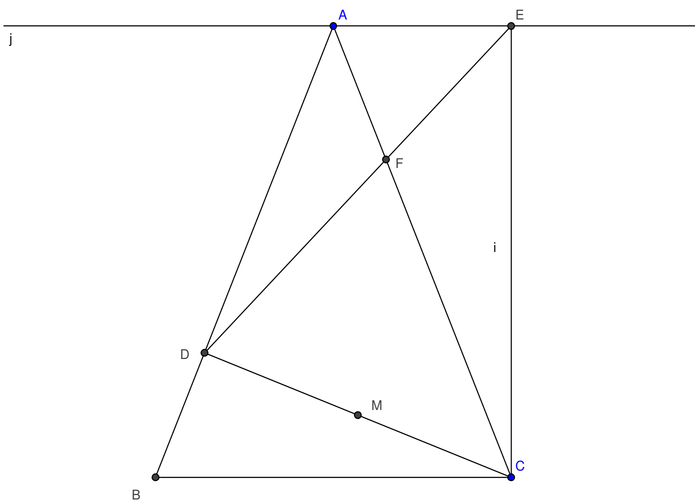
Paolo Timponelli, Classe 3A PNI
Liceo Scientifico "G. Spezia", Domodossola (NO)



Considero il triangolo BCD e il suo angolo esterno DCG. Poiché CD è un'altezza, l'angolo BDC è retto, quindi l'angolo esterno DCG è formato dalla somma di un angolo retto più la misura dell'angolo DBC(per il teorema dell'angolo esterno). Se traccio da C la perpendicolare r al segmento BC per differenza ottengo che l'angolo compreso tra la retta contenente DC e la retta r è congruente all'angolo DBC. Poiché il triangolo ABC è isoscele per ipotesi anche un triangolo simile ad ABC sarà isoscele. Quindi il vertice E si troverà nell'intersezione tra l'asse di DC e la retta r. Unisco il punto E con il punto D e il triangolo DCE è simile al triangolo ABC per il secondo criterio di similitudine generalizzato, sono infatti entrambi triangoli isosceli con un angolo alla base congruente (DCE congruente a DBC).

a)
Il segmento CE è perpendicolare a CB per costruzione.

b)



I triangoli EFC e AFD sono simili poiché hanno DAF congruente a FEC poiché angoli corrispondenti di triangoli simili e EFC congruente a AFD poiché angoli opposti al vertice (per differenza ADF e ECF devono essere [[per forza]] congruenti perché la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre un angolo piatto). In particolare EC è il corrispondente di AD, FC è il corrispondente di FD ed EF è il corrispondente di AF. I triangoli AFE e FCD sono simili perché hanno AFE congruente a DFC perché opposti al vertice e hanno i lati AF ed EF e FD e FC in proporzione [[perché]] [per quanto] appena dimostrato. In particolare l'angolo CDF è congruente all'angolo FAE.

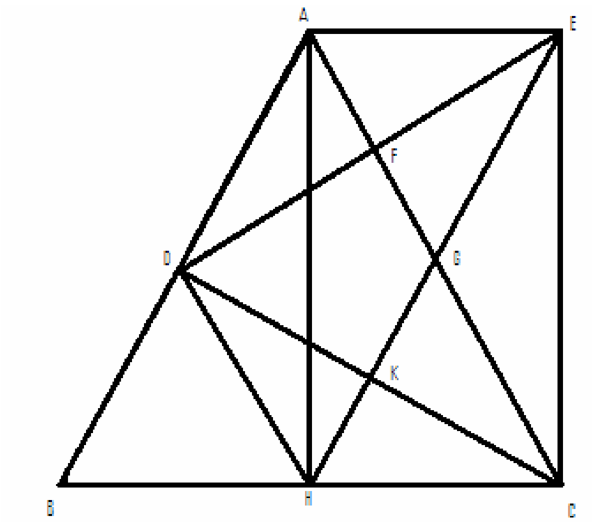
c)

Considero gli angoli CDE, FAE e BCA. CDE è congruente a FAE per la dimostrazione [in] b), ma BCA è congruente a CDE perché angoli alla base di triangoli isosceli simili. Quindi per la proprietà transitiva [della relazione di congruenza] BCA è congruente a FAE, e quindi, visto che le due rette tagliate dalla trasversale AC formano angoli alterni interni congruenti, allora sono parallele.

d)

Il poligono [quadrilatero] AECD è inscrivibile in una circonferenza perché ha gli angoli opposti supplementari. Infatti l'angolo AEC è retto (CE perpendicolare a BC, BC parallelo ad AE quindi CE perpendicolare ad AE) e l'angolo CDA è retto per ipotesi. Per differenza anche DAE e DCE devono essere supplementari.

Tobia Mariotto, Classe 3A PNI
Liceo Scientifico "G. Spezia", Domodossola (NO)



Chiamo H il punto medio di BC. Traccio la perpendicolare a DC passante per H. Essendo H il punto medio di BC, DH è congruente a CH e a HB, infatti il punto medio dell' ipotenusa di un triangolo rettangolo coincide con il suo circocentro. Da ciò deriva che DK è congruente a KC, infatti il piede della perpendicolare condotta dal vertice di un triangolo isoscele alla sua base coincide sempre con il suo punto medio. Traccio poi la perpendicolare al segmento DH passante per D e chiamo E il punto di intersezione tra la retta passante per HE e quella passante appena tracciata. L'angolo $H\hat{M}C$ è congruente all'angolo $H\hat{C}D$ poiché angoli alla base del triangolo isoscele HDC.

$D\hat{B}C + B\hat{C}D + B\hat{D}C$ = [[P]] [180°] , ma $B\hat{D}C$ = [[R]] [90°] [[e P=2R]], quindi $D\hat{B}C + B\hat{C}D$ = [[R]] [90°]. Ma anche $H\hat{D}C + E\hat{D}C$ = [[R]] [90°], ma $B\hat{C}D$ è congruente a $H\hat{D}C$, quindi $E\hat{D}C + B\hat{C}D$ = [[R]] [90°], quindi $E\hat{D}C$ = [[R]] [90°] – $B\hat{C}D$, ma anche $D\hat{B}C$ = [[R]] [90°] – $B\hat{C}D$, quindi $E\hat{D}C$ è congruente a $D\hat{B}C$. Analogamente si può dimostrare che l'angolo $E\hat{C}D$ è congruente ad $A\hat{C}B$, ma l'angolo $D\hat{B}C$ è congruente ad $A\hat{C}B$, quindi l'angolo $E\hat{C}D$ è congruente a $E\hat{D}C$, quindi il triangolo tracciato è isoscele e simile a quello di partenza.

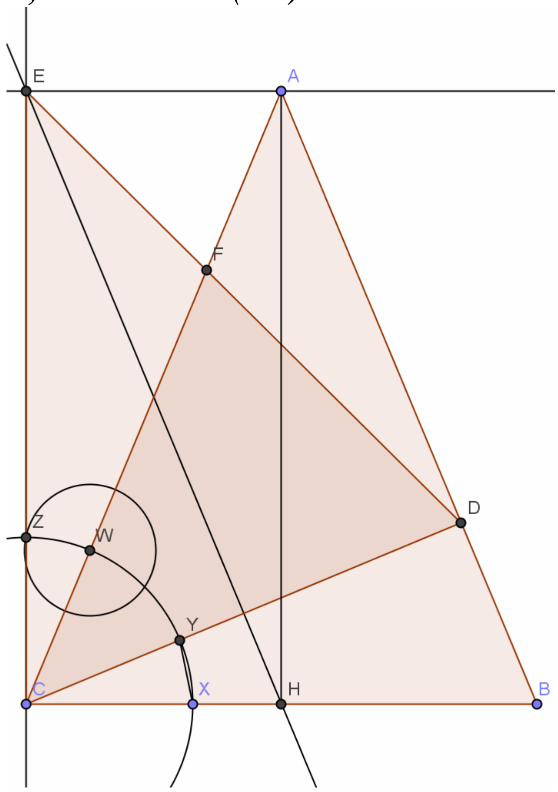
a)
Il triangolo DCB è simile al triangolo HAC poiché hanno entrambi un angolo retto rispettivamente in D e in H e hanno $\hat{B}$ congruente a $\hat{C}$ poiché angoli alla base del triangolo isoscele.
Poiché $A\hat{H}C + H\hat{C}A + H\hat{A}C$ = [[P]] [180°] e $A\hat{H}C$ = [[R]] [90°], [segue che] $H\hat{C}A+H\hat{A}C$= [[R]] [90°]. Però $E\hat{C}D$ è congruente ad $H\hat{C}A$ per [[ipotesi]] [la precedente costruzione] e, come appena dimostrato $H\hat{A}C$ è congruente a $B\hat{C}D$, quindi $E\hat{C}D + D\hat{C}B$ = [[R]] [90°], [[quindi]] [di conseguenza] EC è perpendicolare a BC.

b)
$B\hat{A}C$ è congruente a $C\hat{E}D$ per ipotesi, gli angoli in F [$A\hat{F}D$ e $E\hat{F}C$] sono congruenti poiché opposti al vertice,quindi anche $A\hat{D}F$ è congruente a $E\hat{C}F$, quindi AFD è simile a ECF, in particolare AF:FE = DF:FC, quindi, poiché i lati sono in proporzione e gli angoli in F [AFE e DFC] sono congruenti poiché opposti al vertice, AFE è simile a FDC.

c)
$H\hat{A}C$ è congruente ad $A\hat{C}E$ poiché alterni interni delle parallele AH ed EC tagliate da AC, ma $H\hat{A}C$ è anche congruente a $H\hat{E}C$, quindi $H\hat{E}C$ è congruente a $A\hat{C}E$, quindi ECG è isoscele, analogamente si dimostra che anche AGH è isoscele. Inoltre, poiché $A\hat{H}C$ è congruente a $E\hat{C}H$, [[per differenza di figure congruenti]], [perché?] $A\hat{G}H$ è congruente a $E\hat{G}C$, quindi, poiché AG, GH, GC e GE sono congruenti, le diagonali del quadrilatero AECH si bisecano, quindi il poligono è un parallelogramma e più precisamente un rettangolo, poiché ha due angoli retti, quindi AE è parallelo a BC.

d)
L'angolo in D [$C\hat{D}A$] è retto, ma lo è anche $A\hat{E}C$, quindi $C\hat{D}A + A\hat{E}C$ = 180°, ma poiché la somma degli angoli interni di un quadrilatero è sempre [[2P]] [360°], quindi $D\hat{A}E + D\hat{C}E$ = [[P]], [180°], quindi il poligono AECD è inscrivibile in una circonferenza.

Tommaso Forni, Classe 3A PNI
Liceo Scientifico "G. Spezia", Domodossola (NO)



Costruire un angolo congruente a BCD sul lato CA tracciando una circonferenza di centro C e intersecandola con la circonferenza di centro W e raggio XY.
Il punto E è dato dall'intersezione della retta CZ e l'asse del segmento CD.
I due triangoli sono simili poiché entrambi isosceli (vertice sull'asse della base) e i loro angoli alla base sono somme di angoli congruenti.

a)
L'angolo BCE è congruente alla somma di BCA e BCD [perché?] ed è retto poiché BCD≡CAH [perché?] e BCA + CAH = 90°.

b)
I triangoli EFC e AFD sono simili poiché hanno una coppia di angoli opposti al vertice e [l'angolo] CED congruente a CAB per la similitudine dei triangoli ABC e DCE. Anche i triangoli EFA e CFD sono quindi simili (angoli opposti al vertice, lati proporzionali per la similitudine appena dimostrata).

c)
L'angolo CEA è congruente alla somma di CED e FEA. Siccome CED≡CAB≡2*BCD e FEA≡FCD per la similitudine dei triangoli EFA e FCD l'angolo CEA risulta congruente a BCE e quindi retto.
Le rette CB ed EA sono perpendicolari ad una stessa retta (CE) e quindi parallele.

d)
[Gli angoli] AEC e CDA sono retti e quindi supplementari.
ECD e DAE sono supplementari perché essendo BCD≡HAB la loro somma è congruente a due angoli retti. Il quadrilatero è inscrivibile perché ha gli angoli opposti supplementari.