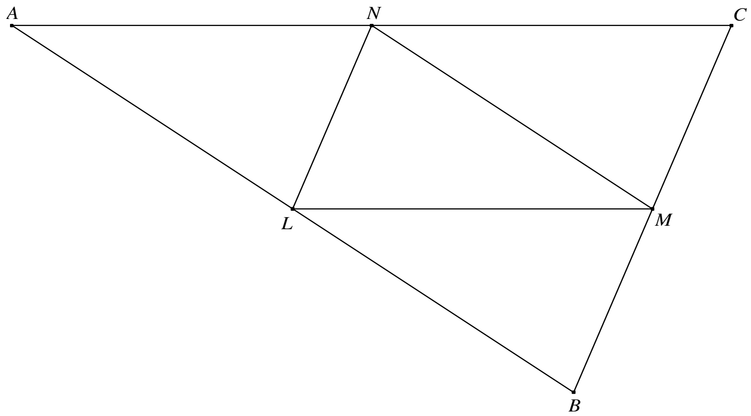
FLAT*landia*

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" (Edwin A. Abbott)

Flatlandia 8-22 Novembre 2010

Il testo del problema:
È dato il triangolo *LMN*. Dare una costruzione di un triangolo *ABC*, avente come punti medi dei suoi lati *L*, *M*, *N*.
a) Dimostrare che tale triangolo è unico.
b) Provare che *ABC* ed *LMN* sono triangoli simili.
c) Trovare il rapporto tra le aree dei triangoli *ABC* ed *LMN*.



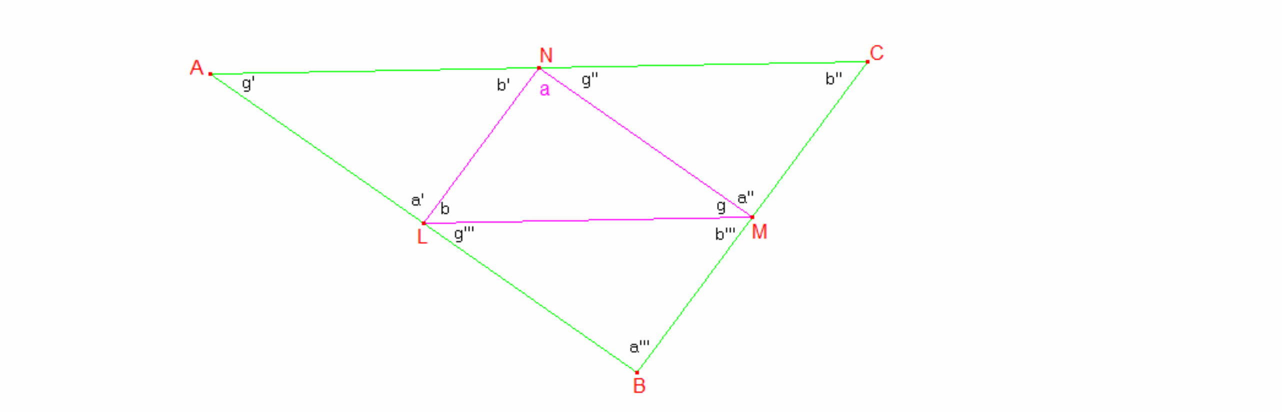
Commento
Sono giunte dieci risposte, tutte provenienti da classi del primo biennio di Licei Scientifici. In alcuni casi si tratta di singoli studenti o gruppi di studenti all'interno di una classe, in altri di una classe intera. Desta qualche perplessità il fatto che tutte le risposte provengano dallo stesso tipo di scuola, cioè il Liceo Scientifico.
Il problema richiedeva la costruzione di un triangolo, partendo da un triangolo dato e, relativamente a tale costruzione, poneva tre quesiti: nel primo si chiedeva di dimostrare l'unicità del triangolo avente le proprietà richieste; nel secondo di dimostrare la similitudine tra il triangolo dato e il triangolo costruito e nell'ultimo di determinare il valore del rapporto tra le aree dei due triangoli.
Tutti rispondono in modo sostanzialmente corretto ai quesiti (in una sola risposta non viene preso in esame il primo quesito). Tuttavia in molte risposte permane la confusione tra una grandezza geometrica e la sua misura (ad esempio, tra un angolo e la sua ampiezza o tra un segmento e la sua lunghezza).
La dimostrazione dell'unicità del triangolo richiesto è incompleta in quasi tutte le risposte. Tutti iniziano a costruire le rette parallele ai lati passanti rispettivamente per i vertici opposti. Si afferma poi che la parallela è unica, citando il postulato della parallela. È da notare che questo ragionamento dimostra soltanto l'unicità della costruzione fatta, ottenuta mandando le parallele ai lati per i vertici, e non quella del triangolo avente le proprietà richieste dal problema.
Ancora una raccomandazione: evitare assolutamente di utilizzare il formato pdf per la risoluzione da inviare, in quanto risulta poi estremamente difficile ritagliare le parti della soluzione che vengono poi pubblicate.

Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:

LS “Pitagora”, Rende (CS)
LS “Don Milani”, Montichiari (BS)
LS “Aristosseno”, Taranto
LS “A. Banfi”, Vimercate (MI)
LS “F. Masci”, Chieti
LS “E. Majorana”, Pozzuoli (NA)
LS “T. Gullace”, Roma
LS “C. Cafiero”, Barletta (BA).

NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni
Manuela Scarivaglione, Classe 2°
Liceo Scientifico “Pitagora”, Rende (CS)

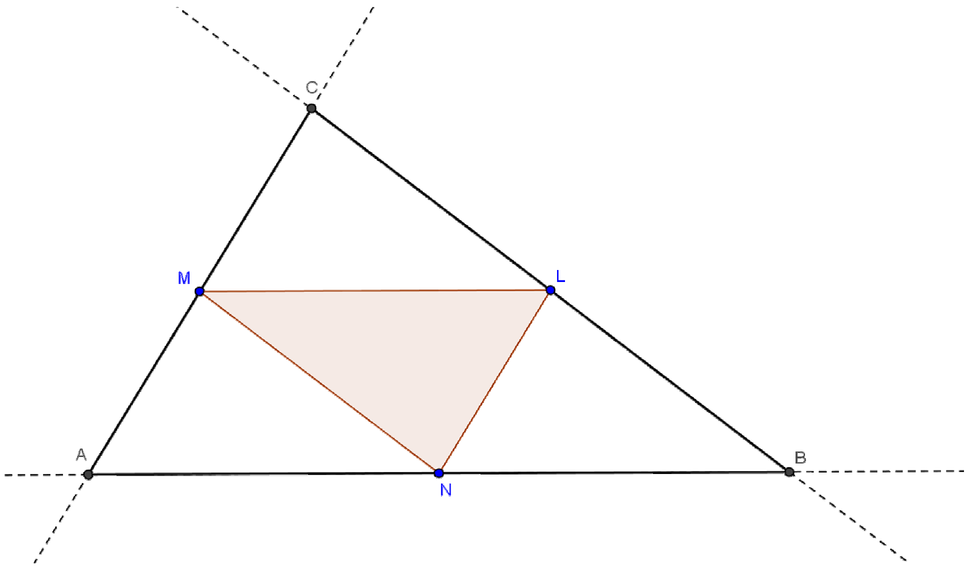


a)
Per costruire il triangolo ABC ho tracciato per ogni vertice del triangolo LMN una [la] parallela al lato opposto.
Si vengono a formare i parallelogrammi: ALMN, LNMB, NLMC in cui
NM≅LB AL≅LB [AL≅NM] quindi per la proprietà transitiva NM≅LB [AL≅LB]
NL≅MB NL≅MC quindi per la proprietà transitiva MB≅MC
AN≅LM NC≅LM quindi per la proprietà transitiva AN≅NC
Data la retta LM e preso un [il] punto N al di fuori di essa per il quinto postulato di Euclide da tale punto si può condurre una sola parallela così come dal punto L [alla retta MN] e dal punto N [alla retta LM].
Detti ABC [A, B, C] i punti di intersezione di tale retta [tali rette], il triangolo ABC è unico

b) [[…]]

c)
CNLM è un parallelogramma
Per la proprietà delle diagonali di un parallelogramma che lo dividono in due triangoli congruenti posso dire che: CNM≅NLM
ALMN è un parallelogramma
Per la stessa proprietà posso dire che ANL≅NLM
NLBM è un parallelogramma
Per la stessa proprietà posso dire che NLM≅LMB
Quindi il rapporto tra le aree dei triangoli LMN e ABC è di 1/4.

Claudio Donadoni, Nicola Picenni, Classe 2B
Liceo Scientifico "Don Milani", Montichiari (BS)

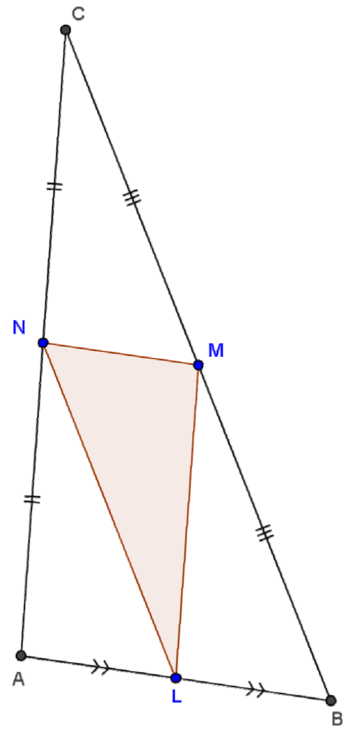


a)
Dato che una conseguenza del teorema del fascio di rette parallele tagliato da due trasversali è quella che in un triangolo il segmento che unisce due punti medi di due lati è parallelo al terzo lato e congruente [di lunghezza pari] alla [sua] metà [della lunghezza del terzo lato], per costruire il triangolo ABC si devono tracciare la retta parallela al segmento ML e passante per N, la retta parallela al segmento MN e passante per L e la retta parallela al segmento NL passante per M. Le intersezioni tra le rette ottenute formano i vertici del triangolo ABC.
Poiché, per il postulato di Euclide, per un punto esterno a una retta passa una e una sola retta parallela alla retta data, i lati AB, BC e AC sono unici.

b)
Sempre per la conseguenza del teorema del fascio di rette parallele citata in precedenza, il segmento ML ≅ AB / 2 [$\overline{ML} = \overline{AB}/2$], il segmento MN ≅ BC / 2 [$\overline{MN} = \overline{BC}/2$], il segmento LN ≅ AC / 2 [$\overline{LN} = \overline{AC}/2$].
Quindi, poiché la lunghezza dei lati del triangolo LMN sono [è] rispettivamente la metà della lunghezza dei lati del triangolo ABC, essendo i lati corrispondenti fra i due triangoli in proporzione, i due triangoli sono simili.

c)
Infine i quattro triangoli LMN, AMN, BLN e CLM sono tutti congruenti tra loro per il 3° criterio di congruenza dei triangoli poiché:
AN ≅ NB ≅ ML perché [tutti i segmenti hanno lunghezza pari alla] metà [della lunghezza] di AB
AM ≅ MC ≅ NL perché [tutti i segmenti hanno lunghezza pari alla] metà [della lunghezza] di AC
CL ≅ LB ≅ MN perché [tutti i segmenti hanno lunghezza pari alla] metà [della lunghezza] di BC.
Quindi dato che il triangolo ABC è formato da 4 triangoli congruenti tra loro LMN, AMN, BLN e CLM allora l'area del triangolo ABC è 4 volte l'area del triangolo LMN.

Valerio Pastorelli, Classe 1A
Liceo Scientifico "Don Milani", Montichiari (BS)



a) [[…]]

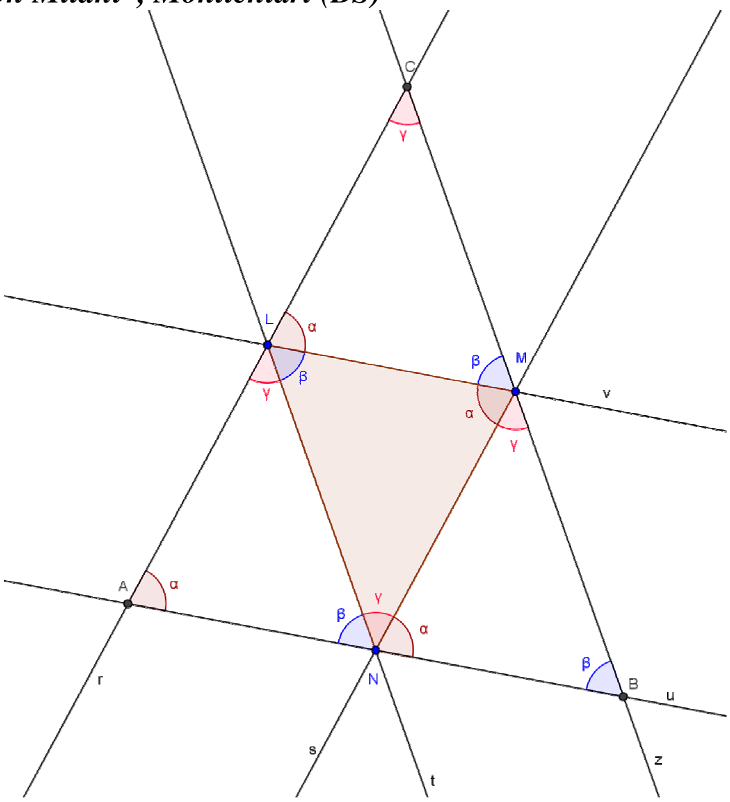
b)
Consideriamo la retta passante per i punti A e C e la retta passante per i punti B e C.
Siccome NC ≅ AN e CM ≅ MB allora, per il [corollario del] teorema di Talete, si può concludere che NM è parallelo ad AB.
Consideriamo la retta passante per i punti A e B e la retta passante per i punti A e C.
Siccome AL ≅ LB e AN ≅ NC allora, per il [corollario del] teorema di Talete, si può concludere che LN è parallelo a BC.
Consideriamo la retta passante per i punti A e B e la retta passante per i punti B e C.
Siccome AL ≅ LB e BM ≅ MC allora, per il [corollario del] teorema di Talete, si può concludere che LM è parallelo a AC.
1) Considero le rette parallele passanti rispettivamente per i punti N, M e per i punti A, B, con la trasversale passante per B e C: posso dire che l'angolo CMN ≅ angolo MBL perché corrispondenti.
2) Considero le rette parallele passanti rispettivamente per i punti L, M e per i punti A, C, con la trasversale passante per B e C: posso dire che l'angolo BML ≅ angolo MCN perchè corrispondenti.
3) Considero le rette parallele passanti rispettivamente per i punti N, M e per i punti A, B, con la trasversale passante per A e C: posso dire che l'angolo CNM ≅ angolo NAL perchè corrispondenti.
4) Considero le rette parallele passanti rispettivamente per i punti N, L e per i punti C, B, con la trasversale passante per A e C: posso dire che l'angolo ANL ≅ angolo NCM perchè corrispondenti.
5) Considero le rette parallele passanti rispettivamente per i punti N, L e per i punti C, B, con la trasversale passante per B e A: posso dire che l'angolo NLA ≅ angolo MBL perchè corrispondenti.
6) Considero le rette parallele passanti rispettivamente per i punti L, M e per i punti A, C, con la trasversale passante per B e A: posso dire che l'angolo BLM ≅ angolo LAN perchè corrispondenti.
Considerando le ampiezze degli angoli, poiché:
MBL + BLM + BML = 180° (somma delle ampiezze degli angoli interni del triangolo MLB);
ALN + BLM + NLM =180° (perché supplementari [la loro somma è pari a un angolo piatto])

MBL ≅ ALN (per dimostrazione precedente)
si può concludere che NLM ≅ BML e quindi per la proprietà transitiva NLM ≅ ACB (dimostrazione punto 2)
Analogamente CMN + MNC + MCN = 180° (somma delle ampiezze degli angoli interni del triangolo MCN).
MNL + MNC + LNA = 180° (perché supplementari [la loro somma è pari a un angolo piatto])
MCN ≅ LNA (per dimostrazione precedente al punto 4))
si può concludere che CMN ≅ MNL , ma siccome CMN ≅ CBA (vedi dimostrazione al punto 1)) allora, per la proprietà transitiva, CBA ≅ MNL.
Considerando i triangoli NML e CBA, avendo rispettivamente congruenti due angoli, essi sono simili (1° criterio di similitudine).

c)
Per le considerazioni precedenti, posso dire che il triangolo NAL è congruente al triangolo MBL per il secondo criterio di congruenza dei triangoli.
Inoltre anche i triangoli NAL e CNM sono congruenti per il secondo criterio di congruenza dei triangoli.
Infine anche i triangoli MBL e NML sono congruenti per il secondo criterio di congruenza dei triangoli.
Quindi i triangoli NAL, NML, MBL e CNM sono tutti congruenti tra loro. Il triangolo ABC è formato proprio da questi 4 triangoli per cui :

$$\frac{Area_{NML}}{Area_{ABC}} = \frac{1}{4}$$

Simone Fiocca, Classe 1A
Liceo Scientifico "Don Milani", Montichiari (BS)

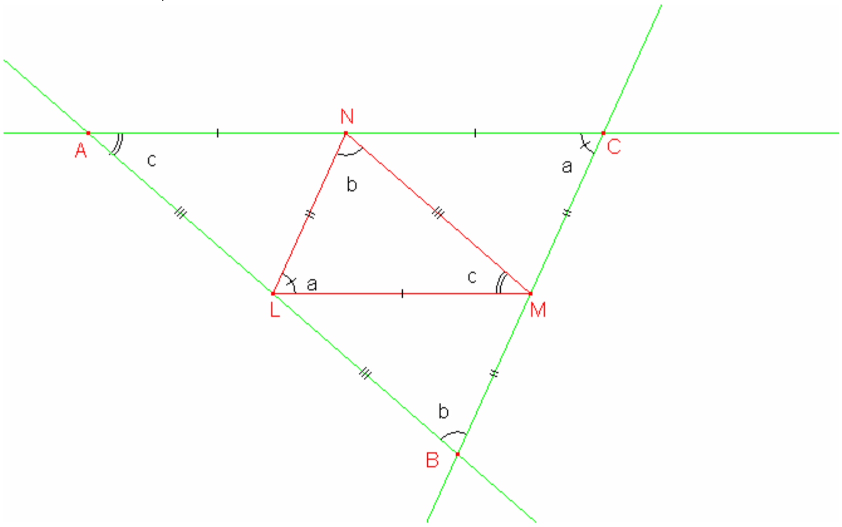


a)
Innanzitutto tracciamo la retta u passante per il punto N e parallela al segmento LM, la retta s passante per i punti M e N, la retta v passante per i punti L e M, la retta z passante per il punto M e parallela al segmento LN, la retta t passante per i punti L e N, e la retta r passante per il punto L e parallela al segmento MN.
Siano A, B, C i punti di intersezione rispettivamente tra le rette u e r, u e z, z e r.
Per il teorema sul parallelismo [criterio di parallelismo riguardante le rette parallele tagliate da una trasversale], considerando le rette parallele u e v con la trasversale t si ricava che l'angolo ANL ≅ angolo NLM perché alterni interni (chiamiamoli β [indichiamo con β la loro ampiezza]).
Lo stesso teorema applicato alle rette parallele r e s con la trasversale t permette di ricavare che angolo ALN ≅ angolo LNM perché alterni interni (chiamiamoli γ [indichiamo con γ la loro ampiezza]).
Considerando i triangoli ALN e LNM possiamo affermare che sono congruenti per il 2° criterio di congruenza perché hanno rispettivamente congruenti due angoli ([di ampiezza] β e γ) ed il lato tra loro compreso (LN). Quindi l'angolo LAN ≅ angolo LMN (chiamiamolo α [indichiamo con α la relativa ampiezza]).
Per il teorema sul parallelismo [riguardante le rette parallele tagliate da una trasversale], considerando le rette parallele v e u con la trasversale r si ricava che l'angolo LAN ≅ angolo CLM perché corrispondenti.
Considerando le rette parallele t e z con la trasversale r si ricava che l' angolo ALN ([di ampiezza] γ) ≅ angolo LCM perché corrispondenti.
Sapendo che la somma delle ampiezze degli angoli interni di un triangolo è 180° allora l'angolo CML deve essere [di ampiezza] β.
I triangoli LCM e LMN avendo rispettivamente congruenti due angoli ed il lato compreso (LM) sono congruenti per il 2° criterio.
Considerando le rette parallele r e s con la trasversale u si ricava che l' angolo LAN ([di ampiezza]α) ≅ angolo MNB perché corrispondenti.
Considerando le rette parallele t e z con la trasversale u si ricava che l' angolo LNA ([di ampiezza]β) ≅ angolo MBN perché corrispondenti.
Sapendo che la somma delle ampiezze degli angoli interni di un triangolo è 180° allora l'angolo NMB deve essere [di ampiezza] γ.
I triangoli BMN e LMN avendo rispettivamente congruenti due angoli ed il lato compreso (MN) sono congruenti per il 2° criterio.
Perciò i triangoli LAN, LMN, CLM e MNB sono congruenti tra loro.
Per quanto riguarda il primo punto da dimostrare si può dire che il triangolo ABC è unico [a meno di isometrie] perché esiste un solo triangolo che abbia la lunghezza di ogni lato rispettivamente il doppio della lunghezza dei lati del triangolo LMN e gli angoli rispettivamente congruenti [l’unicità è garantita dal fatto che L, M, N sono i punti medi dei lati del triangolo costruito].

b)
Per quanto riguarda il secondo punto da dimostrare il triangolo ABC è simile al triangolo LMN perché hanno i lati corrispondenti in proporzione tra loro e gli angoli corrispondenti congruenti.

c)
Per quanto riguarda il terzo punto da dimostrare, il triangolo ABC, essendo formato da 4 triangoli tutti congruenti tra loro, ha l'area la cui misura è 4 volte la misura dell' area del triangolo LMN, cioè:
area triangolo ABC = 4 area triangolo LMN.

Classe 1H*, *LS "Aristosseno"*, *Taranto



a)

Disegnato il triangolo LMN , tracciamo dai suoi tre vertici le parallele ai suoi [relativi] lati [opposti], che si incontrano [a due a due] nei punti A, B e C . Il triangolo ABC è quello richiesto. Infatti i quadrilateri LMNA, LMCN e LBMN sono parallelogrammi che hanno i lati opposti a due a due congruenti .

Sarà perciò:

LM=AN=NC [$\overline{LM} = \overline{AN} = \overline{NC}$] e quindi N è punto medio di AC ;

MC=LN=MB [$\overline{MC} = \overline{LN} = \overline{MB}$] e quindi M è punto medio di BC;

BL=MN =LA [$\overline{BL} = \overline{LN} = \overline{LA}$] e quindi L è punto medio di AB.

Il triangolo è unico per il V postulato di Euclide che ci assicura l'unicità della retta passante per un punto e parallela ad una retta data …

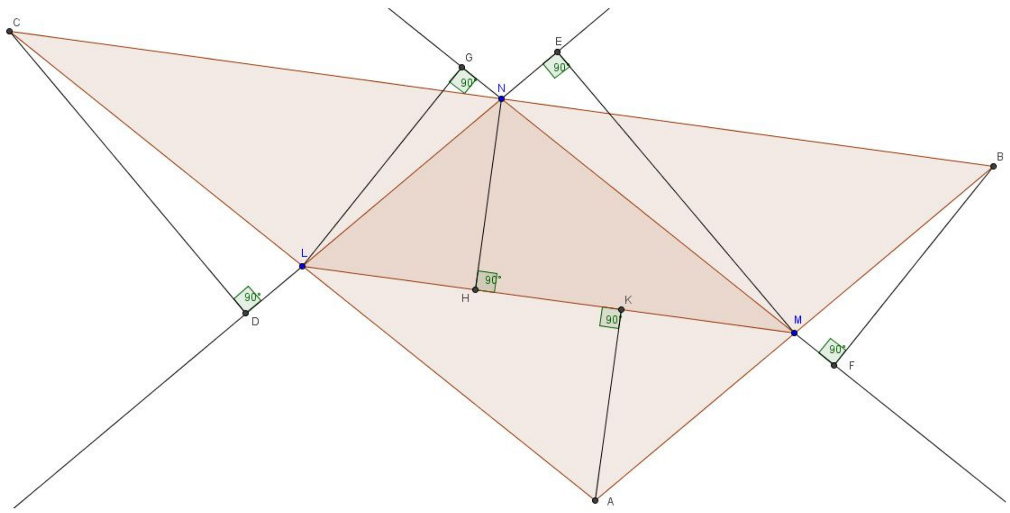
b)

I triangoli ABC ed LMN sono simili in quanto gli angoli opposti di un parallelogramma sono congruenti e quindi $M\hat{L}N = N\hat{C}M$, $L\hat{N}M = L\hat{B}M$ e $L\hat{M}N = L\hat{A}N$; il primo criterio di similitudine dice che due triangoli sono simili se hanno i tre angoli ordinatamente congruenti. Inoltre , risultando AB=2MN[$\overline{AB} = 2\overline{MN}$], BC=2LN [$\overline{BC} = 2\overline{LN}$] e AC=2LM [$\overline{AC} = 2\overline{LM}$] , il rapporto di similitudine è 2.

c)

Poiché le aree di due figure simili sono proporzionali ai quadrati dei lati omologhi, il rapporto tra le arre [aree] dei due triangoli ABC ed LMN è il quadrato del rapporto di similitudine e quindi è uguale a 4.

Lorenzo Sala,Classe 2E
Liceo Scientifico "A. Banfi", Vimercate (MI)



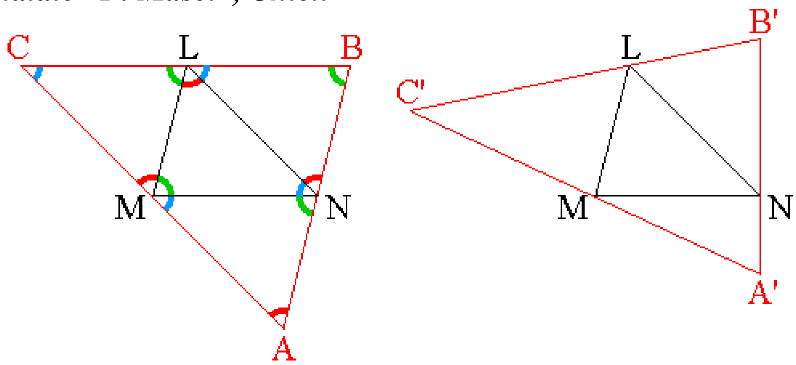
a)
Traccio le rette AB, BC, AC, in modo che AB sia parallela a LN e passi per M, BC sia parallela ad LM e passi per N, AC sia parallela a MN e passi per L. [Infatti] LAMN e LMBN sono parallelogrammi per definizione, quindi, per le proprietà dei parallelogrammi, LN$\cong$AM e LN$\cong$BM. Quindi AM$\cong$BM per la proprietà transitiva della congruenza, quindi M è il punto medio di AB. LMBN e LMNC sono parallelogrammi per definizione, quindi, per le proprietà dei parallelogrammi, LM$\cong$CN e LM$\cong$BN. Quindi NC$\cong$BN per la proprietà transitiva della congruenza, quindi N è il punto medio di CB. LMNC e LAMN sono parallelogrammi per definizione, quindi, per le proprietà dei parallelogrammi, MN$\cong$LC e MN$\cong$LA. Quindi LC$\cong$LA per la proprietà transitiva della congruenza, quindi L è il punto medio di AC.
Per il teorema dei punti medi il segmento che congiunge i punti medi di due lati di un triangolo è sempre parallelo al terzo lato, quindi, poiché per il quinto postulato di Euclide la parallela ad LN passante per M è unica, la parallela ad LM passante per N è unica e la parallela ad NM passante per L è unica, allora il triangolo ABC è unico.

b)
Ipotesi: AC//MN; AB//LN; BC//LM
Tesi: LMN~ABC
Gli angoli NML e ACB sono congruenti perché angoli opposti in un parallelogramma. Gli angoli MLN e ABC sono congruenti perché angoli opposti in un parallelogramma. Gli angoli LNM e BAC sono congruenti perché angoli opposti in un parallelogramma. Quindi ABC$\sim$LMN in quanto aventi gli angoli [corrispondenti] congruenti.

c)
Ipotesi: AC//MN; AB//LN; BC//LM
Tesi: ABC$\doteq$4LMN
Traccio le altezze NH e KA dei triangoli LMN e LAM. Considero i triangoli rettangoli MHN e LAK essi hanno:
MN$\cong$LA perché lati opposti in un parallelogramma
Gli angoli NML e MLA congruenti perché angoli alterni interni formati dalle rette parallele AL e MN tagliate dalla trasversale ML.
Quindi i triangoli MHN e LAK sono congruenti per i criteri di congruenza dei triangoli rettangoli, in particolare NH$\cong$AK perché lati corrispondenti in triangoli congruenti. Quindi, poiché i triangoli

LMN e ALM hanno la base LM in comune e le altezze congruenti, essi sono equivalenti per i criteri di equivalenza [quali?] dei triangoli.
Traccio le altezze LG e BF dei triangoli LMN e BMN. Considero i triangoli rettangoli LMG e BFN essi hanno:
LM$\cong$BN perché lati opposti in un parallelogramma
Gli angoli BNF e LMG congruenti perché angoli alterni interni formati dalle rette parallele LM e BN tagliate dalla trasversale MN.
Quindi i triangoli LMG e BFN sono congruenti per i criteri di congruenza dei triangoli rettangoli, in particolare LG$\cong$BF perché lati corrispondenti in triangoli congruenti. Quindi, poiché i triangoli LMN e MBN hanno la base MN in comune e le altezze congruenti, essi sono equivalenti per i criteri di equivalenza [quali?] dei triangoli.
Traccio le altezze CD e ME dei triangoli LMN e LNC. Considero i triangoli rettangoli CDN e LME essi hanno:
LM$\cong$CN perché lati opposti in un parallelogramma
Gli angoli CND e ELM congruenti perché angoli alterni interni formati dalle rette parallele LM e CN tagliate dalla trasversale LN.
Quindi i triangoli NDC e LME sono congruenti per i criteri di congruenza dei triangoli rettangoli, in particolare CD$\cong$ME perché lati corrispondenti in triangoli congruenti. Quindi, poiché i triangoli LMN e LNC hanno la base LN in comune e le altezze congruenti, essi sono equivalenti per i criteri di equivalenza [quali?] dei triangoli.
Ma ABC$\doteq$AML+MBN+CLN+LMN [intesa come somma di aree], ma [inoltre], come precedentemente dimostrato, LMN$\doteq$LAM, MBN$\doteq$LMN e LNC$\doteq$LMN, quindi ABC$\doteq$4LMN.
C.V.D.

Emilia Maria Bernabei, Classe 2A, Sper. Bilingue
Liceo Scientifico Statale "F. Masci", Chieti



a)
Per i vertici del triangolo LMN, si conducano le parallele AB, BC, CA, ai lati LM, MN ed NL, rispettivamente, ottenendo il triangolo ABC. I quadrilateri ANLM ed NBLM, parallelogrammi per costruzione, hanno il lato LM in comune, allora, per la proprietà transitiva, AN = NB [AN $\cong$ NB] come lati opposti ad LM nel primo e nel secondo parallelogrammo, rispettivamente, quindi N è il punto medio di AB. In modo analogo si dimostra che L è il punto medio di BC ed M il punto medio di CA, perciò il triangolo ABC soddisfa la richiesta del problema.
Siccome la parallela per un punto ad una retta data è unica [per il V postulato di Euclide], la precedente costruzione può individuare solo il triangolo ABC. Sia A'B'C' un triangolo qualsiasi, avente come punti medi dei suoi lati L, M, N. Il segmento LM, congiungente i punti medi di B'C' e C'A', per un noto teorema, risulta parallelo al lato A'B' e, per la stessa ragione, i segmenti MN, NL,

risultano paralleli ai lati B'C' e C'A', rispettivamente, quindi il triangolo A'B'C' non può differire dal triangolo ABC, che pertanto è unico.

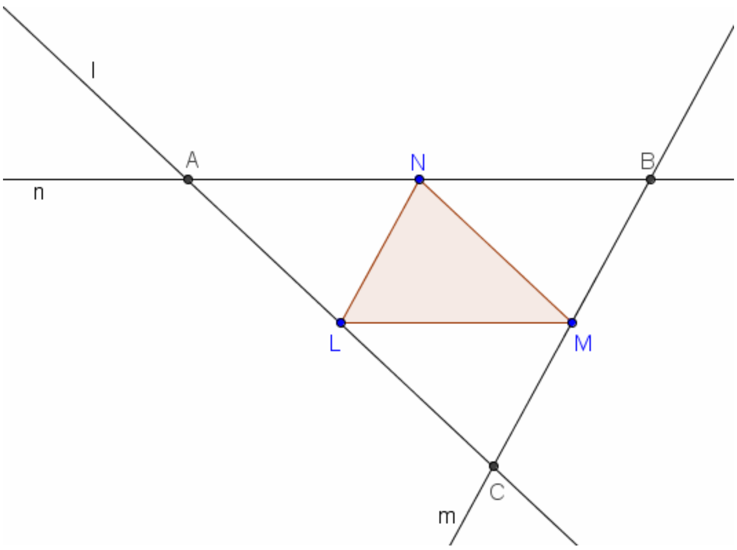
b)

L'angolo MAN e l'angolo LNB sono congruenti, essendo corrispondenti rispetto alle parallele MA, NL, tagliate dalla trasversale AN; l'angolo LNB e l'angolo NLM sono congruenti, essendo alterni interni rispetto alle parallele AB, LM, tagliate dalla trasversale NL; per la proprietà transitiva, gli angoli MAN ed NLM sono congruenti. Analogamente si mostra la congruenza degli angoli NBL ed LMN, quindi i triangoli ABC ed LMN sono simili, avendo gli angoli ordinatamente congruenti.

c)

I triangoli ANM, LMN sono congruenti perché ottenuti tagliando il parallelogrammo ANLM con la diagonale MN, come lo sono i triangoli LMN, BLN, ottenuti tagliando il parallelogrammo BLNM con la diagonale LN, nonché i triangoli LMN, CNL [CML], ottenuti tagliando il parallelogrammo CMNL con la diagonale LM. La proprietà transitiva assicura che il triangolo ABC è diviso dai lati del triangolo LMN in quattro triangoli, tutti fra loro congruenti. Se $\mathcal{A}$ indica l'area, $\mathcal{A}_{ABC} : \mathcal{A}_{LMN} = 4$.

Angelo Caravano, Classe 2 C
Liceo Scientifico "E. Majorana", Pozzuoli (NA)



a)

Con GeoGebra traccio le rette:

- **l**, passante per L e parallela a MN;
- **m**, passante per M e parallela a LN;
- **n**, passante per N e parallela a LM.

ed indico con:

- **A** il punto d'intersezione di l con n;
- **B** il punto d'intersezione di m con n;
- **C** il punto d'intersezione di l con m.

Considero il quadrilatero **ALMN**; sapendo che, per costruzione, il lato **AN** è parallelo al lato **LM** e **AL** è parallelo ad **MN**, posso affermare che esso è un parallelogramma perché ha i lati opposti paralleli.

Ciò implica che: **AN** ≅ **LM** ed **AL** ≅ **MN**.

Considero, poi, il quadrilatero **LMBN**; sapendo che, per costruzione, il lato **NB** è parallelo al lato **LM** e **LN** è parallelo a **BM**, posso affermare che anch'esso è un parallelogramma, perché ha i lati

opposti paralleli. Ciò implica che: **BM** ≅ **LN** e **NB** ≅ **LM** e per la proprietà transitiva **AN** ≅ **NB**. Quindi **N** è il punto medio di **AB**.
Considerando anche il quadrilatero **CMNL**, sapendo che, per costruzione, il lato **MN** è parallelo al lato **CL** ed **LN** è parallelo a **CM**, posso affermare che esso è un parallelogramma perché ha lati opposti paralleli. Ciò implica che: **CL** ≅ **MN** e **LN** ≅ **CM**.
Allora per la proprietà transitiva si ha: **AL** ≅ **LC** e **CM** ≅ **MB**.
Quindi posso dire che **N**, **L** ed **M** sono rispettivamente i punti medi dei lati **AB**, **AC** e **BC**.
Considero la retta LM ed il punto N non appartenente ad essa; per il postulato di Euclide la retta AB parallela a **LM** e passante per **N** è unica.
In modo analogo, si può affermare che anche le rette **BC** e **AC**, passanti rispettivamente per i punti **M** ed **L** e parallele rispettivamente ai lati **LN** e **MN**, sono uniche per il postulato di Euclide.
Tutto ciò implica che il triangolo **ABC** è unico, perché tutti i suoi lati sono unici.

b)
Considero i triangoli **ABC** ed **LMN**. Essi hanno l'angolo in **A** congruente all'angolo **LMN,** perché angoli opposti del parallelogramma **ALMN**, e l'angolo in **B** congruente all'angolo **MLN**, perché angoli opposti del parallelogramma **LMBN**. Ciò implica che i triangoli **ABC** e **LMN** sono simili per il primo criterio di similitudine perché hanno due angoli rispettivamente congruenti.

c)
Considero i triangoli **ANL** ed **LMN**. Essi hanno:

- **AN** ≅ **LM**
- **AL** ≅ **MN**
- $\hat{A} \cong L\hat{M}N$

per le dimostrazioni precedenti.
Quindi i triangoli **ANL** ed **LMN** sono congruenti per il primo criterio di congruenza dei triangoli.
Poi considero i triangoli **BMN** ed **LMN**; essi hanno:

- **NB** ≅ **LM**
- **LN** ≅ **BM**
- $\hat{B} \cong M\hat{L}N$

per le dimostrazioni precedenti.
Ciò implica che i triangoli **BMN** e **LMN** sono congruenti per il primo criterio di congruenza dei triangoli.
Infine considero i triangoli **CLM** ed **LMN**; essi hanno:

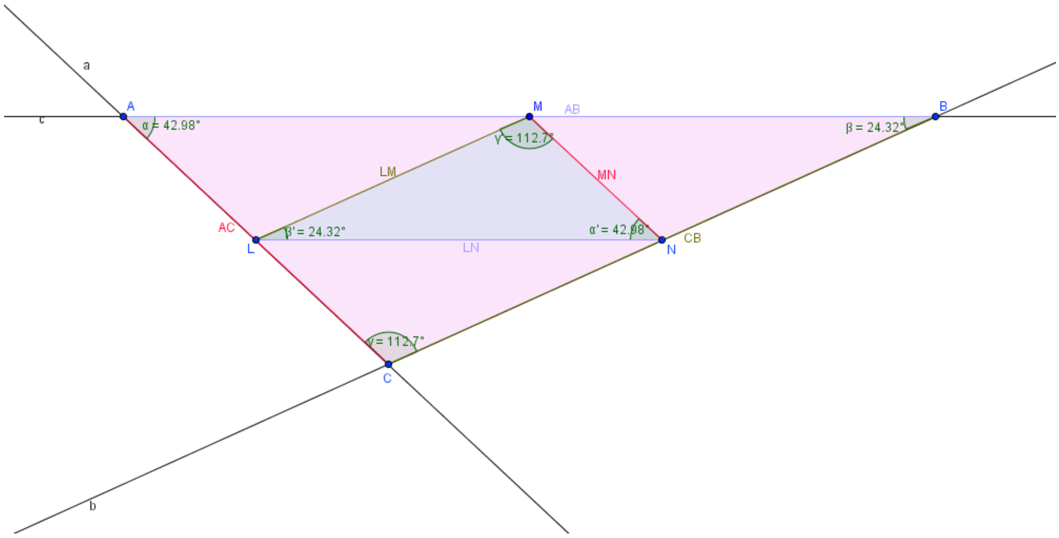
- **CM** ≅ **LN**
- **LC** ≅ **MN**

per le dimostrazioni precedenti e

- $\hat{C} \cong L\hat{N}M$ perché angoli opposti del parallelogramma **CMNL**.

Ciò implica che i triangoli **CLM** ed **LMN** sono congruenti per il primo criterio di congruenza dei triangoli.
Quindi per la proprietà transitiva i triangoli **ANL**, **BMN**, **CLM** ed **LMN** sono congruenti tra loro, perché tutti congruenti al triangolo **LMN**.
Tutto ciò implica che l'area del triangolo **ABC** è uguale a quattro volte quella del triangolo **LMN** e cioè **S(ABC) = 4S(LMN)** da cui: $\frac{S(ABC)}{S(LMN)} = 4$.

Carola Costantini, Claudia Cisaria, Erika Sanzari, Sara Piscitelli, Classe 2D
Liceo Scientifico "T. Gullace", Roma



Hp/LA=LC Th/ 1)Il triangolo ABC è unico
AM=MB 2)CB/LM =AC/MN = AB/LN
CN=NB 3)A_{ABC}/A_{LMN}= ?

a)

Dato il triangolo LMN si costruiscono le rette parallele a ciascun lato e passanti per il vertice opposto. I punti d'intersezione delle parallele sono i punti A,B,C che formano il triangolo ABC.

La costruzione descritta del triangolo ABC è giustificata dal fatto che costruendo le parallele ai lati del triangolo LMN si formano tre parallelogrammi:ALNM,LMNC e LNBM. I parallelogrammi hanno i lati opposti uguali [congruenti] quindi: LC=MN [LC≅MN]; AL=MN [AL≅MN]; LM=NC [LM≅NC]; LM=NB [LM≅NB]; LN=AM [LN≅AM]; LN=MB [LN≅MB].

Pertanto AL=LC [AL≅LC] L punto medio di AC
AM=MB [AM≅MB] M punto medio di AB
BN=NC [BN≅NC] N punto medio di BC

In conclusione i lati del triangolo ABC hanno come punti medi L,M,N.

Il triangolo ABC è [un triangolo] unico perché come spiegato nel punto precedente esso è formato dalle parallele ai lati del triangolo LMN che passano per i punti L,M,N. Dal V postulato di Euclide o delle parallele ("data una retta e un punto fuori di essa, esiste ed è unica la parallela passante per questo punto") si deduce che la retta a parallela ad MN,che passa per L è unica, così come lo sono le rette b e c, pertanto il triangolo ABC è unico.

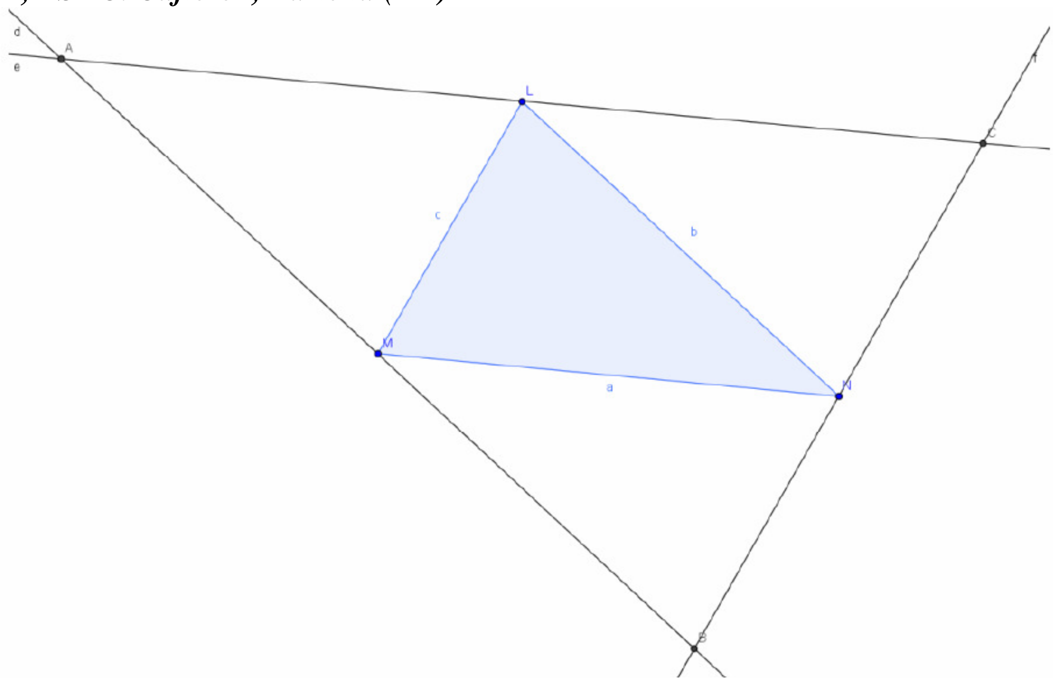
b)

Dal corollario del teorema di Talete ("il segmento che unisce i punti medi di due lati di un triangolo è parallelo al terzo e ne è la metà") si deduce che il segmento MN,che unisce i punti medi dei lati AB e BC, è parallelo [ad AC] ed è [ha lunghezza pari alla] la

metà del [della lunghezza] segmento AC, così come anche LM è parallelo [a CB] ed è [ha lunghezza pari alla] la metà [della lunghezza] di CB e anche LN è parallelo [ad AB] ed è [ha lunghezza pari alla] la metà [della lunghezza] di AB. Quindi: MN=AL=LC [$\overline{MN}=\overline{AL}=\overline{LC}$]; LM=CN=NB [$\overline{LM}=\overline{CN}=\overline{NB}$; LN=AM=MB [$\overline{LN}=\overline{AM}=\overline{MB}$] pertanto: AC=2MN [$\overline{AC}=2\overline{MN}$]; CB=2LM [$\overline{CB}=2\overline{LM}$]; AB=2LN [$\overline{AB}=2\overline{LN}$].
Il triangolo ABC è simile al triangolo LMN perché ogni lato del triangolo ABC è il doppio [ha lunghezza doppia di quella] del lato, ad esso parallelo, del triangolo LMN. Quindi il rapporto tra i lati del triangolo ABC e i lati del triangolo LMN è sempre uguale a 2 infatti: AC/MN=2MN/MN=2 [$\overline{AC}/\overline{MN}=2\overline{MN}/\overline{MN}=2$]; CB/LM=2LM/LM=2 [$\overline{CB}/\overline{LM}=2\overline{LM}/\overline{LM}=2$]; AB/LN=2LN/LN=2 [$\overline{AB}/\overline{LN}=2\overline{LN}/\overline{LN}=2$]. Il rapporto tra i lati del triangolo LMN e i lati del triangolo ABC è sempre uguale a $\frac{1}{2}$. Quindi avendo gli angoli ordinatamente uguali (i parallelogrammi ALNM,LMNC e LNBM hanno gli angoli opposti uguali) e i lati opposti ad angoli uguali proporzionali, i triangoli ABC ed LMN sono simili.

c)
Sapendo che il rapporto di similitudine tra i lati dei triangoli LMN e ABC è $\frac{1}{2}$, il rapporto tra le rispettive aree sarà $\frac{1}{4}$. A questo risultato si arriva anche osservando che il triangolo ABC è formato da quattro triangoli uguali [congruenti] quindi: $A_{ABC}=4A_{LMN}$ quindi: $A_{ABC}/A_{LMN}=4$.

Classe 2D, LS "C. Cafiero", Barletta (BA)



a)
Mandiamo la parallela ad ogni lato del triangolo *LMN* passante per il vertice opposto. Queste si intersecheranno in tre punti che chiamiamo A, B e C. Osserviamo ora il quadrilatero *AMNL* : possiamo affermare che è un parallelogramma perché ha due coppie di lati paralleli (AM //LN e

AL//MN per costruzione) ⇒ AM≅LN e AL≅MN; un discorso analogo vale per il parallelogramma

LMNC quindi, per la proprietà transitiva, AL≅LC. È possibile fare un discorso analogo per gli altri

due lati, quindi L, M ed N sono proprio i punti medi [dei lati] del triangolo *ABC*. Inoltre, secondo il postulato di Euclide, la parallela a una retta, passante per un punto esterno ad essa, è unica. Applicando il postulato di Euclide al nostro problema:

d, *e*, *f* sono uniche ⇒ i loro punti d'incontro A, B, C sono unici ⇒ *ABC* è unico.

b)

AB≅2LN

AC≅2MN

BC≅2ML

per precedente dimostrazione ⇒ I due triangoli sono simili per il Terzo Teorema [Criterio] di

Similitudine dei Triangoli*
** (Due triangoli aventi i tre lati rispettivamente proporzionali sono simili)*

c)
Osservando con attenzione la figura notiamo che si sono venuti a formare i triangoli *AML*, *MNB*,

MLC e quello di partenza *LMN*: AM≅MB≅LN

AL≅LC≅MN per precedente dimostrazione ⇒ Congruenti tra loro per il Terzo Teorema

[Criterio] di Congruenza dei Triangoli**
*** (Due triangoli aventi i tre lati rispettivamente congruenti sono congruenti)*
Quindi A*ABC* = 4A*LMN*.