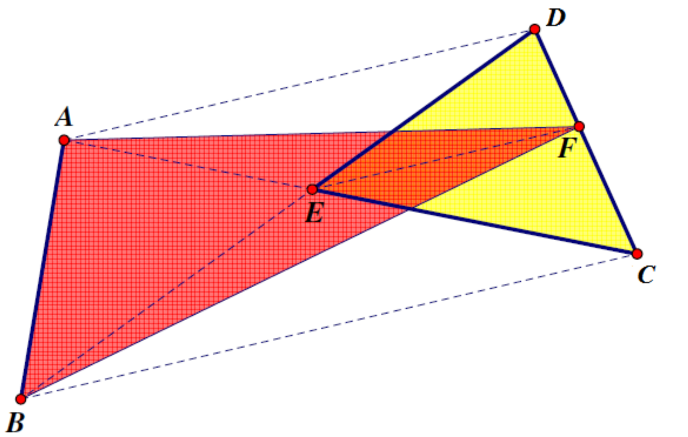
FLAT*landia*

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo"* *(Edwin A. Abbott)

Flatlandia 5 - 19 dicembre 2011 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema:
Sia ABCD un trapezio e indichiamo con E il punto di intersezione delle sue diagonali. Condotta da E la parallela alle basi sia F il punto di intersezione di essa con CD (vedi figura). Dimostrare che:

a) Area(AEB)=Area(ECD)
b) Area(AFB)=2 Area(ECD)



Commento
Sono giunte tredici risposte, dieci da Scuole Superiori e tre da Scuole Medie.
Il Problema poneva due quesiti entrambi relativi alla stessa figura geometrica, cioè un trapezio. Nel primo quesito si chiedeva di dimostrare l'equivalenza (nel senso di equiestensione) di due triangoli, nel secondo di dimostrare che l'area di un particolare triangolo, risultante dalla costruzione effettuata, era uguale al doppio dell'area di un altro triangolo già esaminato nel primo quesito.
Quasi tutti rispondono in modo sostanzialmente soddisfacente alle due domande. Tuttavia ci preme sottolineare ancora una volta la presenza di diverse imprecisioni di linguaggio, ad esempio "uguale" usato come sinonimo di "congruente" (che potrebbe anche essere accettato), "uguale" al posto di "equivalente" (che invece non ci sentiamo di approvare), come pure "aree congruenti" invece di "aree uguali" riferito a superfici equivalenti.
Inoltre in alcune risposte abbiamo rilevato una scarsa cura nel linguaggio utilizzato e nella scrittura delle formule. Pertanto consigliamo a tutti gli studenti una attenta rilettura dell'elaborato prima dell'invio.
Infine vogliamo ribadire che un software di Geometria non è in grado di dimostrare proprietà geometriche come la congruenza di due segmenti, può comunque essere utilizzato per scoprire relazioni e proprietà tra le figure, che devono poi essere dimostrate.

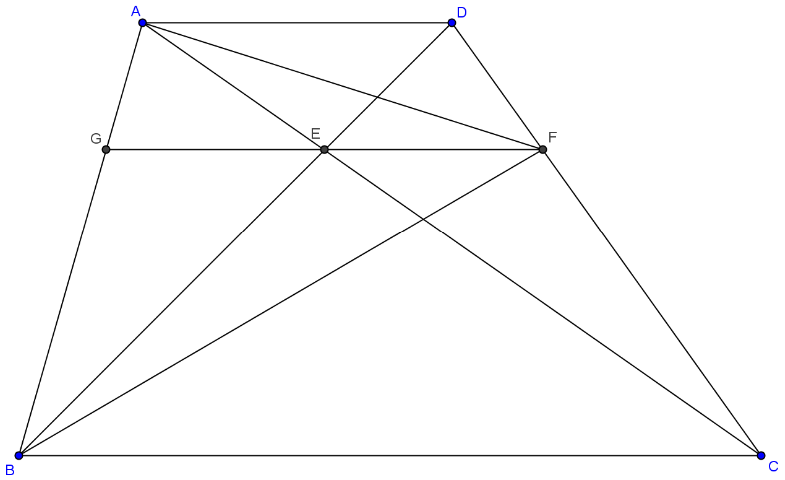
Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:
LS "Don Milani", Montichiari (BS)
Ist. Sup. Sez. LST, "A. Badoni", Lecco (LC)
LS "P.M. Vermigli", Zurigo (Svizzera)
LS "R. Donatelli", Terni (TR)
LS "L. Cremona", Milano (MI)

LS “Pitagora”, Rende (CS)
LS “B. Russell”, Cles (TN)
LS “G. Aselli”, Cremona (CR)
SM “G.B. Tiepolo”, Milano (MI)
SM “Dimesse”, Udine (UD)

NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni

Claudio Donadoni, Nicola Picenni, Classe 3B
Liceo Scientifico "Don Milani", Montichiari (BS)

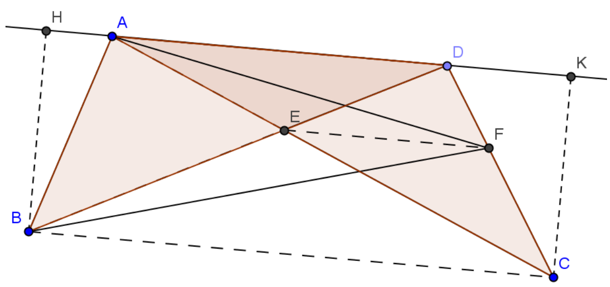


a)
Area(ABE) = Area(ABC) − Area(BEC). Area(CDE) = Area(DCB) − Area(BEC). Ma, poiché Area(ABC) = Area(DCB) perché triangoli con la stessa base BC e altezze congruenti poiché [in quanto] altezze dello stesso trapezio ABCD, [segue che] Area(CDE) = Area(ABC) − Area(BEC), cioè Area(ABE) = Area (CDE).

b)
Area(ABF) = Area(ABE) + Area(AEF) + Area(BEF). Area(CDE) = Area(EDF) + Area(CEF). Ma, poiché Area(EDF) = Area(AEF) perché triangoli con la stessa base EF e altezze congruenti poiché [in quanto] altezze dello stesso trapezio AGFD (detto G il punto di intersezione del prolungamento di EF con AB) e Area(CEF) = Area(BEF) perché triangoli con la stessa base EF e altezza [altezze] congruenti perché altezze dello stesso trapezio GBCF, Area(ABF) = Area(ABE) + Area(EDF) + Area(CEF) = Area(ABE) + Area(CDE). Allora, per quanto dimostrato in [al punto] a), Area(ABF) = 2Area(CDE).

Monica Bettinelli, Ilaria Brescia, Samantha Casati, Luca De Capitani, Giorgia Galperti, Isabella Mariani, Sara Mazzoleni, Alessandro Panzeri, Classe 3B
Liceo Scientifico Tecnologico, I.I.S."A. Badoni", Lecco (LC)

a)
1) Considero i triangoli ABD e ADC, traccio le altezze BH e CK



I due triangoli hanno:

• AD in comune;

• B≅HCK [BH ≅ CK] poiché entrambi i segmenti rappresentano la distanza tra le rette AD // BC per ipotesi

$\Longrightarrow$ ABD $\doteq$ [bisogna dire che il simbolo $\doteq$ sta ad indicare l'equivalenza dei due triangoli] ACD poiché hanno congruenti le basi e le rispettive altezze.

2) Il triangolo ADC può essere scomposto nei triangoli ADE e CDE

Il triangolo ADB può essere scomposto nei triangoli ADE e AEB.

Quindi:

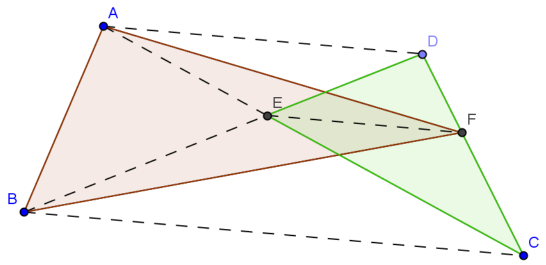
ADB $\doteq$ ABE + AED $\Longrightarrow$ ABE $\doteq$ ADB – AED

ADC $\doteq$ CDE + AED $\Longrightarrow$ CDE $\doteq$ ADC – AED

Ma ABD $\doteq$ ACD per 1) e AED $\doteq$ AED per la proprietà riflessiva dell'equivalenza $\Longrightarrow$ ADB – AED $\doteq$ ADC – AED $\Longrightarrow$ ABE $\doteq$ CDE per transitività.

$\Longrightarrow$ A(ABE) = A(CDE) [Area(ABE) = Area(CDE)]

b)

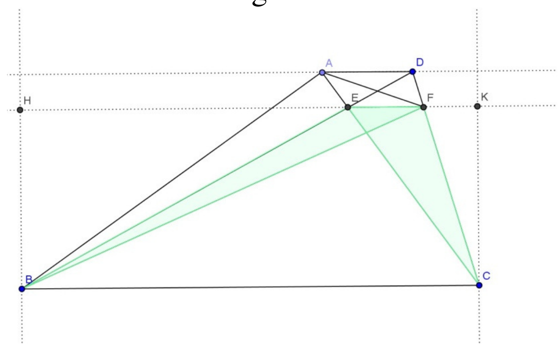


3) Considero i triangoli BEF ed EFC. Essi hanno:

• la base EF in comune;

• BH ≅ CK perché distanza tra rette EF//BC per ipotesi

=> BEF $\doteq$ EFC poiché hanno basi e altezze congruenti

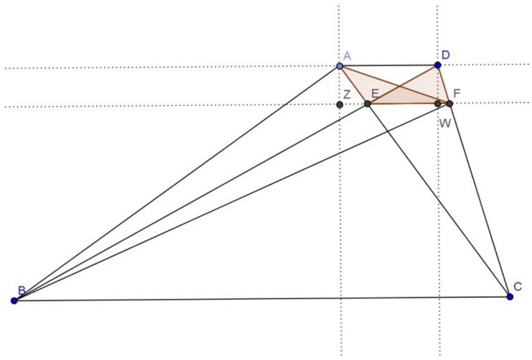


4) Considero i triangoli AEF e EFD hanno:

• la base EF in comune;

• AZ ≅ DW perché distanza tra rette EF//AD per ipotesi

=> AEF $\doteq$ EFD poiché triangoli con basi e altezze congruenti



Considero il triangolo CED, esso è composto dai triangoli EFD, EFC.
Considero il triangolo AFB, esso è composto dai triangoli AEB, BEF, AEF.
BEF ≐ EFC per il punto 3)
AEF ≐ EFD per il punto 4)

=> BEF + AEF ≐ EFC + EFD

Ma AEB ≐ CED per il punto a) della dimostrazione

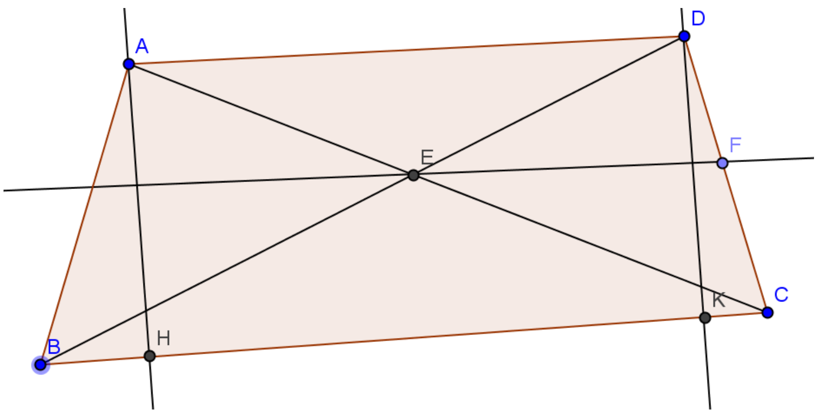
=> AEB + (BEF + AEF) ≐ (EFC + EFD) + AEB ≐ (EFC + EFD) + CED

=> AEB + (BFAE) ≐ CED + CED

=> AFB ≐ 2CED => A(ABF) = 2A(CED) [Area(ABF) = 2Area(CED)]

Veronica Bressi, Classe 3
LS "P.M. Vermigli", Zurigo (Svizzera)

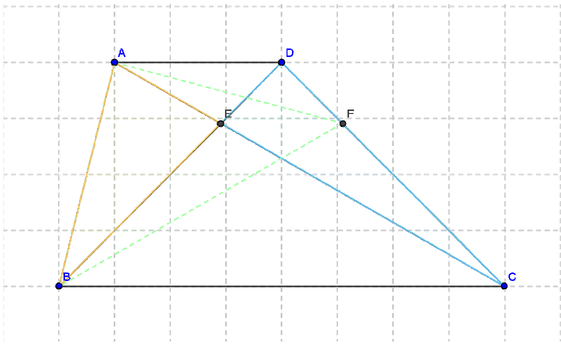
a)



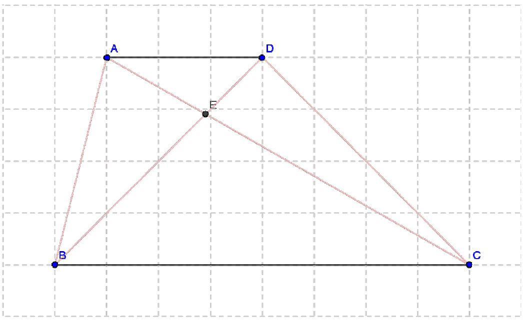
Considerando i due triangoli ABC e CDB:
essi hanno la stessa area perché aventi la base BC in comune e la stessa altezza in quanto le due rette [sostegno di AD e BC] sono parallele e di conseguenza le distanze AH e DK [che corrispondono alle altezze dei due triangoli] sono uguali. => A(ABC) = A'(CDB) [Area(ABC) = Area(CDB)]
Sottraendo una stessa area comune, l'area del triangolo BEC, ai [alle aree dei] due triangoli ABC e CDB aventi la stessa area [che sono uguali] come prima dimostrato risulta che:
A(AEB)= A'(CED) [Area(AEB) = Area(CED)]

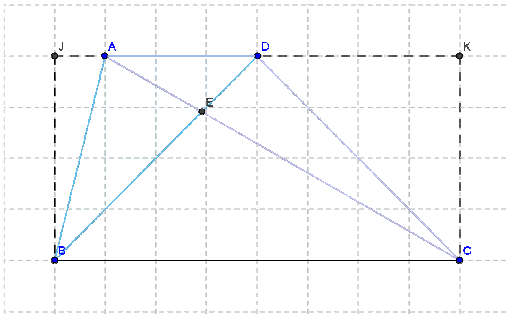
b)
[[…]]

Elisa Diamanti, Classe 3D
LS "R. Donatelli", Terni (TR)



a)
Consideriamo i triangoli ABD E ACD:



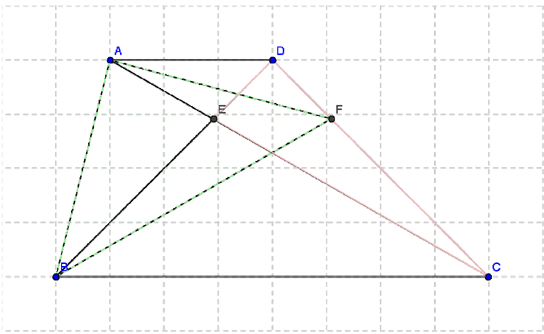


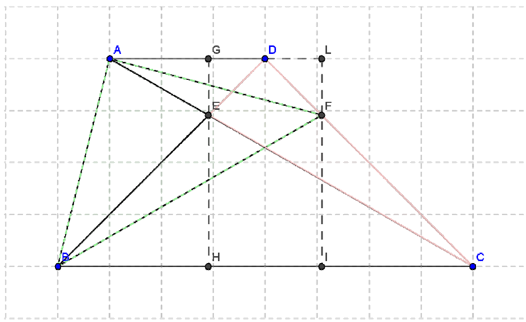
Area(ABD)= Area(ACD) , poiché hanno stessa base ed altezza.

$$\begin{cases} Area(DEC) = Area(ACD) - Area(ADE) \\ Area(ABE) = Area(ABD) - Area(ADE) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Area(DEC)= Area(ABE)

b)



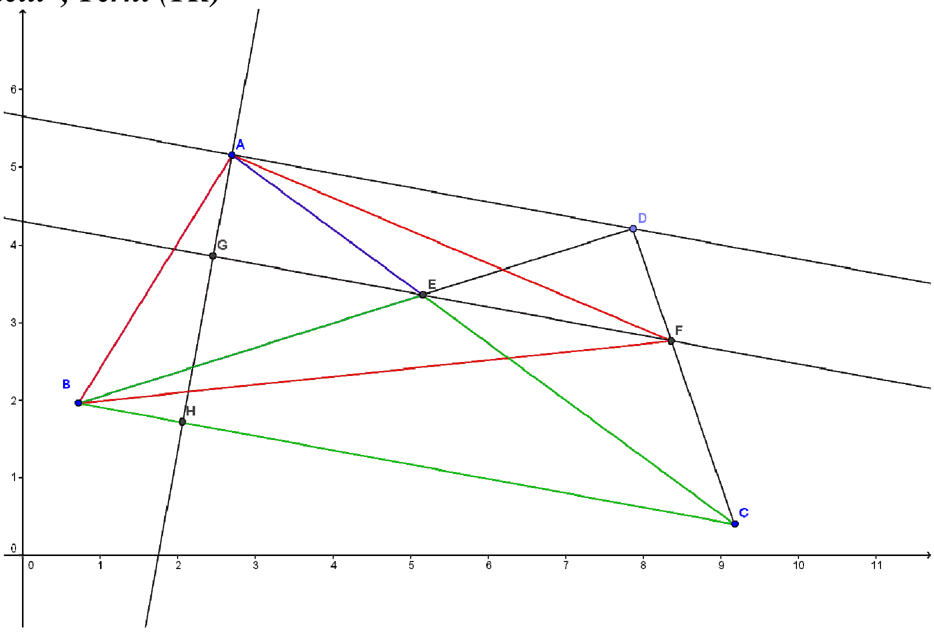


Consideriamo le altezze $\overline{GE}$, $\overline{EH}$ (dei rispettivi triangoli AED e BEC) e $\overline{FL}$, $\overline{FI}$ (dei rispettivi triangoli ADF e AFC): esse sono [rispettivamente] congruenti.
I triangoli ADF e BFC sono equivalenti rispettivamente ai triangoli ADE e BEC, poiché hanno stessa base ed altezza.

$$\begin{cases} Area(AFB) = AreaTOT - Area(ADE) - Area(BFC) \\ Area(DEC) + Area(AEB) = 2Area(DEC) = AreaTOT - Area(ADE) - Area(BEC) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Area(DEC)= $\dfrac{Area(ABF)}{2}$

Francesca Stefanini, Classe 3D
LS "R. Donatelli", Terni (TR)



a)

Considero i triangoli ABD e ACD. Essi hanno:

- Stessa base $\overline{AD}$ [AD] e stessa altezza $\overline{AH}$ [AH]

$\Rightarrow$ Area (ABD) = Area (ACD)

Considero triangoli AEB e DEC. [[Essi hanno]]

- Area (AEB) = Area(ABD) – Area(AED)
- Area (DEC) = Area(ACD) – Area(AED)

$\Rightarrow$ Area (AEB) = Area (DEC) perché ottenuta per sottrazione di triangoli equivalenti tra loro

b)

Per dimostrare Area(ABF)=2 Area(CDE), considero in primo luogo l'area di ABF:

Area (ABF) = $Area(ABCD) - Area(BFC) - Area(ADF) =$

$$= \frac{(\overline{BC}+\overline{AD})*(\overline{AG}+\overline{GH})}{2} - \frac{(\overline{BC}*\overline{GH})}{2} - \frac{(\overline{AD}*\overline{AG})}{2} =$$

$$= \frac{(\overline{BC}*\overline{AG})+(\overline{BC}*\overline{GH})+(\overline{AD}*\overline{AG})+(\overline{AD}*\overline{GH})-(\overline{BC}*\overline{GH})-(\overline{AD}*\overline{AG})}{2} =$$

$$= \frac{(\overline{BC}*\overline{AG})+(\overline{AD}*\overline{GH})}{2}.$$

Considero poi l'area di CDE:

Area (CDE) = Area (AEB) per quanto dimostrato prima.

Calcolo l'area di AEB:

Area (AEB) = $\dfrac{Area(ABCD)-Area(AED)-Area(BEC)}{2}$

Dove Area (AED) = Area (ADF) perché hanno stessa base e stessa altezza.

Dove Area(BEC) = Area(BFC) perché hanno stessa base e stessa altezza.

Quindi Area(AEB) $= \dfrac{Area(ABCD)-Area(ADF)-Area(BFC)}{2} =$

$$= \left[\frac{(\overline{BC}+\overline{AD})*(\overline{AG}+\overline{GH})}{2} - \frac{(\overline{AD}*\overline{AG})}{2} - \frac{(\overline{BC}*\overline{GH})}{2}\right]*\frac{1}{2} =$$

$$= \frac{(\overline{BC}*\overline{AG})+(\overline{BC}*\overline{GH})+(\overline{AD}*\overline{AG})+(\overline{AD}*\overline{GH})-(\overline{BC}*\overline{GH})-(\overline{AD}*\overline{AG})}{2}*\frac{1}{2}$$

$$= \frac{(\overline{BC}*\overline{AG})+(\overline{AD}*\overline{GH})}{2}*\frac{1}{2}$$

E di conseguenza Area (CDE) $= \frac{(\overline{BC}*\overline{AG})+(\overline{AD}*\overline{GH})}{2}*\frac{1}{2}$

Tornando alla tesi da dimostrare Area(ABF)=2 Area(CDE):

Area(ABF) = $\frac{(\overline{BC}*\overline{AG})+(\overline{AD}*\overline{GH})}{2}$ e

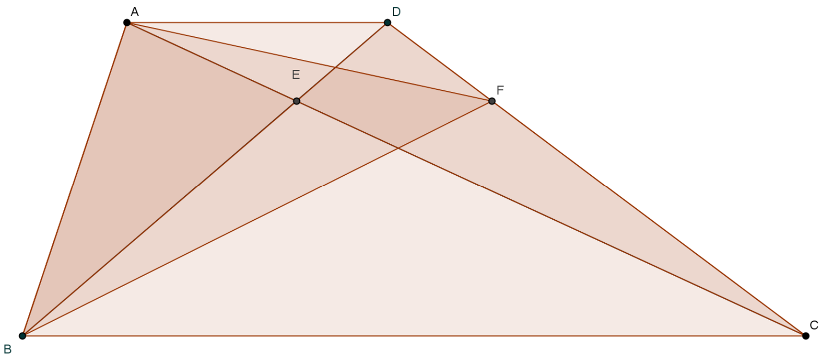
Area(CDE) $= \frac{(\overline{BC}*\overline{AG})+(\overline{AD}*\overline{GH})}{2}*\frac{1}{2}$ ne deriva che:

Area(CDE) = $\frac{1}{2}Area\ (AFB)$

cioè:

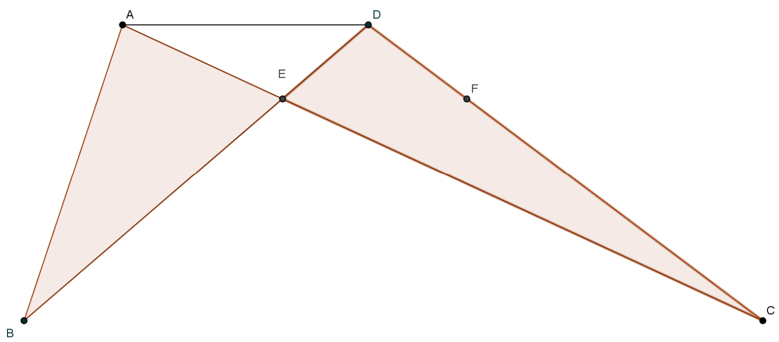
Area(ABF) = 2Area(CDE)

Alessandro Lenoci, Classe 2B
Liceo Scientifico "Don Milani", Montichiari (BS)



a)

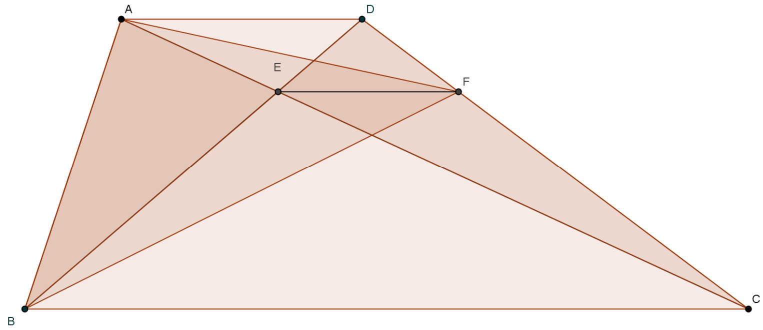
Osservando la figura si nota che i triangoli ABD e ACD hanno la base AD in comune e stessa altezza , cioè quella del trapezio ABCD.



Dunque, siccome questi due triangoli hanno stessa base e stessa altezza, per la formula dell'area nei triangoli, avranno anche la stessa area. Però ABD e ADC hanno in comune l'area del triangolo ADE, come appare evidente in figura. Quindi si può sottrarre da [dalle aree di] ambedue i triangoli ABD e ADC l'area di ADE, ottenendo le due aree equivalenti [uguali] dei triangoli AEB e DEC:

Area (ABE) = Area (CDE)

b)



Nella figura si nota che il triangolo ABF è composto da tre triangoli : ABE, AEF, BEF . Sappiamo per dimostrazione precedente che AEB è equivalente a CDE , quindi per provare che Area(ABF) = 2 Area(CDE) devo [basta] provare che l'Area(AEF) + Area(BEF) = Area(CDE). Osservando la figura con l'aggiunta del segmento parallelo alle basi EF, si nota che i triangoli EFB e EFC hanno la base in comune EF e la stessa altezza (quella del trapezio BCFE), quindi sono equivalenti e si può scrivere Area(BEF) = Area(EFC). Ora considero i due triangoli AEF e EDF, che sono anch'essi equivalenti poiché hanno in comune la base EF e la stessa altezza (quella del trapezio AEFD), per cui posso scrivere Area(AEF) = Area(EDF). Così la somma Area(AEF) + Area(BEF) = Area(EDF) + Area(EFC) = Area(CDE)

Quindi nel triangolo ABF:

Area(ABF) = Area(AEF) + Area(BEF) + Area(ABE)

ma se

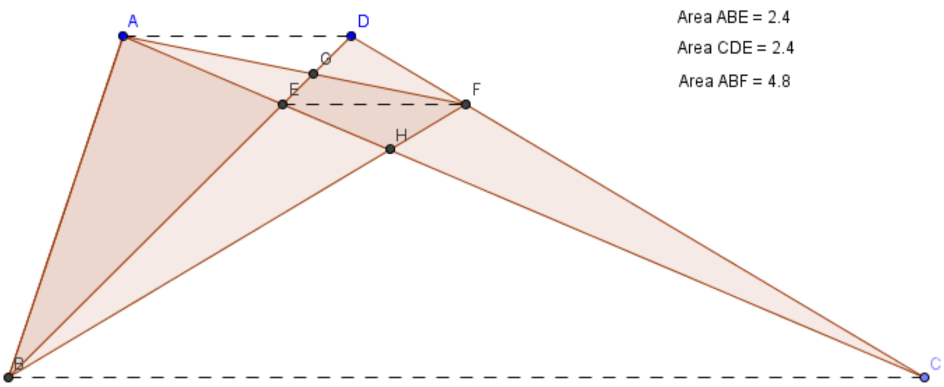
Area(AEF) + Area(BEF) = Area(CDE) e Area(ABE) = Area(CDE)

per dim. precedente

Area(ABF) = Area(CDE) + Area(CDE) = 2Area(CDE)

Davide Toschi, Classe 2G
Liceo Scientifico "L. Cremona", Milano (MI)

a)



I triangoli BCA e BCD sono costruiti sulla stessa base BC e hanno le altezze, relative a BC, congruenti essendo AD parallelo a BC per ipotesi. Ne seque [segue] che:

Area(BCA) = Area(BCD) (1)

Scomponendo i triangoli: Area(BCA) = Area(ABE) + Area(BEC)

Area(BCD) = Area(CDE) + Area(BEC)

Quindi, da (1) segue che: Area(ABE) = Area(CDE)

b)
Sia G il punto di intersezione tra i segmenti AF e DE e H il punto di intersezione tra i segmenti BF e CE . Applicando quanto appena dimostrato ai trapezi ADFE e BCFE ottiene rispettivamente che:

Area(AEG) = Area(DFG)   e   Area(BEH) = Area(CFH)   (2)

Scomponendo il triangolo ABF, si ha:

Area(ABF) = Area(ABE) + Area(AEG) + Area(BEH) + Area(EGFH)

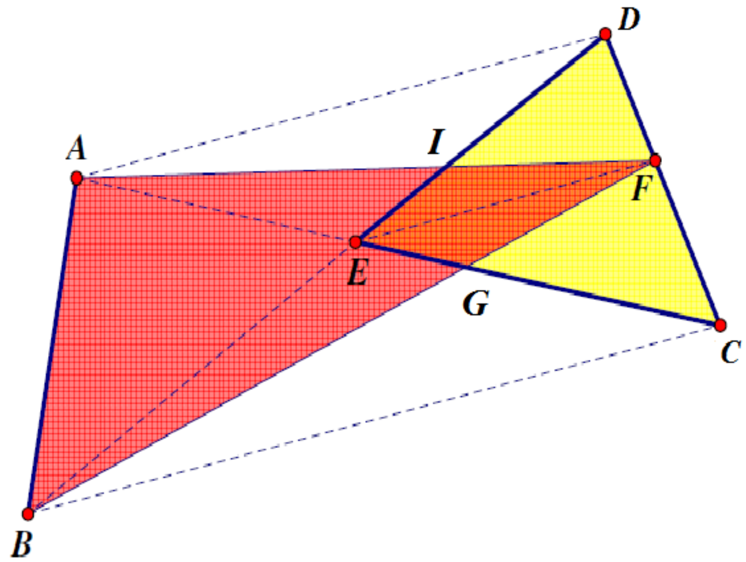
Sostituendo (2) si ottiene:

Area(ABF) = Area(ABE) + Area(DFG) + Area(CFH) + Area(EGFH)

Quindi:

Area(ABF) = Area(ABE) + Area(CDE)
Area(ABF) = 2 Area(CDE)

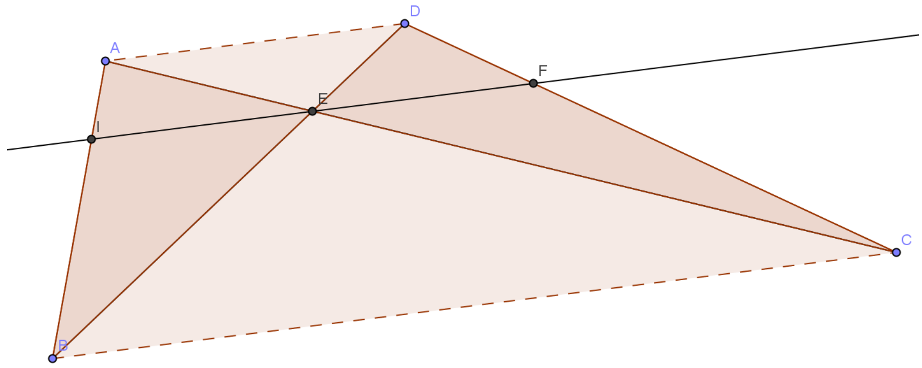
Classe 2E, Liceo Scientifico "Pitagora", Rende (CS)



Consideriamo i triangoli BCA e CBD. Essi sono equivalenti perché hanno le altezze congruenti perché i punti A e D giacciono sulla [su una] parallela di [a] BC e le basi sono congruenti perché BC è la base di entrambi i triangoli considerati. Allora, per differenza di triangoli equivalenti $ABE \doteq$ [occorre spiegare che questo simbolo significa "equivalente"] CDE ($ABC - BCE \doteq BCD - BCE$)
Consideriamo i triangoli BCE e BCF. Essi sono equivalenti perché hanno le altezze congruenti in quanto i punti E e F giacciono sulla [su una] parallela di [a] BC e le basi sono congruenti perché BC è la base di entrambi i triangoli considerati. Allora, per differenza di triangoli equivalenti, $BGE \doteq GCF$($BCE - BCG \doteq BCF - BCG$)
Analogamente consideriamo i triangoli AED e AFD. Essi sono equivalenti perché hanno le altezze congruenti in quanto i punti E e F giacciono sulla [su una] parallela di [ad] AD e le basi sono congruenti perché AD è la base di entrambi i triangoli considerati. Allora, per differenza di triangoli equivalente $AIE \doteq IFD$ ($ADE - AID \doteq ADF - AID$)
Il quadrilatero $AEBF$ [concavo] è equivalente al triangolo DEC per differenza [somma] di poligoni congruenti [equivalenti].
Quindi $2CDE \doteq ABF$.

Elia Cattani, Marco Dalpiaz, Eleonora Forcone, Francesca Leonardi, Caterina Ossanna
Classe 2C, Liceo Scientifico di Scienze Applicate "B. Russell", Cles (TN)

a)

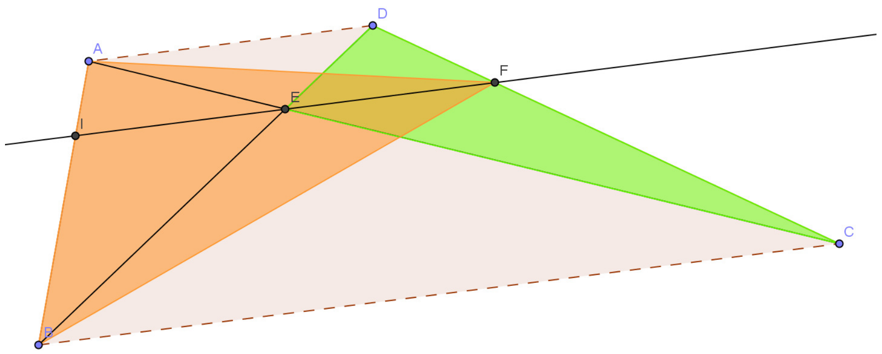


Consideriamo i triangoli ABC e BCD, essi hanno:

- la stessa base (BC)
- la stessa altezza (distanza tra le rette AD e BC, parallele perché ABCD è un trapezio)

Quindi ABC e BCD sono triangoli equivalenti.
ABE = ABC – BCE;
CDE = BCD – BCE;
Dal momento che ABC e BCD sono equivalenti (per dimostrazione precedente), ABE è equivalente a CDE per differenza di poligoni equivalenti.

b)



Consideriamo i triangoli AEF e DEF, essi hanno:

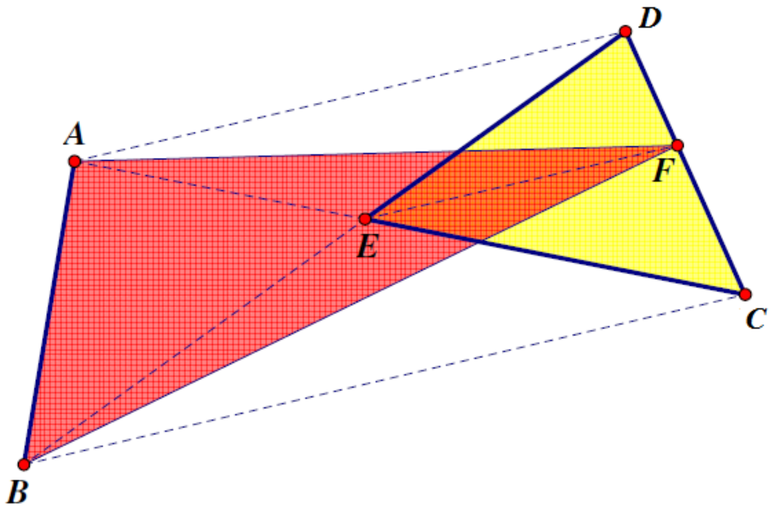
- stessa base (EF)
- stessa altezza (distanza tra le rette AD e IF, parallele per ipotesi)

Quindi AEF e DEF sono triangoli equivalenti.
Consideriamo i triangoli BFE e CFE, essi hanno:

- stessa base (EF)
- stessa altezza (distanza tra le rette IF e BC, parallele per ipotesi)

Quindi BFE e CFE sono triangoli equivalenti.
AEF + BFE = DEF + CFE
AEF + BFE = CDE
Per somma di triangoli equivalenti.
Dal momento che CDE è equivalente a ABE (per dimostrazione precedente)
ABF = 2CDE, per somma di triangoli equivalenti.

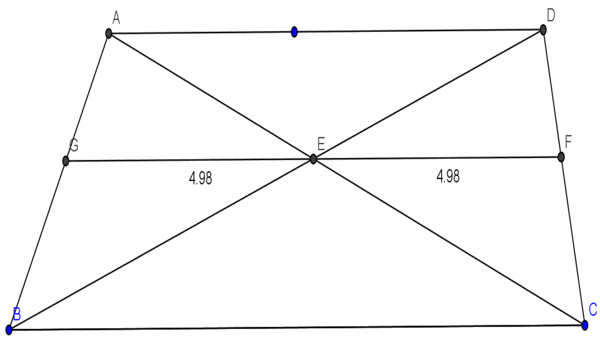
Angelo Corno, Classe 1A
Liceo Scientifico "G. Aselli", Cremona (CR)



a)
Area(*ABE*) = Area(*CDE*)
I triangoli ABE e CDE sono uguali [equivalenti] poiché sono entrambi uguali alla differenza rispettivamente del triangolo ABC e del triangolo DCB (aventi stessa base e altezza) e del triangolo ECB.

b)
Area(*ABF*) = 2Area(*CDE*).
L'area del triangolo ABF è uguale al doppio [dell'area] del triangolo AFB [CDE] poiché i triangoli AEF e BEF hanno la stessa base e la stessa altezza dei triangoli DEF e EFC [rispettivamente]; quindi l'area di AEBF è uguale a quella di CDE. [Quindi…]

Arianna Tavano, Classe 3B
Scuola Media "Dimesse", Udine (UD)



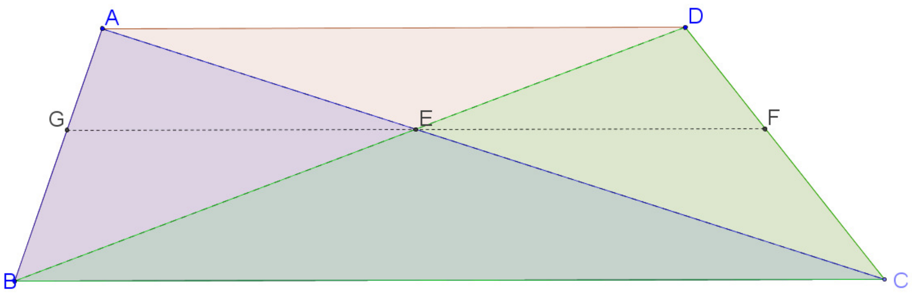
a)
I segmenti GE e EF sono uguali [[(provato con GeoGebra)!]].
Le altezze dei triangoli BGE e CFE sono uguali perché GF//BC, quindi i triangoli BGE e CFE sono equivalenti perché hanno la stessa base e la stessa altezza.
La stessa cosa succede dall'altra parte per i triangoli AGE e EFD

Quindi [[A(BGE) + A(AGE) = A(FED) + A(EFC) = A(BAE) = A(DCE)]]
Area(BGE) + Area(AGE) = Area(FED) + Area(EFC) [quindi] Area(BAE) = Area(DCE)

b)
Per risolvere questo punto prendo in considerazione i triangoli DEF e AEF che sono equivalenti perché hanno la stessa base e la stessa altezza. Il quadrilatero AFBE ha quindi la stessa area del triangolo EDC e siccome ABE è equivalente a EDC (punto a) A(AFB) = 2A(ECD) [Area(AFB) = 2Area(ECD)].

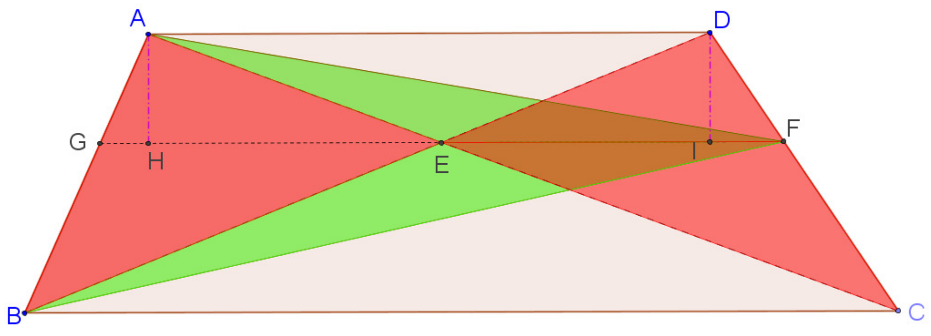
Bortolussi Tommaso e Giarduz Andrea, Classe 3A
Scuola Media "Dimesse", Udine (UD)

a)



Il triangolo ACB è equivalente al triangolo DCB perché hanno la stessa base (BC) e la stessa altezza, che è data dalla distanza delle due rette parallele [sostegno di AD e BC]. Se togliamo da entrambi il triangolo BEC (è comune ai triangoli), otteniamo ABE e CDE che sono dunque equivalenti tra loro.

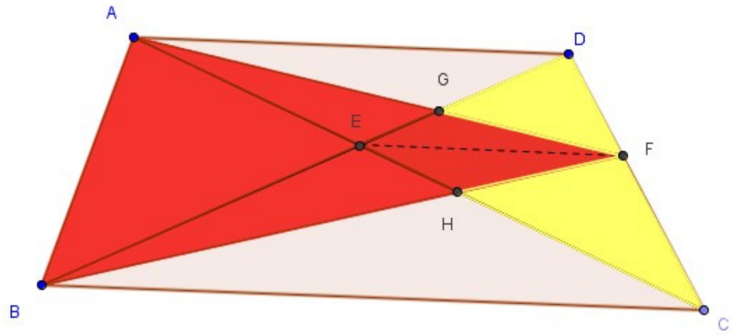
b)



Il triangolo DFE è equivalente al triangolo AFE perché la base (EF) e l'altezza ($DI = AH$) sono equivalenti [congruenti] per entrambi i triangoli, inoltre anche il triangolo EFB è equivalente al triangolo FCE in quanto la base è la stessa (EF) e anche l'altezza.
Si può dunque affermare che $AFE + EFB = DFE + FCE = CDE$ [Area(AFE) + Area(EFB) = Area(DFE) + Area(FCE) = Area(CDE)] quindi si può dire semplicemente che $AFE + EFB = CDE$ [Area(ABF) + Area(EFB) = Area(CDE)].

Dato che CDE è equivalente ad ABE (dimostrazione precedente), si può affermare che $ABF = CDE + ABE$ [Area(ABF) = Area(CDE) + Area(ABE)], cioè che $ABF = 2CDE$ [Area(ABF) = 2Area(CDE)]

Alice Garbari, Classe 2I
Scuola Media "G.B. Tiepolo", Milano (MI)



a)
Area(ABC) = Area(CDB) perché hanno la stessa base BC e la stessa altezza (ABCD è trapezio, quindi AD // BC)
Sottraendo da entrambi i triangoli l'Area(BEC)
Area(ABC) – Area(BEC) = Area(ABE)
Area(CDB) – Area(BEC) = Area(CDE)
Si dimostra che Area(ABE) = Area(CDE)

b)
EF // BC per ipotesi, di conseguenza BEFC e DFEA sono trapezi
Sia H il punto d'intersezione delle diagonali BF ed EC e G il punto d'intersezione delle diagonali AF e DE (vedi figura)
Per quanto dimostrato al punto **a)** si ha:
Area(ABE) = Area(CDE)
Area(BEH) = Area(CFH)
Area(AEG) = Area(DFG)
Di conseguenza si ha che Area(ABF) – Area(ABE) = Area(CDE)
Da qui la tesi Area(ABF) = 2Area(CDE)