

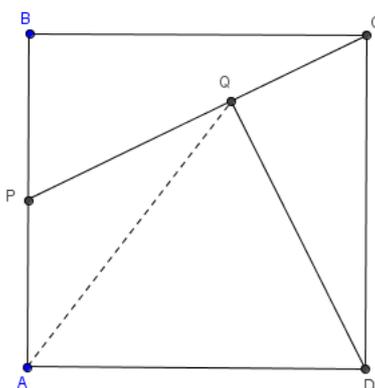
FLATlandia

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" ([Edwin A. Abbott](#))

Flatlandia 10-22 Dicembre 2012 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

È dato un quadrato $ABCD$ e sia P il punto medio del lato AB . Si tracci il segmento PC come indicato in figura. Si mandi poi da D la perpendicolare a PC e sia Q il piede di tale perpendicolare.



a) Che particolarità ha il quadrilatero di vertici A, P, Q, D ?

b) Dimostrare che $AQ = AD$.

Giustificare tutte le risposte.

Commento

Sono giunte dieci risposte così suddivise: cinque da classi seconde di Licei Scientifici, quattro risposte provenienti da classi terze e una da una classe seconda di Scuola Media (ossia Scuola Secondaria di I grado) tutte facenti parte dello stesso Istituto Comprensivo.

Il problema poneva due quesiti relativi a una stessa figura costituita da un quadrato contenente al suo interno due segmenti tra loro perpendicolari e disposti in modo tale da formare un particolare quadrilatero: nel primo si chiedeva di individuare una particolarità di tale quadrilatero; nel secondo di dimostrare la congruenza di una diagonale del quadrilatero e del lato del quadrato.

Un buon numero di studenti risponde in modo sostanzialmente corretto al primo quesito, riconoscendo che il quadrilatero è ciclico, cioè inscrittibile in una circonferenza. Per quanto riguarda il secondo quesito, abbiamo dovuto rilevare che alcuni basano le loro affermazioni su un semplice esame della figura, senza fornire le opportune giustificazioni.

Inoltre, come spesso accaduto in passato, molti continuano a confondere un angolo con la sua ampiezza e un segmento con la sua lunghezza.

Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:

LS "Pitagora", Rende (CS)

LS "C. Cafiero", Barletta (BA)

LS "Archimede", sez. associata di Aci Bonaccorsi (CT)

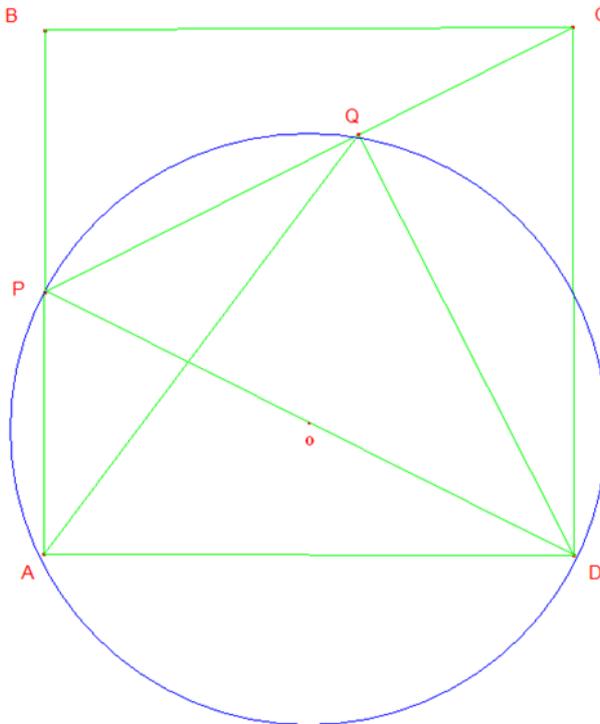
LS "Aristosseno", Taranto (TA)

Ist. Comp. "G. Deledda", Ginosa (TA)

NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni

Asia Cosentino, Carmela Perri, Debora Saullo, Classe 2A
Liceo Scientifico "Pitagora", Rende (CS)



a)

Il quadrilatero $APQD$ è inscrittibile in una circonferenza poiché la somma [delle ampiezze] degli angoli opposti \widehat{PQD} e \widehat{BAD} misura [vale] 180° in quanto:

$\widehat{PQD} \cong \frac{\pi}{2}$ [l'ampiezza di \widehat{PQD} vale 90°] perché $DQ \perp PC$ [è opportuno decidere inizialmente se le ampiezze sono espresse in gradi o radianti]

$\widehat{BAD} \cong \frac{\pi}{2}$ [l'ampiezza di \widehat{BAD}] perché [\widehat{BAD} è un] angolo retto del quadrato $ABCD$.

b)

Consideriamo i triangoli PBC e APD . Essi hanno:

$BP \cong PA$ perché P è il punto medio di AB

$BC \cong AD$ perché lati del quadrato $ABCD$

$\widehat{PBC} \cong \widehat{PAD}$ perché angoli retti del quadrato $ABCD$

I due triangoli sono dunque congruenti per il primo criterio di congruenza. Di conseguenza:

$\widehat{CPB} \cong \widehat{APD}$

$\widehat{PDA} \cong \widehat{BCP}$

$PD \cong PC$

Inoltre in riferimento alla circonferenza di centro O :

$\widehat{APD} \cong \widehat{AQD}$ perché sono angoli alla circonferenza che sottendono lo stesso arco e per la proprietà transitiva [della relazione di congruenza fra angoli] $\widehat{AQD} \cong \widehat{CPB}$ [$\widehat{AQD} \cong \widehat{CPB}$]

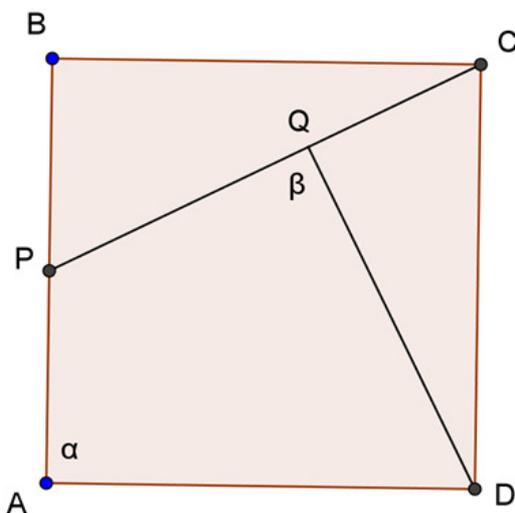
$\widehat{PAQ} \cong \widehat{PDQ}$ perché sono angoli alla circonferenza che sottendono lo stesso arco

$\widehat{PQA} \cong \widehat{PDA}$ perché sono angoli alla circonferenza che sottendono lo stesso arco

$\widehat{CPB} \cong \widehat{PAQ} + \widehat{PQA}$ per il teorema dell'angolo esterno

Poiché $Q\hat{D}P \cong Q\hat{A}P$, $P\hat{D}A \cong P\hat{Q}A$ e $A\hat{Q}D \cong C\hat{P}B$ allora $A\hat{Q}D \cong Q\hat{D}A$, di conseguenza il triangolo AQD è isoscele perché ha gli angoli alla base $A\hat{Q}D$ e $Q\hat{D}A$ congruenti, quindi i segmenti AQ e AD sono congruenti.

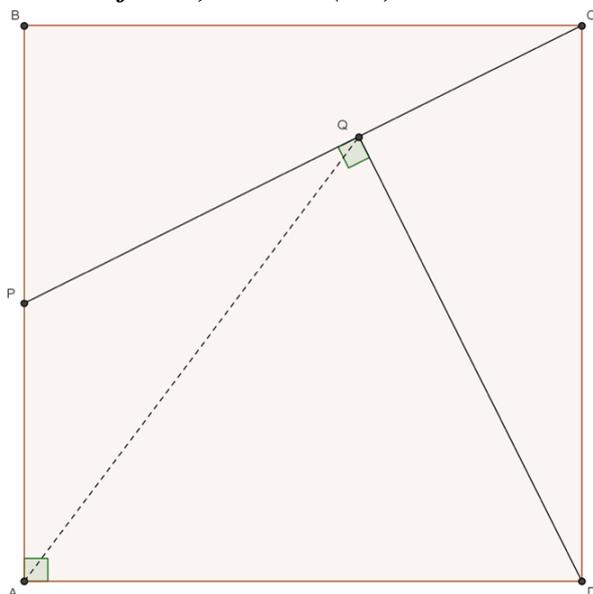
*Michele Arcangelo Damato, Michele Montatore, Classe 2C
Liceo Scientifico Statale "Carlo Cafiero", Barletta (BA)*



a)
Il quadrilatero APQD è inscrivibile in una circonferenza, perché gli angoli α e β sono entrambi retti, poiché ABCD è un quadrato e quindi α è retto, mentre QD è la perpendicolare al segmento PC, perciò anche β è retto. La somma [delle ampiezze] dei due angoli è 180° , quindi anche la somma [delle ampiezze] degli altri due angoli interni del quadrilatero APQD sarà 180° . Tutto ciò, per la condizione di inscrivibilità di un quadrilatero, implica che APQD è inscrivibile in una circonferenza.

b)
[[...]]

*Angelo Dimalta, Giuseppe Giannini, Tommaso Monopoli, Marcello Santoro, Classe 2C
Liceo Scientifico Statale "Carlo Cafiero", Barletta (BA)*

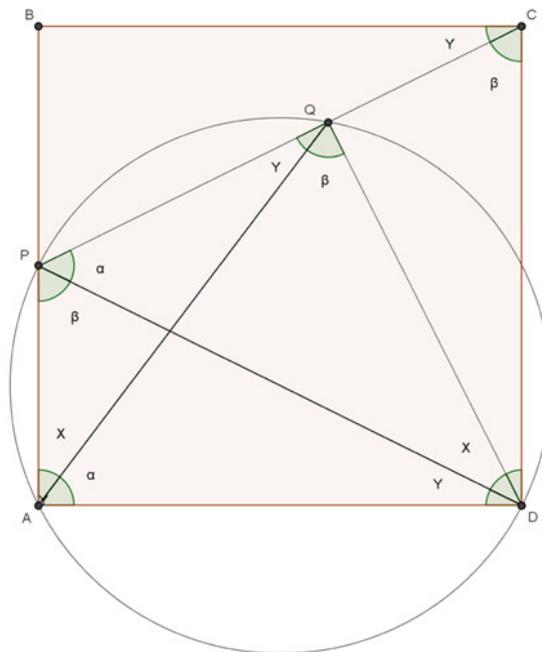


a)

Ipotesi: ABCD quadrato, $AP \cong PB$, ampiezza $PQD = 90^\circ$

{ampiezza angolo $BAD = 90^\circ$ (per definizione di quadrato); ampiezza angolo $DQP = 90^\circ$ (per ipotesi)} \Rightarrow ampiezza angolo $PAD +$ ampiezza $DQP = 180^\circ \Rightarrow$ **quadrilatero APQD inscrittibile in una circonferenza** (perché avente angoli opposti supplementari).

b)



Ipotesi: ABCD quadrato, $BP \cong PA$, ampiezza $PQD = 90^\circ$, APQD inscrittibile in una circonferenza.

Tesi: $AQ \cong AD$.

Dimostrazione:

{angolo $DPC \cong$ angolo DAQ (α), angolo $APD \cong$ angolo AQD (β), angolo $PAQ \cong$ angolo PDQ (X), angolo $ADP \cong$ angolo AQP (Y)} (perché angoli alla circonferenza che insistono su archi congruenti)

Considero i triangoli PBC e PAD

{ $AD \cong BC$ (perché lati del quadrato ABCD); $AP \cong PB$ (per ipotesi); angolo $ABC \cong$ angolo BAD (perché angoli retti)} \Rightarrow (per primo criterio di congruenza) triangolo $PCB \cong$ triangolo $PDA \Rightarrow$

$PC \cong PD$ (perché elementi corrispondenti in triangoli congruenti) \Rightarrow triangolo DPC isoscele e angolo $PCB \cong$ angolo PDA (Y)

Ampiezza angolo $PDC =$ ampiezza angolo PCD (perché angoli alla base del triangolo isoscele DPC) ed anche uguali a β perché complementari di angoli congruenti, cioè Y

Ampiezza angolo $PDC = 180^\circ - (\alpha + \beta)$ (poiché la somma [delle ampiezze] degli angoli interni di un triangolo è uguale a 180° e l'ampiezza di qualsiasi angolo è uguale alla differenza fra 180° e le ampiezze degli altri due) ed uguale a β (perché angoli alla base di un triangolo isoscele)

Ampiezza angolo $ADQ = 180^\circ - (\alpha + \beta)$ (poiché la somma [delle ampiezze] degli angoli interni di un triangolo è uguale a 180° e l'ampiezza di qualsiasi angolo è uguale alla differenza fra 180° e le ampiezze degli altri due) \Rightarrow ampiezza angolo $ADQ =$ ampiezza angolo PDC (perché uguali a $180^\circ - (\alpha + \beta)$, ovvero β)

{ Ampiezza angolo $AQD = \beta$ (per dimostrazione), ampiezza angolo $ADQ = \beta$ (per dimostrazione) }
 \Rightarrow triangolo ADQ isoscele $\Rightarrow AD \cong AQ$ (per definizione di triangolo isoscele)

c.v.d.

Raffaele Sessa, Classe 2BA

Liceo Scientifico "Archimede", sez. associata Aci Bonaccorsi (CT)

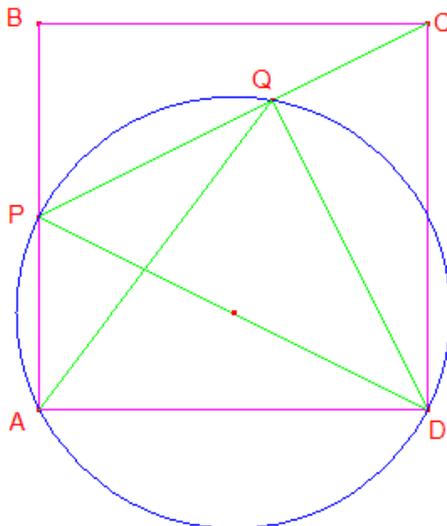
a)

[[...]]

b)

[[...]]

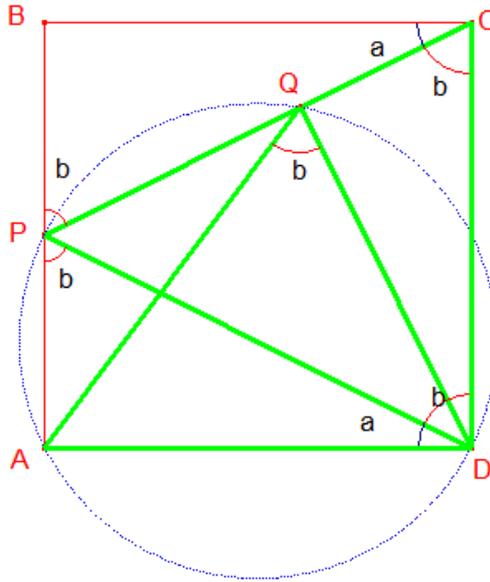
Classe 2H, Liceo Scientifico "Aristosseno", Taranto (TA)



a)

Effettuata la costruzione della figura, osserviamo che il quadrilatero $APQD$ è inscrittibile in una circonferenza in quanto ha gli angoli opposti supplementari .

Infatti i due angoli opposti PAD e PQD sono retti e quindi supplementari; ne segue che anche gli altri due angoli APQ e ADQ sono supplementari, in quanto la somma [delle ampiezze] degli angoli interni di un quadrilatero è pari a 360° . Il diametro della circonferenza circoscritta al quadrilatero è la diagonale PD del quadrilatero, in quanto i due suddetti angoli retti sono iscritti ciascuno in una semicirconferenza, ed il suo centro è ovviamente il punto medio di PD .



b)

Osserviamo anzitutto che, essendo P il punto medio del lato AB del quadrato, i triangoli rettangoli PAD e PBC sono congruenti, avendo congruenti i due cateti. Indichiamo con a e b [le ampiezze degli] gli angoli acuti (complementari) di questi due triangoli e notiamo che [per le ampiezze degli] gli angoli [risulta]:

[ampiezza] AQD = [ampiezza] APD = b e [ampiezza] ADP = [ampiezza] PQA = a

in quanto sono angoli alla circonferenza che insistono i primi sull'arco AD e i secondi sull'arco AP. Dalla congruenza delle ipotenuse dei triangoli rettangoli PAD e PBC segue inoltre che il triangolo CPD è isoscele sulla base DC. Poiché l'angolo PCD è complementare [di PCB] di [ampiezza] a, esso [[è congruente]] [ha ampiezza pari] a b ([ampiezza] PCD = b) ed essendo il triangolo CPD isoscele anche [ampiezza] PDC = b. Ma allora [ampiezza] AQD = [ampiezza] PDC = b e ciò implica che il triangolo AQD è isoscele sulla base DQ, ovvero $AQ = AD$ [$\overline{AQ} = \overline{AD}$]. [Questa affermazione andrebbe giustificata meglio].

*Maria Federica Catania, Simona Mongelli, Classe 2A
Istituto Comprensivo "G. Deledda", Ginosa (TA)*

a)

[[...]]

b)

[[...]]

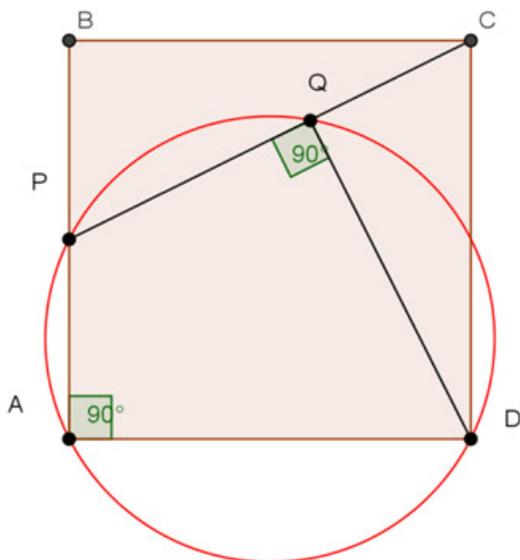
Classe 3A, Istituto Comprensivo "G. Deledda", Ginosa (TA)

a)

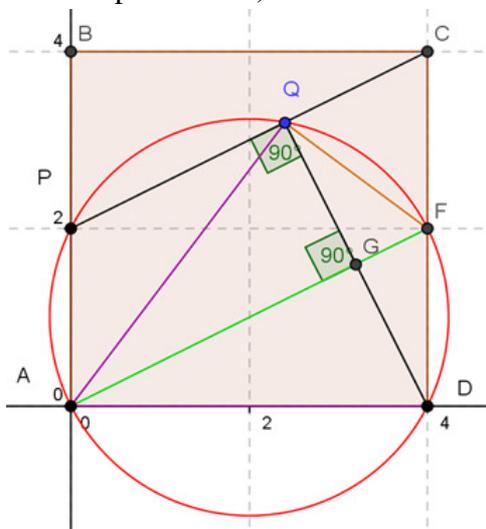
[[...]]

b)

[[...]]



a)
 Il quadrilatero APQD risulta inscritibile in una circonferenza in quanto la somma [delle ampiezze] degli angoli interni opposti risulta di [pari a] 180° ; infatti [ampiezza] $\widehat{PQD} + [ampiezza] \widehat{PAD} = 180^\circ$ e [ampiezza] $\widehat{APQ} + [ampiezza] \widehat{ADQ} = 180^\circ$ (Ricordiamo che la somma [delle ampiezze] degli angoli interni di un quadrilatero è pari a 360°).



b)
 Tracciamo il segmento \overline{AF} [AF] parallelo al segmento \overline{PC} [PC]. [F sta sul quadrato? AF è un diametro?]
 Poiché l'angolo alla circonferenza \widehat{ADF} misura 90° (angolo interno del quadrato) è un angolo che insiste sulla semicirconferenza il cui diametro corrisponde al segmento \overline{AF} [AF]. Di conseguenza anche l'angolo \widehat{AQF} , che sottende la stessa corda \overline{AF} [AF], misura 90° .

Essendo $\overline{AF} \parallel \overline{PC}$ [$AF \parallel PC$], poiché $\overline{DQ} \perp \overline{PC}$ [$DQ \perp PC$] ne consegue che $\overline{DQ} \perp \overline{AF}$

[$DQ \perp AF$]. L'angolo $\widehat{A\hat{G}Q}$ misura 90° e il [la retta sostegno del] segmento \overline{AF} [AF] rappresenta l'asse della corda \overline{DQ} [DQ] [perché?] per cui $\overline{DG} = \overline{GQ}$.

I triangoli ADG e AGQ sono congruenti per il II principio [criterio] di congruenza dei triangoli: hanno infatti il cateto \overline{AG} [AG] in comune, il cateto \overline{GQ} [GQ] congruente al cateto \overline{GD} [GD] e l'angolo tra essi compreso congruente, cioè [ampiezza] $\widehat{A\hat{G}Q} =$ [ampiezza] $\widehat{A\hat{G}D} = 90^\circ$.

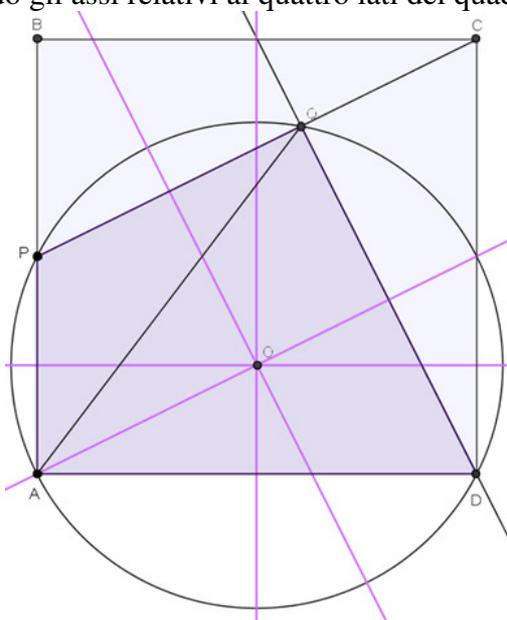
Si può pertanto concludere che $\overline{AQ} = \overline{AD}$.

Classe 3C, Istituto Comprensivo "G. Deledda", Ginosa (TA)

a)

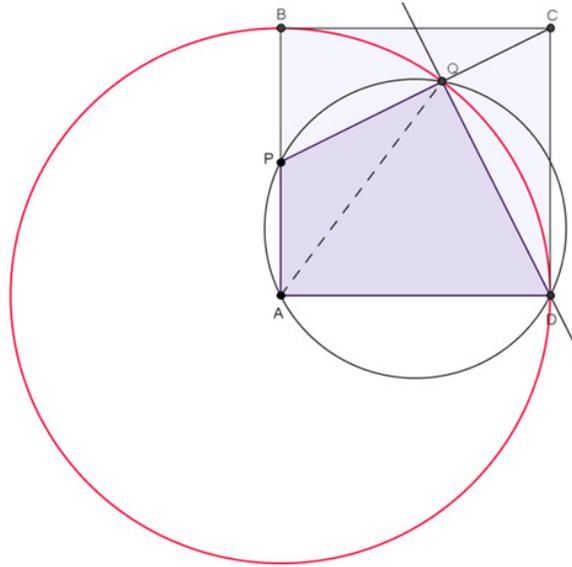
Consideriamo il quadrilatero $APQD$, di cui sappiamo che $\overline{AP} = \overline{PB}$ e [ampiezza] $\widehat{P\hat{Q}D} = 90^\circ$ per costruzione. Possiamo subito osservare che il quadrilatero $APQD$ ha due angoli opposti supplementari, infatti le ampiezze degli angoli [[$\widehat{P\hat{A}D} = \widehat{P\hat{Q}D} = 90^\circ$]] [$\widehat{P\hat{A}D}$ e $\widehat{P\hat{Q}D}$ sono pari a 90°], allora anche gli altri due angoli opposti $\widehat{A\hat{P}Q}$ e $\widehat{Q\hat{D}A}$ saranno supplementari, perché la somma [delle ampiezze] degli angoli interni di un quadrilatero è sempre 360° .

Pertanto il quadrilatero $APQD$ sarà inscrittibile in una circonferenza, il cui centro O sarà il circocentro, ottenuto tracciando gli assi relativi ai quattro lati del quadrilatero $APQD$.



b)

Abbiamo pensato di utilizzare il compasso per verificare che $\overline{AQ} = \overline{AD}$. Il compasso lo abbiamo puntato sul punto A e abbiamo tracciato una circonferenza di raggio \overline{AD} . Abbiamo notato che il punto Q è appartenente alla circonferenza, quindi $\overline{AQ} = \overline{AD}$.



Dobbiamo ora dimostrare quanto detto sopra.

Se $\overline{AQ} = \overline{AD}$, allora il triangolo AQD è un triangolo isoscele e quindi le ampiezze degli angoli alla base dovranno essere congruenti [uguali]: $\widehat{AQD} = \widehat{QDA}$ [ampiezza \widehat{AQD} = ampiezza \widehat{QDA}].

Se $\widehat{AQD} = \widehat{QDA}$ [intesa come uguaglianza delle ampiezze], allora $\widehat{PQA} = \widehat{QDC}$ [intesa come uguaglianza delle ampiezze] (perché $\widehat{AQD} + \widehat{PQA} = \widehat{QDA} + \widehat{QDC} = 90^\circ$ [intesa come somma e uguaglianza delle ampiezze]).

Per dimostrare questo abbiamo tracciato una retta parallela a AD e passante per il punto P, abbiamo chiamato F il punto di intersezione tra la retta r e l'asse relativo al segmento PQ e il M il punto di intersezione tra la retta r e il segmento CD. [QF passa per A?]

Notiamo che il triangolo PQF è un triangolo isoscele, infatti $\overline{PF} = \overline{FQ}$ perché ogni punto dell'asse è equidistante dagli estremi del segmento PQ. Possiamo pertanto affermare che le ampiezze degli angoli \widehat{QPF} e \widehat{FPQ} sono congruenti [uguali], perché angoli alla base di un triangolo isoscele.

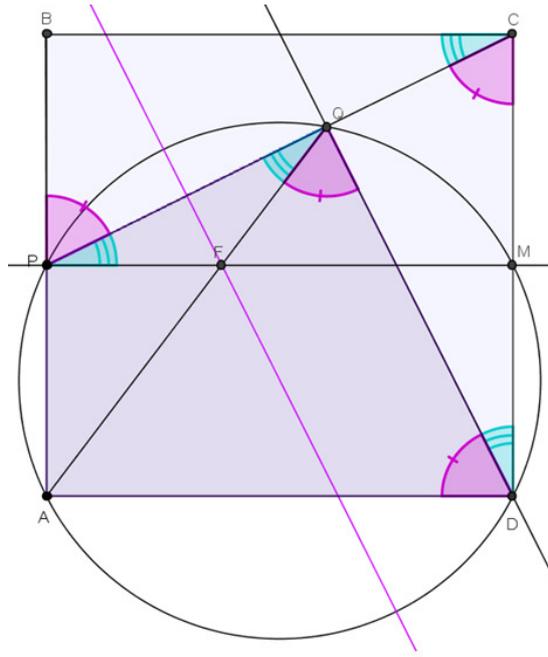
Inoltre $\widehat{CPM} = \widehat{BCP}$ e $\widehat{BPC} = \widehat{PCM}$ [intese come uguaglianze delle ampiezze] perché alterni interni rispetto ai segmenti [BC//PM e BP//CM [alle rette sostegno dei segmenti BP e CM] tagliati [tagliate] dalla trasversale PC.

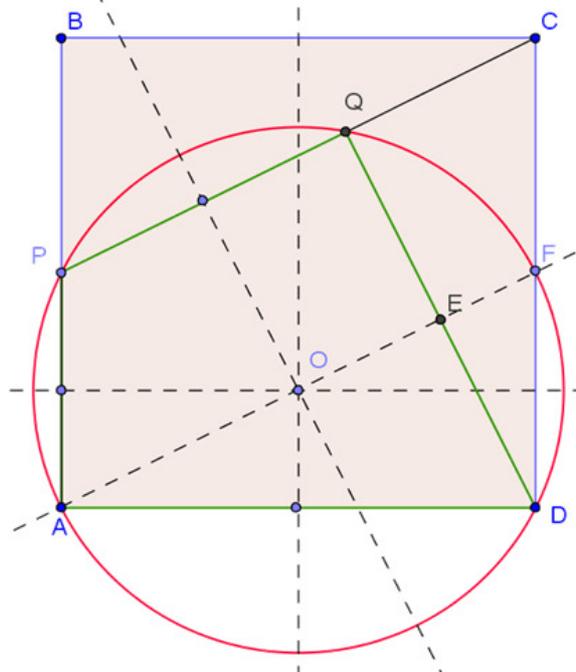
Consideriamo i triangoli rettangoli PCM e DQC, retti rispettivamente in M e in Q; questi due triangoli hanno in comune l'angolo \widehat{PCD} e di conseguenza le ampiezze $\widehat{CPM} = \widehat{QDC}$ [degli angoli \widehat{CPM} e \widehat{QDC} sono uguali].

Possiamo concludere che:

$\widehat{PQA} = \widehat{QDC}$, quindi $\widehat{AQD} = \widehat{QDA}$ [intese come uguaglianze delle ampiezze]

pertanto $\overline{AQ} = \overline{AD}$. c.v.d.





a)

Per dimostrare questo punto abbiamo effettuato osservazioni sulle ampiezze degli angoli del quadrilatero APQD.

Abbiamo constatato che l'angolo [gli angoli] $\hat{P}AD$ e $\hat{D}QP$ sono entrambi retti, perché il primo corrisponde ad un angolo al vertice del quadrato ABCD (dato dal problema) e il secondo è stato ottenuto tracciando la perpendicolare a PC (dato del problema).

Sulla base di queste informazioni risulta che se gli angoli opposti (nel vertice A e nel vertice Q) sono supplementari (cioè la somma [delle ampiezze] è pari a 180°), allora anche gli altri due angoli opposti (nel vertice D e nel vertice P) saranno supplementari (pertanto [in quanto] la somma [delle ampiezze] degli angoli interni di un quadrilatero risulterà [risulta] pari a 360°). Quando ciò si verifica un quadrilatero si può inscrivere in una circonferenza.

Pertanto, la particolarità che abbiamo osservato per il quadrilatero di vertici A, P, Q, D, è che risulta inscrivibile in una circonferenza.

Successivamente, per confermare [verificare] le nostre osservazioni [e deduzioni], abbiamo costruito la circonferenza circoscritta al quadrilatero APQD, ottenuta individuando il centro O della circonferenza, tracciando gli assi dei lati del quadrilatero (che si incontrano nel circocentro del poligono che coincide con il centro della circonferenza).

b)

[[...]]