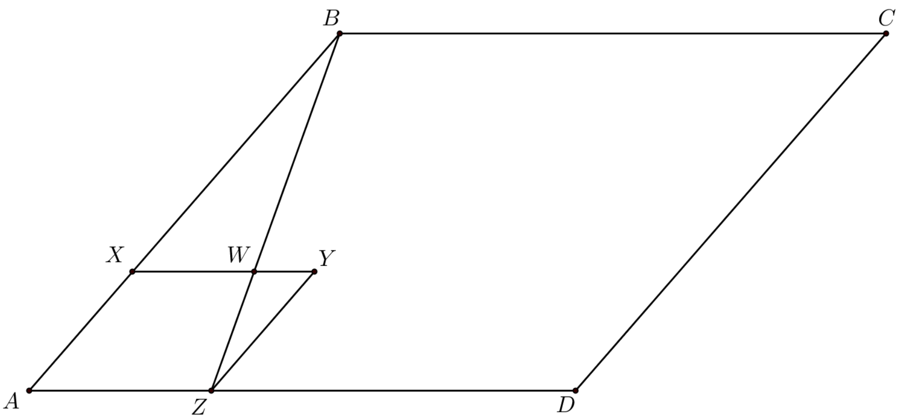
FLATlandia

***"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo"* [*(Edwin A. Abbott)*]**

Flatlandia 9-23 Gennaio 2013 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

Il parallelogramma $AXYZ$ è simile al parallelogramma $ABCD$ (vedi figura). Il segmento BZ interseca il segmento XY nel punto W in modo tale che risulti $\overline{XW} : \overline{WY} = 2:1$.



a) Quanto vale il rapporto tra l'area di $AXYZ$ e quella di $ABCD$?
b) Individuare una possibile costruzione del parallelogramma $AXYZ$ con le proprietà richieste partendo da un qualunque parallelogramma $ABCD$.
Motivare tutte le risposte.

Commento

Sono giunte quattro risposte così suddivise: una da una classe seconda di Liceo Scientifico e tre da classi terze di Scuola Media (ossia Scuola Secondaria di I grado) tutte facenti parte dello stesso Istituto Comprensivo. Dispiace per l'esiguo numero di risposte giunte, dovuto probabilmente all'impegno richiesto dalla conclusione del I quadrimestre.
Il problema poneva due quesiti relativi a una stessa figura costituita da un parallelogramma contenente al suo interno un secondo parallelogramma simile al primo. Quest'ultimo parallelogramma era attraversato da un segmento congiungente un vertice del parallelogrammo maggiore con un vertice del parallelogramma minore e il relativo punto di intersezione divideva un lato del parallelogramma interno in due segmenti le cui lunghezze stavano tra loro in un dato rapporto. Nel primo quesito si chiedeva di determinare il valore del rapporto tra le aree dei due parallelogrammi; nel secondo di individuare una possibile costruzione del parallelogramma interno partendo da un qualsiasi parallelogramma.
Tutti rispondono in modo sostanzialmente corretto ai due quesiti, anche se alcuni confondono la costruzione geometrica teorica con l'effettuazione pratica del disegno delle figure e di alcune affermazioni mancano le opportune motivazioni. Inoltre in molte risposte permane la confusione tra una grandezza geometrica e la sua misura.

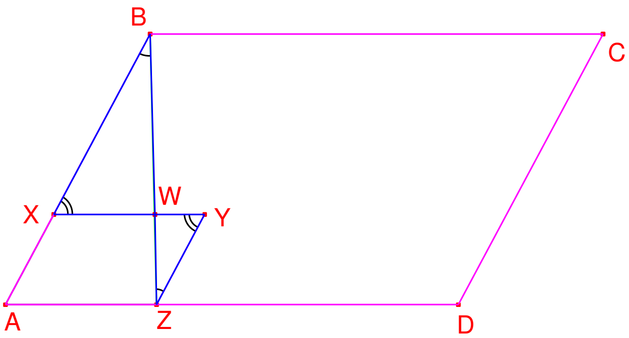
Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:
LS "Aristosseno", Taranto
Ististuto Comprensivo "G. Deledda", Ginosa (TA)

NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Gruppo di lavoro che gestisce FLAT*landia*:

- Ercole CASTAGNOLA - NRD Università di Napoli “Federico II”
- Giuliano MAZZANTI - Docente di Geometria, Università di Ferrara
- Valter ROSELLI - Ricercatore, Dipartimento di Matematica, Università di Ferrara
- Luigi TOMASI - Insegnante di Matematica, Liceo Scientifico Galilei, Adria (RO).

Classe 2H, Liceo Scientifico "Aristosseno", Taranto (TA)

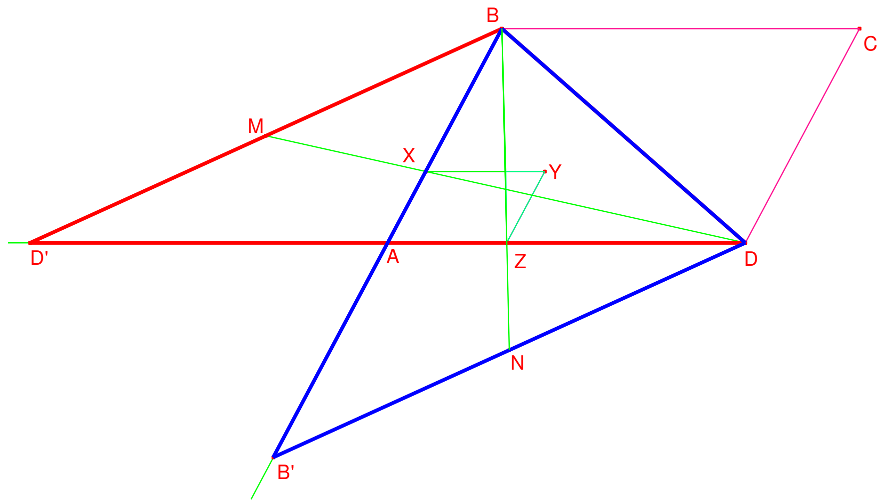


a)

Dalla figura notiamo che i triangoli BWX e ZWY sono simili per il I criterio di similitudine poiché hanno gli angoli BXW e ZYW di uguale ampiezza (sono alterni interni delle rette parallele [sostegno] di AB e di ZY tagliate dalla trasversale XY) e gli angoli ABW e WZY anch'essi di uguale ampiezza (sono alterni interni delle stesse rette [sostegno] di AB e ZY tagliate dalla trasversale BZ).

Si ha perciò la proporzione: BX : ZY [$\overline{BX} : \overline{ZY}$] = XW : WY [$\overline{XW} : \overline{WY}$] = 2 : 1, ed essendo ZY congruente ad AX perché lati opposti del parallelogramma AXYZ, risulta BX = 2ZY = 2AX [$\overline{BX} = 2\overline{ZY} = 2\overline{AX}$] e di conseguenza AB = 3AX [$\overline{AB} = 3\overline{AX}$].

Il rapporto di similitudine fra i due parallelogrammi simili ABCD e AXYZ è perciò uguale a 3 ed il rapporto tra le loro aree è quindi pari a 9. Dunque il rapporto tra l'area di AXYZ e quella di ABCD è pari ad 1/9.



b)

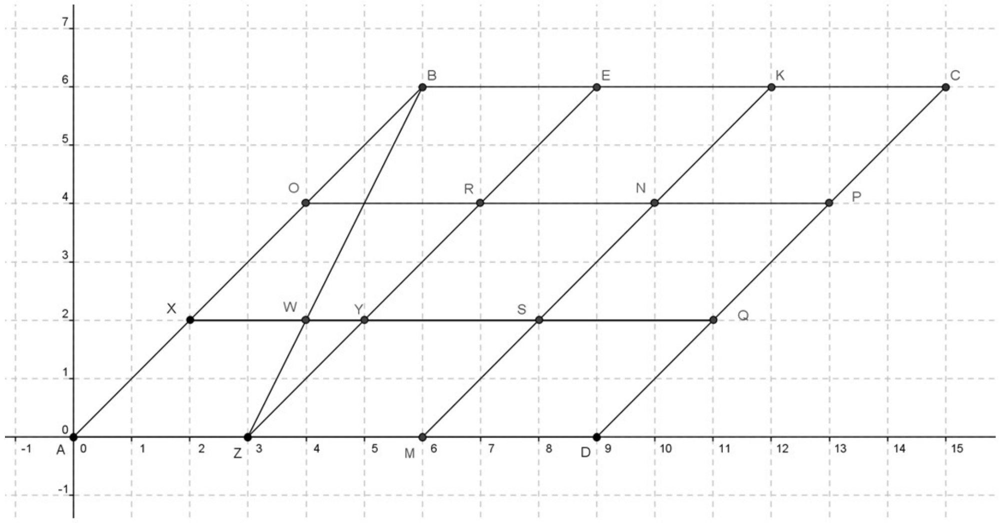
Una possibile costruzione del parallelogramma AXYZ a partire da ABCD, può scaturire dalla proprietà delle mediane di un triangolo; queste, incontrandosi nel baricentro del triangolo, si dividono [vengono suddivise] infatti in due parti di cui quella contenente il vertice è il doppio [ha lunghezza doppia] dell'altra.

Prolunghiamo allora il lato AD del parallelogramma ABCD ,dalla parte di A, di un segmento AD' congruente ad AD e congiungiamo D' con il vertice B. In tal modo il segmento BA nel triangolo D'BD è la mediana relativa alla base D'D.

Tracciamo poi la mediana DM, relativa al lato D'B e otterremo il punto X, quale baricentro del triangolo D'BD. Il punto X divide perciò il lato AB del parallelogramma ABCD in due parti, BX e AX, con BX = 2AX [$\overline{BX} = 2\overline{AX}$].

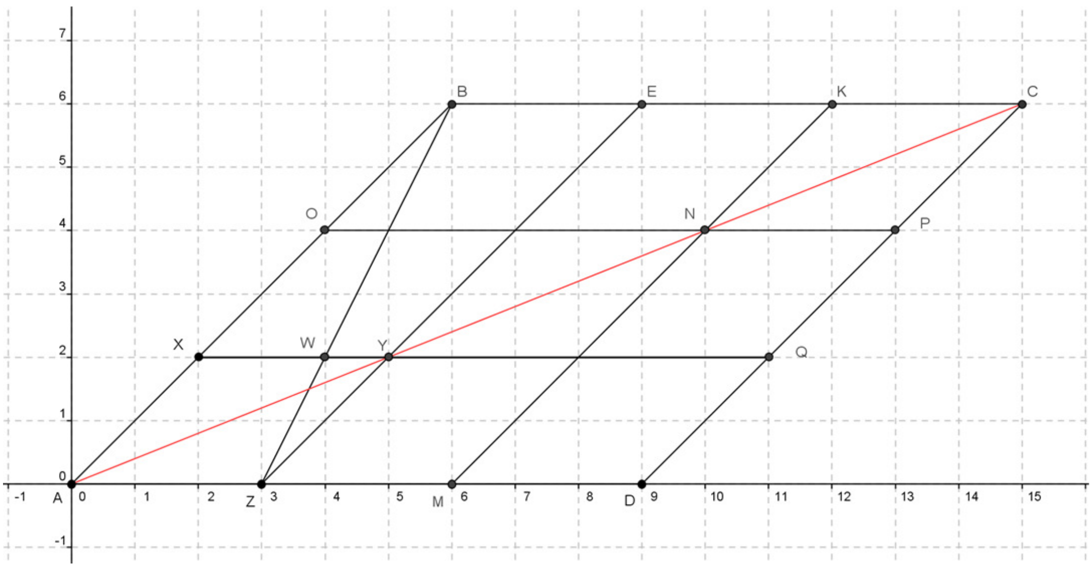
Per individuare il vertice Z del parallelogramma AXYZ procediamo in maniera analoga; prolungando il lato AB dalla parte di A del segmento AB' ad esso congruente e congiungendo B' con D. In tal modo il segmento DA è la mediana relativa alla base BB' nel triangolo BDB'.
Il punto Z, baricentro di quest'altro triangolo, si ottiene tracciando la mediana BN dello stesso triangolo. A partire infine dai due lati consecutivi AX e AZ del parallelogramma AXYZ, conduciamo da X la parallela ad AZ e da Z la parallela ad AX, ottenendo il quarto vertice Y e quindi il parallelogramma richiesto [bisogna provare quanto affermato].

Classe 3B, Istituto Comprensivo "G. Deledda", Ginosa (TA)



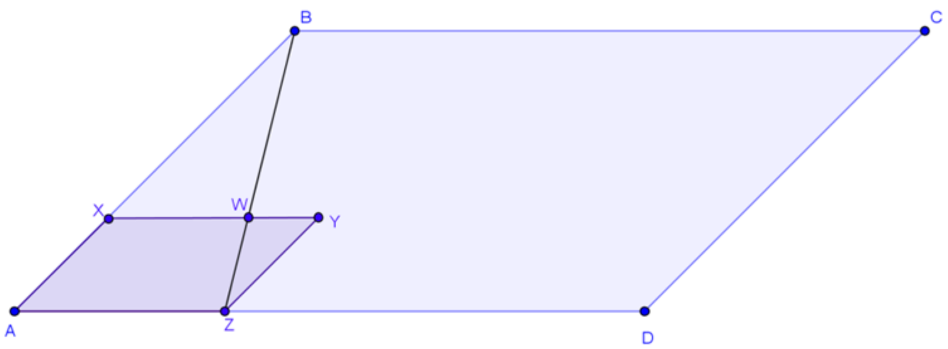
a)
Consideriamo le seguenti tre rette parallele tra loro: la prima retta passante per i punti A e Z, la seconda passante per i punti X, W e Y, la terza passante per il punto B.
I due triangoli ABZ e XBW si possono considerare come triangoli ottenuti da rette parallele tagliate da due rette trasversali: una passante per AB e l'altra passante per ZB, e quindi, per il Teorema di Talete, i loro lati sono proporzionali.
Per il terzo criterio di similitudine, i triangoli ABZ e XBW sono simili e il rapporto di similitudine tra i due triangoli è dato da XW/AZ [$\overline{XW} / \overline{AZ}$] = 2/3; BX/AB [$\overline{BX} / \overline{AB}$] = 2/3; BW/BZ [$\overline{BW} / \overline{BZ}$] = 2/3 [perché?]. Possiamo pertanto affermare che AX = 1/3 AB [$\overline{AX} = 1/3\,\overline{AB}$] [perché?] e, di conseguenza, poiché il testo del quesito afferma che AXYZ e ABCD sono simili, anche AZ = 1/3 AD [$\overline{AZ} = 1/3\,\overline{AD}$]. Pertanto il rapporto di similitudine tra i [i lati dei] parallelogrammi AXYZ e ABCD è pari a 1/3.
Inoltre, poiché in due poligoni simili il rapporto fra le aree è uguale al quadrato del rapporto di similitudine, risulta che il rapporto tra l'area del parallelogramma AXYZ e quella del parallelogramma ABCD è pari a $(1/3)^2$ cioè 1/9.

b)
Per costruire i due parallelogrammi in modo da rispettare le proprietà richieste, si può partire da un qualsiasi parallelogramma ABCD e tracciare la sua diagonale AC. Poiché anche le diagonali AY e AC, appartenenti a figure simili con rapporto di similitudine pari a 1/3 (parallelogrammi AZYX e ABCD), devono necessariamente rispettare il rapporto 1/3, individuiamo sulla diagonale AC il segmento AY tale che AY= 1/3 AC [$\overline{AY} = 1/3\,\overline{AC}$].



Possiamo procedere utilizzando come segmento di riferimento il lato AD del parallelogramma ABCD: il lato AD, in generale, ha come vertici gli estremi di coordinate A(0;0) e D(X_D; 0) [dopo aver introdotto un opportuno riferimento cartesiano]; individuiamo il punto Z (1/3X_D; 0) [come?] e tracciamo la retta parallela al lato AB e passante per il punto Z che intersecherà la diagonale AC nel punto Y tale che AY = 1/3 AC [$\overline{AY} = 1/3\,\overline{AC}$]. Tracciando poi la retta parallela al lato AD passante per Y, otteniamo il parallelogramma AXYZ e, tracciando il segmento BZ, verifichiamo che XW:WY = 2:1 [come?].

Classe 3C, Istituto Comprensivo "G. Deledda", Ginosa (TA)



a)

Consideriamo i triangoli XBW e WYZ. I due triangoli hanno gli angoli ordinatamente congruenti. Infatti l'ampiezza dell'angolo $X\widehat{W}B$ è uguale all'ampiezza dell'angolo $Z\widehat{W}Y$ perché opposti al vertice, l'ampiezza degli angoli $W\hat{Z}Y$ e $X\hat{B}W$ è uguale, perché angoli alterni interni rispetto alle rette sostegno dei segmenti paralleli AB e ZY tagliati dalla retta sostegno trasversale del segmento BZ, di conseguenza l'ampiezza degli angoli $W\hat{Y}Z$ e $B\hat{X}W$ sarà uguale. I due triangoli sono simili (per 1° criterio di similitudine), pertanto avranno i lati in proporzione.

Per ipotesi i lati XW e WY dei triangoli considerati sono in un rapporto di proporzionalità di 2:1, allora anche gli altri lati saranno in proporzione:

$$\overline{XW} : \overline{WY} = 2:1$$

$$\overline{BW} : \overline{WZ} = 2:1$$

$\overline{XB} : \overline{YZ} = 2:1$

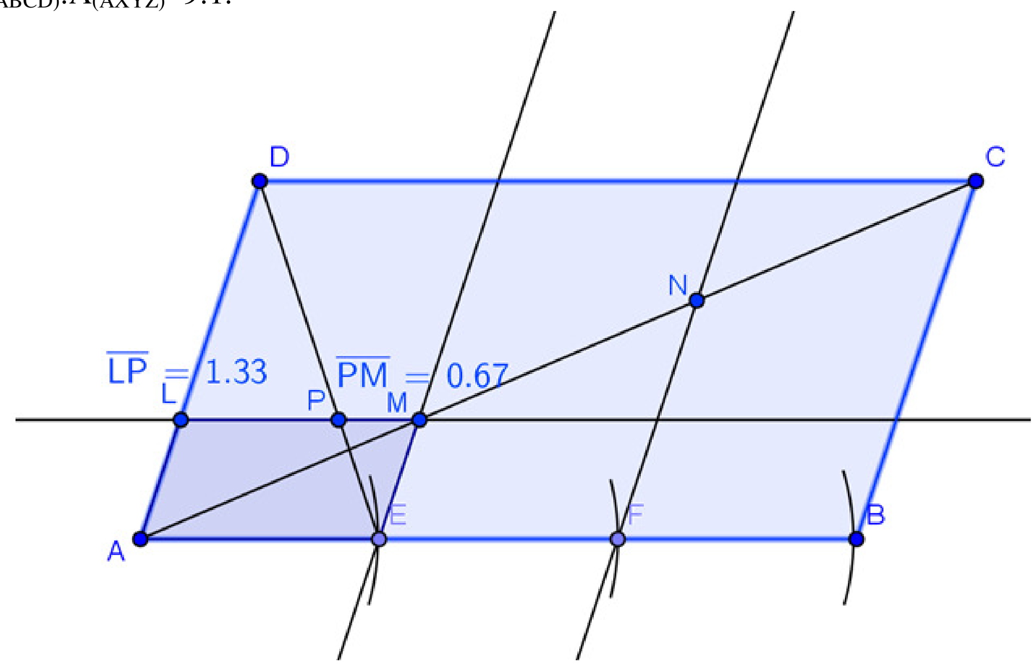
Dato che $\overline{YZ} = \overline{XA} = \frac{\overline{XB}}{2}$ *allora* $\overline{AB} = 3\overline{XA}$

da cui $\overline{AB} : \overline{AX} = 3:1$

I parallelogrammi ABCD e AXYZ sono simili per [[costruzione]] [ipotesi] e il loro rapporto di proporzionalità è [[rispettivamente]] 3:1.

Visto che le aree di due poligoni simili sono proporzionali ai quadrati di due lati corrispondenti, allora possiamo scrivere: $A_{(ABCD)}:A_{(AXYZ)}=3^2:1$

da cui $A_{(ABCD)}:A_{(AXYZ)}=9:1$.



La proporzione $\overline{XW} : \overline{WY} = 2:1$, come da dimostrazione precedente, determina un rapporto di proporzionalità di 1 a 3 tra i lati del parallelogramma AZYX e i lati del parallelogramma ABCD simili tra loro.

Utilizzando [questo fatto] [[questa costruzione]] disegniamo un qualsiasi parallelogramma (ABCD). Tracciamo una diagonale dal punto A al punto C in modo da suddividere il parallelogrammo in due triangoli congruenti: ABC e ACD.

Con le modalità note di tecnica, utilizzando compasso e squadrette [esistono ben note costruzioni geometriche per suddividere un segmento in parti congruenti], suddividiamo il segmento AC in tre parti congruenti utilizzando come segmento di riferimento la base AB del parallelogramma ABCD. Dividiamo la base AB del parallelogramma in tre parti uguali tracciando le intersezioni con il compasso. A questo punto, con l'uso delle squadrette, ci spostiamo sui punti di intersezione che abbiamo chiamato E e F, inviamo [tracciamo] rette parallele al lato obliquo BC che incroceranno [intersecheranno] la diagonale AC rispettivamente nei punti M e N.

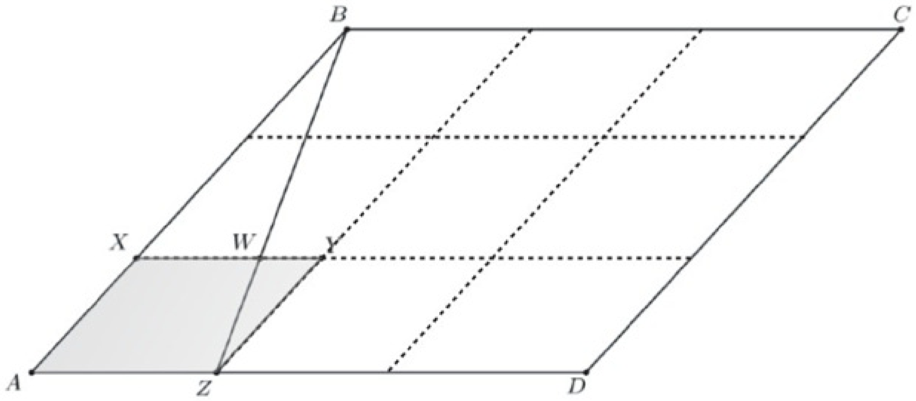
Avremo così diviso il segmento AC in tre parti uguali [congruenti], possiamo [potremo] quindi scrivere che $\overline{AC} : \overline{AM} = 3:1$

Soffermiamoci sul punto di intersezione M e tracciamo una [la] retta parallela a AB [passante per M] che incontrerà il lato AD nel punto L. Otteniamo un parallelogramma AEML, simile ad ABCD [perché?].

Tracciando [il] [[un]] segmento congiungente i vertici D ed E, tale segmento incontra il segmento LM nel punto P.

Abbiamo misurato con la squadra i due segmenti e abbiamo confermato il rapporto di proporzionalità da idividure [individuare], LP : PM = 2:1.

Classe 3D, Istituto Comprensivo "G. Deledda", Ginosa (TA)



a)

Per dimostrare questo punto [Per rispondere a questo quesito] siamo partiti dall'osservazione dei triangoli XWB e YWZ.

Abbiamo constatato che anch'essi sono simili perché hanno le ampiezze di due angoli del primo triangolo congruenti a due [angoli corrispondenti] del secondo triangolo. In particolare gli angoli $X\hat{W}B$ e $Y\hat{W}Z$ sono congruenti perché opposti al vertice, mentre gli angoli $A\hat{B}Z$ e $B\hat{Z}Y$ sono congruenti perché alterni interni (formati dalle parallele AB e ZY tagliate dalla trasversale BZ). Poiché [le lunghezze dei] i lati omologhi [corrispondenti] XW e WY dei triangoli considerati sono in proporzione come 2 : 1 (dato del problema) e i due triangoli sono anche simili, allora anche gli altri lati omologhi [corrispondenti] saranno in proporzione in modo che:

XW : WY [$\overline{XW} : \overline{WY}$] = 2 : 1

XB : YZ [$\overline{XB} : \overline{YZ}$] = 2 : 1

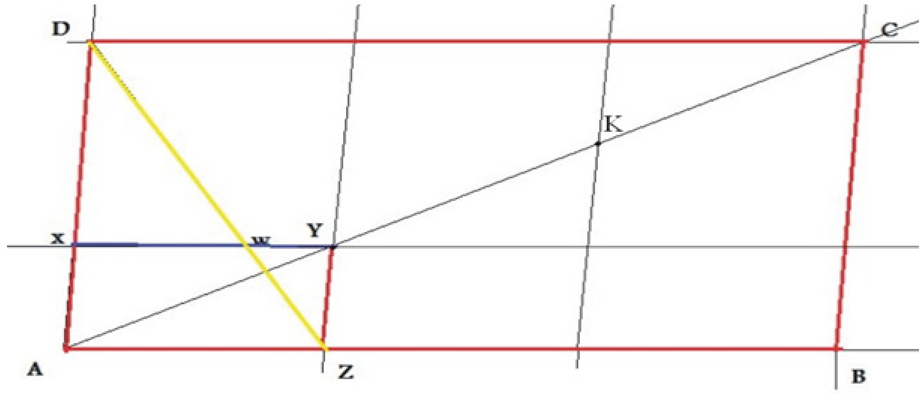
BW : WZ $\overline{BW} : \overline{WZ}$] = 2 : 1

A questo punto è stato possibile osservare che, poiché i due parallelogrammi sono simili (dato del problema), allora, in base alle proporzioni precedenti, si avrà che XB : AX [$\overline{XB} : \overline{AX}$] = 2 : 1. Pertanto, considerando due lati dei parallelogrammi AXYZ e ABCD si avrà che

AB : AX [$\overline{AB} : \overline{AX}$] = 3 : 1 e quindi AX = 1/3 AB [$\overline{AX} = 1/3\,\overline{AB}$].

Poiché il rapporto tra le aree di due poligoni simili è pari al rapporto tra i quadrati dei lati, si avrà che:

$\frac{A_{AXYZ}}{A_{ABCD}} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$. Quindi il rapporto tra le aree $\frac{A_{AXYZ}}{A_{ABCD}} = \frac{1}{9}$



b)

Siamo partiti dalla costruzione di un qualsiasi parallelogramma ABCD. Abbiamo tracciato la diagonale AC, che suddivide il parallelogramma in due triangoli congruenti. Facendo riferimento alle modalità note di Tecnica [a note costruzioni geometriche per suddividere un segmento in parti uguali], con [riga] [[righe]] e compasso, abbiamo suddiviso la diagonale AC in tre parti congruenti (AY, YK e KC, tali che AC : AY [$\overline{AC}:\overline{AY}$] = 3:1; AC : YK [$\overline{AC}:\overline{YK}$] = 3:1; AC : KC [$\overline{AC}:\overline{KC}$] = 3:1) e, successivamente, tracciato le parallele ai lati AB e AD del parallelogramma, passanti per il punto Y. Indicando con Z l'intersezione con il lato AB, e X l'intersezione con il lato AD, è stato individuato il parallelogramma AXYZ. Tracciando il segmento DZ, si è individuato il punto W sul segmento XY, tale che XW : WY [$\overline{XW}:\overline{WY}$] = 2 : 1. Pertanto, la costruzione realizzata rispetta le proprietà richieste dal quesito.