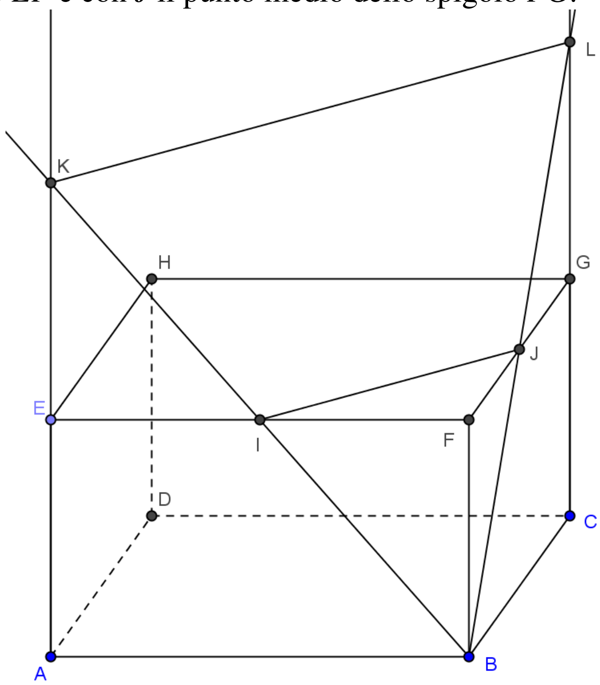
FLAT*landia*

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" (Edwin A. Abbott)

Flatlandia 8 - 22 Aprile 2015 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

Si consideri il parallelepipedo rettangolo *ABCDEFGH* rappresentato in figura. Indichiamo con *I* il punto medio dello spigolo *EF* e con *J* il punto medio dello spigolo *FG*.



La retta *BI* interseca la retta *AE* nel punto *K* e la retta *BJ* interseca la retta *CG* nel punto *L*.

a) Dimostrare che le rette *IJ* e *KL* sono parallele.

b) Se le dimensioni del parallelepipedo sono $\overline{BC} = \overline{BF} =$ 2 cm e $\overline{AB} =$ 4 cm, determinare la lunghezza del segmento *KL*.

Giustificare tutte le risposte.

Commento

Abbiamo ricevuto sette risposte così suddivise: cinque risposte da classi seconde di Licei Scientifici, una da una classe seconda e una da una classe terza di Scuola Secondaria di I grado, entrambe facenti parte dello stesso Istituto Comprensivo.

Il problema poneva due domande tutte riguardanti la stessa figura costituita da un parallelepido rettangolo nel quale da un vertice del rettangolo di base partivano due semirette che intersecavano due spigoli adiacenti del rettangolo parallelo al rettangolo di base nei rispettivi punti medi. Queste due semirette intersecavano, rispettivamente, altre due semirette aventi come origine altri due vertici del rettangolo di base e perpendicolari al rettangolo stesso: questi due punti di intersezione costituivano gli estremi di un nuovo segmento. Nel primo quesito si chiedeva di dimostrare il parallelismo tra il nuovo segmento costruito e il segmento congiungente i punti medi dei due spigoli del parallelepipedo; nel secondo si chiedeva di determinare la lunghezza del nuovo segmento nel caso di date dimensioni del parallelepipedo.

Nella maggioranza delle risposte pervenute (in particolare da parte degli studenti dei Licei) il problema viene risolto in ogni sua parte in modo sufficientemente corretto (salvo alcune imprecisioni nelle dimostrazioni). Raccomandiamo di evitare l'uso dei dati forniti nel secondo quesito per la risoluzione del primo e anche l'utilizzo di simboli poco usuali nella risoluzione di un quesito. Inoltre non è stato possibile prendere in esame una risoluzione inviata scritta a mano e in formato pdf: questo rende impossibile trasferire la soluzione degli studenti nella correzione finale messa in rete.

Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:
LS Statale "C. Cafiero", Barletta (BT)
LS "Aristotele", Roma (RM)
LS "Aristosseno", Taranto (TA)
LS "U. Dini", Pisa (PI)
Ist. Comprensivo "G. Deledda - S.G.Bosco", Ginosa (TA)

NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni

Daniele Pignatari, Classe 2B
Liceo Scientifico Statale "C. Cafiero", Barletta (BT)

a)
Considero [i triangoli] ABK e EIK [[triangoli]]:

- Hanno l'angolo [[in]] [di vertice] K in comune
- [gli angoli] KEI ≅ KAB [[angoli]] perché retti

[Segue] per il primo criterio di similitudine [che i triangoli] ABK e EIK [sono simili] [[triangoli]]

EI ≅ 1/2 EF ([per la] definizione di punto medio) e EF ≅ AB([perché spigoli paralleli] [[basi]] di un parallelepipedo)
[Segue] per la proprietà transitiva EI ≅ 1/2 AB
[EI/AB] $\frac{\overline{EI}}{\overline{AB}}$ = 1/2 (per dimostrazione precedente) e [i triangoli] ABK e EIK [sono simili] [[triangoli]] (per dimostrazione precedente)
[Segue] per definizione di similitudine [[KI/KB]] $\frac{\overline{KI}}{\overline{KB}}$ = 1/2
[Segue] per la proprietà transitiva KI≅ IB
[Segue] per definizione di punto medio I punto medio di KB
Analogamente LJ ≅ JB [quindi] J punto medio di LB per definizione di punto medio
Considero [il triangolo] KBL [[triangolo]] e I,J punti medi KL // IJ e IJ ≅ 1/2 KL per il teorema dei punti medi

b)
[[IF = AB/2]] [$\overline{IF} = \overline{AB}/2$] = 4cm/2 = 2cm
[[FJ = BC/2]] [$\overline{FJ} = \overline{BC}/2$] = 2cm/2= 1cm
[[IJ = √IF^(2) + FJ^(2)]] [$\overline{IJ} = \sqrt{\overline{IF}^2 + \overline{FJ}^2}$ = $\sqrt{5}$ cm
[[KL= 2 IJ]] [$\overline{KL} = 2\overline{IJ}$] = 2√5 cm

Elisabetta Monica, Classe 2B
Liceo Scientifico Statale "C. Cafiero", Barletta (BT)

a)
Consideriamo [i triangoli] AKB [[triangolo]] e EKI [[triangolo]]
$([l'angolo]AKB\ [[angolo]]in\ comune@[KEI\ [[angolo]] \cong KAB\ [[angolo]]perché\ [entrambi\ angoli]retti)$

Ciò implica, per il primo criterio di similitudine dei triangoli, che [i triangoli] AKB [[triangolo]] e EKI [[triangolo]] [[siano]] [sono] simili.
Da ciò scaturisce che AB : EI = AK : EK
[La parte che segue è stata eliminata perché utilizza dati relativi al quesito b)]
Analogamente alla dimostrazione della similitudine [[di]] [dei triangoli] AKB [[triangolo]] e EKI [[triangolo]], si dimostra che [i triangoli] BCL [[triangolo]] e GJL [[triangolo]] sono simili.
Da ciò scaturisce che BC : GJ = CL : GL
[…]
Si può osservare che i punti J e I risultano essere i punti medi dei rispettivi lati LB e KB del triangolo BKL.
Per il teorema dei punti medi risulta pertanto che IJ e KL sono parallele.

b)
Il teorema dei punti medi [[recita]] [afferma] anche che il segmento congiungente i punti medi di due lati di un triangolo, oltre ad essere parallelo al terzo lato, è anche congruente alla sua metà.

Da ciò risulta che : IJ ≅ ½ KL

Ciò implica che KL ≅ 2 IJ

Per il teorema di [[Talete]] [Pitagora], risulta che [[IJ = $\sqrt{JF+FI}$]] [$\overline{IJ} = \sqrt{\overline{JF}^2 + \overline{FI}^2}$] = $\sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 cm^2 + \left(\frac{4}{2}\right)^2 cm^2}$ = $\sqrt{1^2 cm^2 + 2^2 cm^2}$ = $\sqrt{1\ cm^2 + 4\ cm^2}$ = $\sqrt{5\ cm^2}$ = $\sqrt{5}$ cm

Risulta quindi che [[KL ≅]] [$\overline{KL} =$] $2\sqrt{5}$ cm.

Classe 2B
Liceo Scientifico "Aristosseno", Taranto (TA)

a)
Osserviamo che, nel piano della faccia **ABFE** del parallelepipedo, i triangoli rettangoli **KEI** e **IFB** sono congruenti, essendo congruenti i cateti : $\overline{EI} \cong \overline{IF}$ [$\overline{EI} = \overline{IF}$] e gli angoli acuti $E\hat{I}K \cong F\hat{I}B$ perché opposti al vertice. Da ciò segue la congruenza delle ipotenuse : $\overline{KI} \cong \overline{IB}$ [$\overline{KI} = \overline{IB}$].

Analogamente, nel piano della faccia **BCGF** del parallelepipedo, sono congruenti i triangoli rettangoli **BFJ** e **LGJ** essendo congruenti i cateti : $\overline{FJ} \cong \overline{GJ}$ [$\overline{FJ} = \overline{GJ}$] e gli angoli $B\hat{J}F \cong L\hat{J}G$,opposti al vertice. Sarà quindi $\overline{BJ} \cong \overline{JL}$ [$\overline{BJ} = \overline{JL}$], in quanto ipotenuse di questi due triangoli..
Consideriamo infine il piano del triangolo **KBL** ; in questo triangolo il segmento IJ ,per quanto prima osservato, congiunge i punti medi dei lati BK e BL ed è perciò parallelo al segmento KL ed è anche congruente alla sua metà (teorema).

b)
Conoscendo le dimensioni del parallelepipedo $\overline{BC} = \overline{BF}$ = 2 cm e $\overline{AB}$ = 4 cm si ha che $\overline{IF} = \frac{1}{2}\overline{EF} = \frac{1}{2}\overline{AB}$ = 2 cm , mentre $\overline{FJ} = \frac{1}{2}\overline{FG} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ = 1 cm. Applicando il **teorema di Pitagora** al triangolo rettangolo **IFJ** della faccia **EFGH** del parallelepipedo determiniamo la misura del segmento $\overline{IJ} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ cm e da essa deduciamo quella di KL, che è il suo doppio: $\overline{KL} = 2\sqrt{5}$ cm.

Simmaco Di Lillo, Classe 2G
Liceo Scientifico "U. Dini", Pisa (PI)

a)
$\angle KEI = \angle IFB$ perché angoli retti
$\angle KIE = \angle FIB$ perché angoli opposti al vertice
$\overline{EI} = \overline{IF}$ per ipotesi
Per il 2° criterio (ALA) i triangoli KEI e IFB sono congruenti quindi $\overline{KI} = \overline{IB}$ e ne segue che $\overline{KB} = 2\overline{IB}$
Possiamo affermare queste cose perché i 2 triangoli appartengono allo stesso piano quello del rettangolo ABFE (Due rette r e s identificano in modo univoco un piano)
$\angle LGJ = \angle JFB$ perché angoli retti
$\angle LJG = \angle FJB$ perché angoli opposti al vertice
$\overline{FJ} = \overline{JG}$ per ipotesi
Per il 2° criterio (ALA) i triangoli LGJ e JFB sono congruenti quindi $\overline{LJ} = \overline{JB}$ e ne segue che $\overline{LB} = 2\overline{JB}$
Possiamo affermare queste cose perché i 2 triangoli appartengono allo stesso piano quello del rettangolo BCGF
Se $\frac{\overline{KB}}{\overline{IB}} = \frac{\overline{LB}}{\overline{JB}}$ le rette IJ e KL sono parallele (Teorema di Talete)
$\frac{\overline{KB}}{\overline{IB}} = \frac{2\overline{IB}}{\overline{IB}} = 2$ e $\frac{\overline{LB}}{\overline{JB}} = \frac{2\overline{JB}}{\overline{JB}} = 2$
$\frac{\overline{KB}}{\overline{IB}} = \frac{\overline{LB}}{\overline{JB}}$ quindi le rette IJ e KL sono parallele
Possiamo affermare queste cose perché i 2 triangoli appartengono allo stesso piano IJLK (due rette parallele identificano in modo univoco un piano)

b)
$\overline{AB} = \overline{EF} = 4cm \quad \overline{FB} = \overline{FG} = 2cm$

Visto che le rette IJ e KL sono parallele i triangoli IJB e KLB sono simili perciò $\frac{\overline{KB}}{\overline{IB}} = \frac{\overline{KL}}{\overline{IJ}}$

$$\overline{KL} = \frac{\overline{KB} \times \overline{IJ}}{\overline{IB}} = \frac{2\overline{IB} \times \overline{IJ}}{\overline{IB}} = 2\overline{IJ}$$

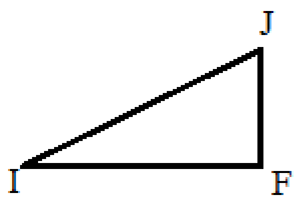
$$\overline{IJ} = \sqrt{\left(\frac{\overline{EF}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\overline{FG}}{2}\right)^2} = \sqrt{2^2 + 1^2}\,cm = \sqrt{5}\,cm$$

$$\overline{KL} = 2\overline{IJ} = 2\sqrt{5}\,cm$$

G. Barberio, G. Cazzetta, P. Di Tinco, G. Mongelli, F. Petrelli, Classe 2A
Istituto Comprensivo "G.Deledda-S.G.Bosco", Ginosa (TA)

a)
[[…]]
[Non si possono utilizzare i dati relativi al quesito b) per rispondere al quesito a)]

b)
I due triangoli BIJ e BKL sono simili per il 2° criterio di similitudine dei triangoli dal momento che hanno un angolo in comune e i lati che formano tali angoli sono in proporzione fra loro secondo il rapporto di similitudine K = 2.
Calcoliamo perciò prima la lunghezza del lato $\overline{IJ}$ [*IJ*] applicando ancora una volta il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo IFJ e poi la lunghezza del segmento $\overline{KL}$ [*KL*] moltiplicando per 2 la lunghezze di $\overline{IJ}$ [*IJ*].



$\overline{IJ} = \sqrt{IF^2 + FJ^2}$ [$\sqrt{\overline{IF}^2 + \overline{FJ}^2}$] = $\sqrt{4+1} = \sqrt{5}$
$\overline{KL} = 2 \times \overline{IJ} = 2\sqrt{5}$

Laura Mongelli, Classe 3B
Istituto Comprensivo "G.Deledda-S.G.Bosco", Ginosa (TA)

a)
[[…]]

b)
[[…]]