

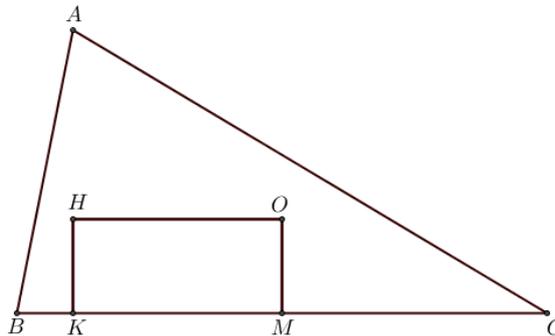
FLATlandia

"Abbi pazienza, ch  il mondo   vasto e largo" ([Edwin A. Abbott](#))

Flatlandia 12 - 26 Febbraio 2015 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

Sia dato un rettangolo $HOMK$. Si sa che H   l'ortocentro di un triangolo ABC , O   il suo circocentro, M il punto medio del lato BC e K il piede dell'altezza relativa al lato BC (vedi figura).



- A partire dal rettangolo $HOMK$, dare una possibile costruzione del triangolo ABC .
- Se i lati HO e OM di tale rettangolo misurano rispettivamente 11 cm e 5 cm, qual   la lunghezza di BC ?

Giustificare tutte le risposte.

[Suggerimento: ricordiamo che in un triangolo il baricentro G , il circocentro O e l'ortocentro H appartengono a una stessa retta, detta *retta di Eulero*, con G che sta tra O e H e $\overline{GH} = 2\overline{GO}$.]

Commento

Sono giunte quattro risposte cos  suddivise: due da classi seconde e due da una stessa classe terza, tutte di Licei Scientifici.

Il problema poneva due quesiti, tutti relativi alla stessa figura, cio  un rettangolo interno a un triangolo, con la propriet  che due vertici del rettangolo sono due punti notevoli, ortocentro e circocentro, del triangolo e gli altri due vertici giacciono su un lato del triangolo e uno di essi coincide col punto medio del lato stesso. Nel primo quesito si chiedeva di individuare una possibile costruzione del figura, nel secondo di determinare la lunghezza del lato del triangolo che conteneva un lato del rettangolo, nel caso particolare in cui il rettangolo avesse due lati consecutivi di lunghezza assegnata

Solo due rispondono in modo abbastanza corretto sia al primo che al secondo quesito mentre nelle altre due risposte manca del tutto la costruzione del triangolo.

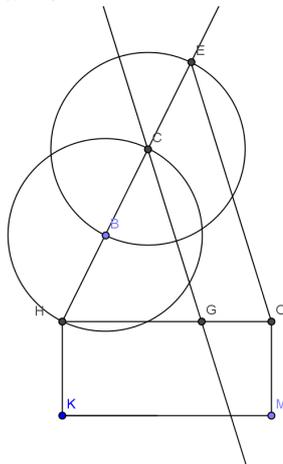
Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:

LS "Aristosseno", Taranto

LS Scienze Applicate "B. Russell", Cles (TN)

LS "Pitagora", Rende (CS)

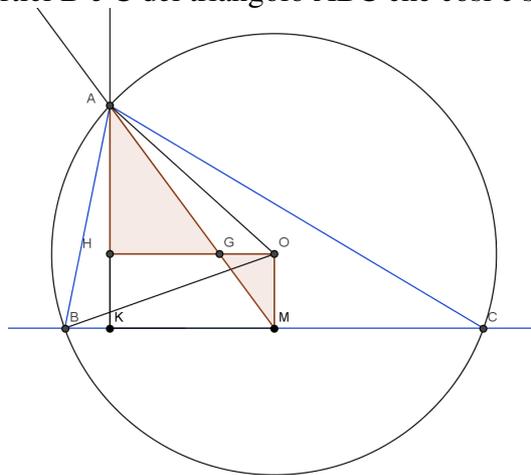
NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.



a)

Costruito [Dato] il rettangolo HOMK, utilizziamo il suggerimento per individuare sul segmento HO il punto G, baricentro del triangolo che si vuole costruire, che è interno al segmento HO ed è tale che GH abbia misura doppia di quella di GO. Per questo utilizziamo il teorema di Talete.

Osservato poi che GM è la retta della mediana relativa al lato BC del triangolo che si vuole costruire (poiché M è il punto medio di BC e G il baricentro) mentre HK è la retta dell'altezza relativa allo stesso lato BC (poiché H è ortocentro del triangolo e HK è perpendicolare a KM che è la retta di BC), il punto d'intersezione di queste due rette individuerà il vertice A del triangolo. Essendo inoltre il punto O il circocentro, punto d'incontro degli assi dei lati del triangolo ed equidistante dai suoi tre vertici, la circonferenza circoscritta al triangolo avrà centro in O e raggio OA. I due punti d'intersezione della circonferenza tracciata con la retta di KM (che è la retta del lato BC) sono gli altri due vertici B e C del triangolo ABC che così è stato costruito.



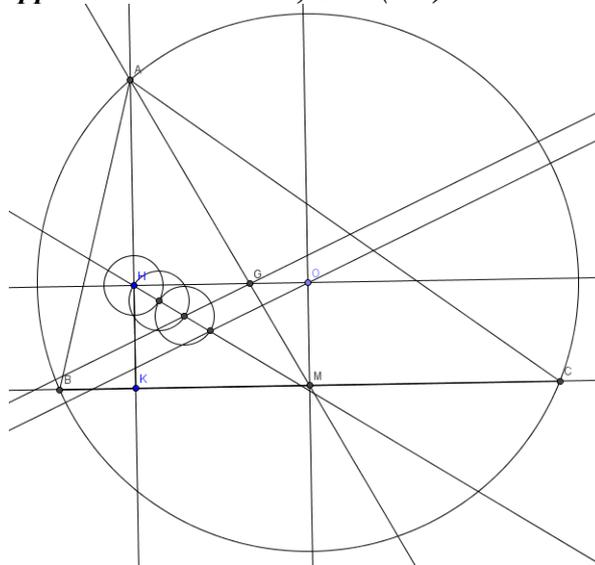
b)

Per determinare la lunghezza del lato BC del triangolo ABC, note le misure di HO e OM (rispettivamente di 11 cm e 5 cm), osserviamo anzitutto che i triangoli rettangoli AHG e GOM evidenziati in figura sono simili, poiché gli angoli acuti \widehat{AGH} ed \widehat{MGO} sono congruenti in quanto opposti al vertice (I criterio di similitudine). Essendo $\overline{HG} = 2\overline{GO}$ [$\overline{HG} = 2\overline{GO}$], il rapporto tra i due cateti omologhi dei suddetti triangoli è 2 (rapporto di similitudine) e perciò sarà anche $\overline{AH} = 2\overline{MO}$ [$\overline{AH} = 2\overline{MO}$] e quindi $\overline{AH} = 2 \cdot 5 = 10$ cm. Il teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo AHO ci consente di calcolare la misura di OA :
 $\overline{OA} = \sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{HO}^2} = \sqrt{100 + 121} = \sqrt{221}$ e poiché OA è congruente ad OB in quanto raggi della

circonferenza circoscritta al triangolo, il teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo BMO ci consente di calcolare la misura di BM : $\overline{BM} = \sqrt{\overline{OB}^2 - \overline{OM}^2} = \sqrt{221 - 25} = \sqrt{196} = 14$ cm .
 Dalla misura di BM, essendo M punto medio di BC, otteniamo quella di $\overline{BC} = 2\overline{BM} = 28$ cm.

Stefano Peroceschi, Classe 2C

Liceo Scientifico Scienze Applicate "B. Russell", Cles (TN)



a)

Costruire [Dato] il rettangolo HOMK

Tracciare rette HK e MK

Trovare G sul segmento HO tale che $GH = 2GO$ [come?]

Tracciare retta GM e trovare A intersezione della retta GM con la retta HK

Tracciare cerchio [la circonferenza di] centro O e raggio OA

Trovo B e C intersezione del cerchio [della circonferenza] con la retta MK

b)

$$OG = \frac{11}{3} \quad GH = \frac{22}{3}$$

Ho trovato GM applicando il teorema di Pitagora al triangolo GOM

$$GM = \frac{\sqrt{346}}{3}$$

Sapendo che due mediane si dividono [tramite il loro punto di intersezione] in due parti una il doppio dell'altra ho trovato GA

$$GA = \frac{2 \cdot \sqrt{346}}{3}$$

Trovo AH con il teorema di Pitagora sul [applicato al] triangolo AGH

$$AH = 10$$

Trovo AO sempre con il teorema di Pitagora sul [applicato al] triangolo AOH

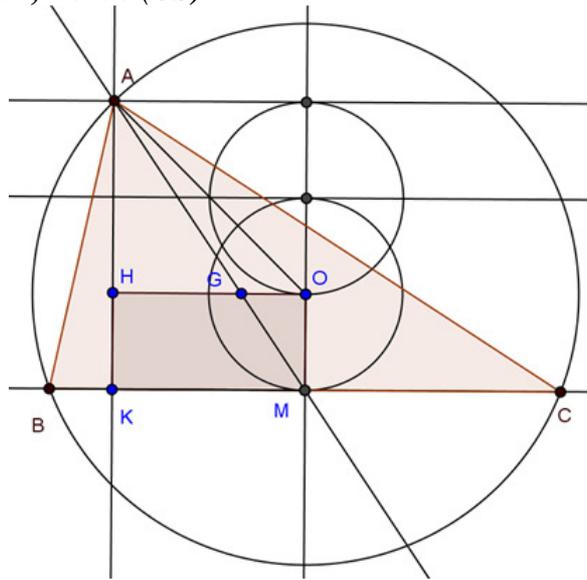
$$AO = \sqrt{221} = CO \text{ in quanto O è il circocentro}$$

Trovo CM applicando il teorema di Pitagora al triangolo CMO

$$CM = \sqrt{196} = 14$$

CB è il doppio di CM quindi 28cm.

(Ilenia Marino), Evelina Porco, Classe 3B
 Liceo Scientifico "Pitagora", Rende (CS)



a)
 [manca la spiegazione della costruzione]

b)
 Indico con x \overline{GH} , quindi: $\overline{GH} = 2x$

$$\overline{GO} + \overline{GH} = 11$$

$$2x + x = 11$$

$$x = 11/3$$

di conseguenza:

$$\overline{GO} = \frac{11}{3}$$

$$\overline{GH} = \frac{22}{3}$$

$$\overline{GM} = \sqrt{\overline{GO}^2 + \overline{OM}^2}$$

$$\overline{GM} = \sqrt{\left(\frac{11}{3}\right)^2 + 5^2} = \sqrt{\frac{121}{9} + 25} = \frac{\sqrt{346}}{3}$$

$\overline{AG} = 2\overline{GM}$, in quanto G è il baricentro del triangolo ABC e il segmento \overline{AG} contiene il vertice A, quindi

$$\overline{AG} = \frac{2}{3}\sqrt{346}$$

Per [il teorema di] Talete:

$$\overline{AH} : \overline{HK} = \overline{AG} : \overline{GM}$$

$$\overline{AH} = \frac{\overline{HK} \cdot \overline{AG}}{\overline{GM}}$$

$$\overline{AH} = 5 \cdot \frac{2}{3} \sqrt{346} \cdot \frac{3}{\sqrt{346}} = 10 \text{ [cm]}$$

$$\overline{OA} = \sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{HO}^2}$$

$$\overline{OA} = \sqrt{10^2 + 11^2} = \sqrt{221}$$

$[\overline{OB} \cong \overline{OB} \cong \overline{OC}]$ $[\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}]$ in quanto per ipotesi O è il circocentro del triangolo ABC, quindi:

$$\overline{EM} = \sqrt{\overline{OE}^2 - \overline{OM}^2}$$

$$([BM]^2 = \sqrt{([11]^2 - 5^2)} = \sqrt{196} = 14] \quad [BM = \sqrt{221 - 25} = \sqrt{196} = 14] \text{ [cm]}$$

Poiché M è il punto medio del lato \overline{BC} :

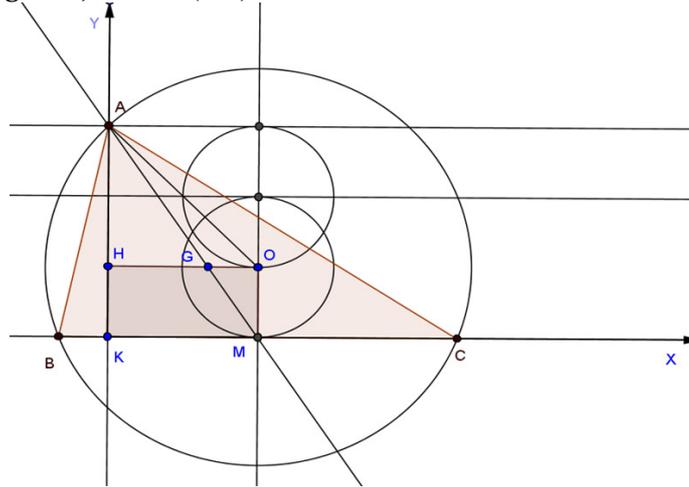
$$\overline{BC} = 2\overline{BM}$$

Quindi:

$$\overline{BC} = 28 \text{ [cm]}$$

Ilenia Marino, Classe 3B

Liceo Scientifico "Pitagora", Rende (CS)



a)

[[...]]

b)

Risolvendo il problema attraverso la geometria analitica do [dò] ai punti K, H, M, O le seguenti coordinate :

$$K (0;0)$$

$$H (0;5)$$

$$M (11;0)$$

$$O (11;5)$$

Considero $y = 5$, poiché retta passante per H e sapendo inoltre che in un triangolo, il baricentro G, il circocentro O, e l'ortocentro H appartengono alla stessa retta, che prende il nome di retta di Eulero, considero il segmento GH [tale che] $[GH = 2GO]$, dunque trovo le coordinate del punto G.

$$|x - 0| = 2 |11 - x|$$

$$G(x;5)$$

$$x = \pm 2 (11 - x)$$

$$[[x = \pm 22 - 2x]] \quad [x = \pm(22 - 2x)]$$

$$[[3x = \pm 22]] \quad [3x = 22 \text{ e quindi } x = 22/3 \text{ oppure } x = 22, \text{ non accettabile}]$$

$$\left[\left[x = \frac{22}{3} \right] \right]$$

$$G\left(\frac{22}{3}; 5\right)$$

$$\text{---} \quad \overline{GM} = \sqrt{\left(11 - \frac{22}{3}\right)^2 + (0 - 5)^2}$$

$$\text{---} \quad \overline{GM} = \sqrt{\left(\frac{11}{3}\right)^2 + (5)^2}$$

$$\overline{GM} = \sqrt{\frac{121}{9} + 25}$$

$$[[\overline{GM} = \sqrt{346}]] [\overline{GM} = \frac{\sqrt{346}}{3}]$$

$$\overline{AG} = 2 \overline{GM} = \frac{2}{3} \sqrt{346}$$

RETTA \overline{AG} = retta GM

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{5 - 0}{-\frac{22}{3} + \frac{11}{3}} (x - 11) \quad [y - 0 = \frac{5 - 0}{\frac{22}{3} - 11} (x - 11)]$$

$$y = 5 \cdot \left(-\frac{3}{11}\right) (x - 11)$$

$$y = -\frac{15}{11}x + 15$$

$$\begin{cases} y = -\frac{15}{11}x + 15 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -15 \\ y = 0 \end{cases} \quad [x = 0]$$

A (0; 15)

$$\overline{AO} = \sqrt{(11 - 0)^2 + (5 - 15)^2} \quad [\overline{AO}]$$

$$\sqrt{(121 + 0) + (25 + 225 - 150)}$$

$$\sqrt{121 + 100} = \sqrt{221}$$

$$\overline{AO} = \overline{OB} \quad [\overline{AO} = \overline{OB}]$$

RETTA OB [OB]

$$\sqrt{\left(-\frac{15}{m} - 11\right)^2 + (0 - 25)^2} = \sqrt{221} \quad [\text{cos'è } m?]$$

$$\left(\frac{11m + 15}{m}\right)^2 + 25 = 221$$

$$\left(\frac{121m^2 + 225 + 330m}{m^2}\right) + 25 = 221$$

$$121m^2 + 225 + 330m + 25m^2 - 221m^2 = 0$$

$$-75m^2 + 330m + 225 = 0$$

$$75m^2 - 330m - 225 = 0$$

$$5m^2 - 22m - 15 = 0$$

$$\Delta = \sqrt{484 + 300} = \sqrt{784} = 28$$

$$m = \frac{22 \pm 28}{10} = \begin{cases} m_1 = \frac{22 - 18}{10} = -\frac{6}{10} = -\frac{3}{5} \\ m_2 = \frac{22 + 28}{10} = \frac{50}{10} = 5 \end{cases}$$

$$-15 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) = 25$$

B(-3;0)

$$\left(-15 \cdot \frac{1}{5}\right) = -\frac{15}{5} = -3$$

C(25;0)

$$\overline{BC} = \sqrt{(25 + 3)^2 + (0 + 0)^2}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{625 + 9 + 150} = \sqrt{784} = 28 \text{ [cm]}$$

$$\overline{BC} = 28 \text{ [cm]}$$

