FLAT*landia*

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" *(Edwin A. Abbott)*

Flatlandia 9 - 22 dicembre 2015 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

1) Dimostrare che i punti medi dei lati di un rombo sono i vertici di un rettangolo.

2) Se i punti medi dei lati di un quadrilatero convesso sono i vertici di un rettangolo è possibile dedurre che il quadrilatero è un rombo?

3) Dimostrare che i punti medi dei lati di un rettangolo sono i vertici di un rombo.

4) Se i punti medi dei lati di un quadrilatero convesso sono i vertici di un rombo è possibile dedurre che il quadrilatero è un rettangolo?

Motivare le risposte.

Commento

Sono giunte dieci risposte, due da classi prime, sette da classi seconde e una da una classe terza, tutte di Licei Scientifici.

Il problema poneva quattro quesiti a due a due "inversi".

Nel primo quesito si chiedeva di dimostrare che i punti medi dei lati di un rombo sono i vertici di un rettangolo e nel secondo quesito si chiedeva se tale proprietà fosse invertibile.

Analogamente nel terzo quesito si chiedeva di dimostrare che i punti medi dei lati di un rettangolo sono i vertici di un rombo e nel quarto quesito se tale proprietà fosse invertibile.

La maggior parte degli studenti risponde in modo sostanzialmente corretto al primo e terzo quesito. Per gli altri due quesiti, la cui risposta era negativa, si sarebbe dovuto fornire un controesempio, ossia un esempio nel quale la tesi sia vera senza che lo sia l'ipotesi. Molti hanno invece sbagliato perché si sono rifatti ad una figura palesemente errata (ad esempio partendo già da un parallelogrammo) , mentre altri hanno concluso che la proprietà era falsa perché "non riuscivano a dimostrarne la validità ".

Diverse soluzioni inviate sono scritte in modo trascurato; qualcuno addirittura non scrive il nome oppure non scrive la classe!

Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:

- LS "U. Dini", Pisa
- LS "C. Cafiero", Barletta (BT)
- LS "B. Russell", Cles (TN)

NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni

1) ***Simmaco De Lillo, Classe 3G, Liceo Scientifico "U. Dini", Pisa***

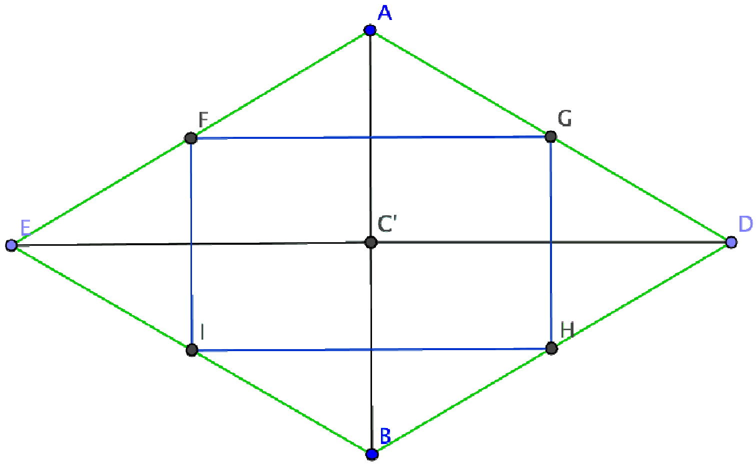
1) [[…]]

2) [[…]]

3) [[…]]

4) [[…]]

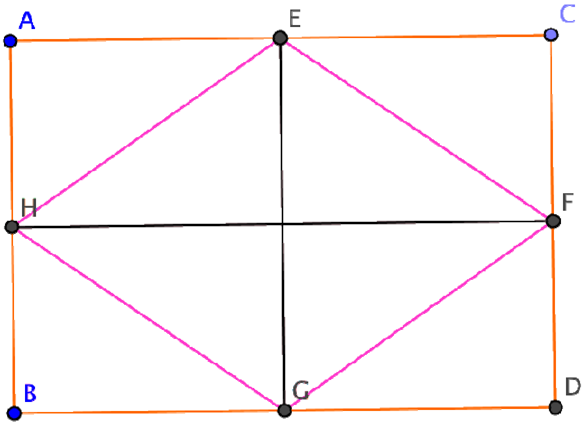
2) ***Chiara Iovine, Vittorio Del Negro, Classe II B, Liceo Scientifico Cafiero Barletta***



1) Ipotesi: AEBD rombo; F,I,H,G punti medi
   Tesi: FIHG rettangolo

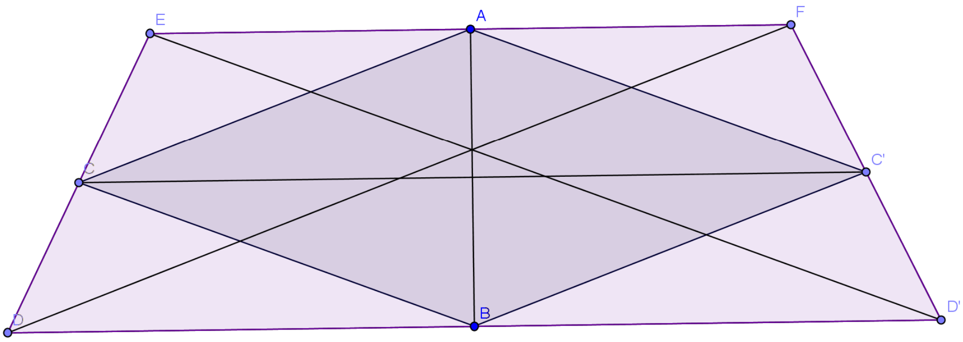
Dimostrazione: considero ADB triangolo: $AG \cong GD$ x ipotesi
$BH \cong HD$ x ipotesi
$\Downarrow$ x corollario Talete
$GH \parallel AB \wedge GH=\frac{1}{2}AB$
Analogamente $FI \parallel AB \wedge FI=\frac{1}{2}AB$
$\Downarrow$ x proprietà transitiva
$FI \parallel GH \wedge FI \cong GH$
Analogamente $FG \parallel IH \wedge FG \cong IH$
$AB \perp ED$ x diagonali rombo
$\Downarrow$ x proprietà parallelismo
$FI \wedge GH \perp IH \wedge FG$
$\Downarrow$
F, I,H,G angoli congruenti [e retti]
$\Downarrow$ x condizioni sufficienti e necessarie
FIHG rettangolo

2) [[…]]



3) Ipotesi: ABDC rettangolo; F,G,H,E punti medi
Tesi: FGHE rombo

Dimostrazione: Considero GDF ^ EFC triangoli rettangoli: CF≅ FD x ipotesi
GD≅ CE x metà segmenti congruenti
⇓ x 1° criterio di congruenza
GDF ≅ EFC
⇓ x elementi corrispondenti
GF≅ EF
⇓ x condizioni sufficienti e necessarie
FGHE rombo
[naturalmente bisogna estendere la dimostrazione anche agli altri lati del quadrilatero]



4) Ipotesi: ACBC' rombo; EDD'F quadrilatero; C'ACB punti medi
Tesi: EDD'F rettangolo
Dimostrazione: AC'≅ AC x proprietà rombo
Considero ED'F triangolo: EA≅ AF x ipotesi
FC'≅ C'D' x ipotesi
⇓ x corollario Talete

$AC' \parallel ED' \wedge AC' = \frac{1}{2} ED'$

Analogamente: $AC \parallel DF \wedge AC = \frac{1}{2} DF$

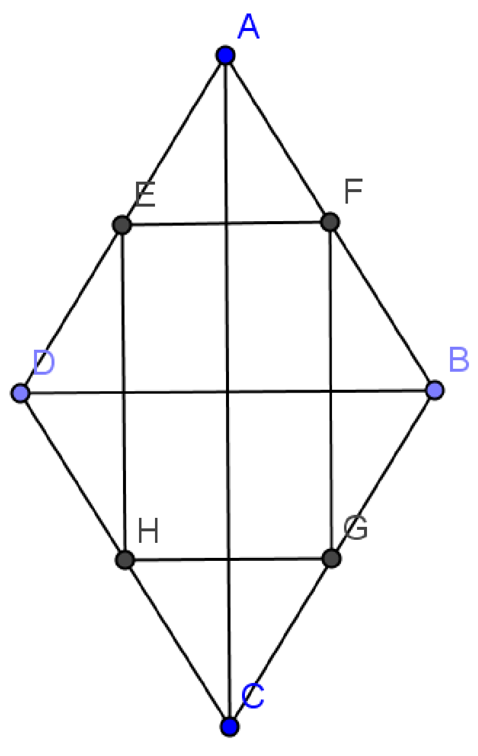
$\Downarrow$ x proprietà congruenza

$ED' \cong DF$

Si dimostra che le diagonali sono congruenti, ma non si riesce a dimostrare che il quadrilatero è un parallelogramma, di conseguenza non si può dimostrare che è un rettangolo [se un quadrilatero ha le diagonali congruenti , e quindi non è necessariamente un rettangolo, unendo i punti medi dei lati si ottiene un rombo].

3) Fucci Antonio, Andrea Dicorato, Ruggiero Fiorella, 2C, liceo scientifico Carlo Cafiero,Barletta

PROBLEMA 1



Dimostrazione:

unisco i punti medi del rombo.

Secondo il teorema dei punti medi, EFe HG sono paralleli a DB.

Analogamente FG e EH sono paralleli ad AC.

AC è perpendicolare a BD per propietà del rombo.

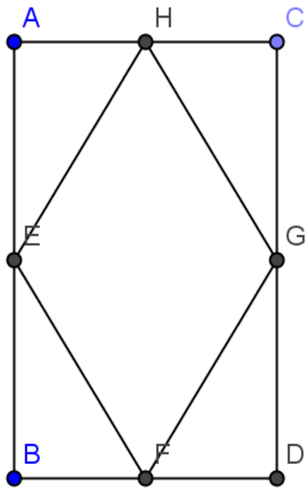
Questo implica che HG e EF sono perpendicolari a EH e FG per la proprietà transitiva.

Questo implica che tutti gli angoli del quadrilatero EHFG sono retti.

Questo implica che il quadrilatero EHFG è un rettangolo

2) [[…]]

Problema 3



Dimostrazione:

Considero i triangoli rettangoli BFE FDG CGH e AHE.

Essi hanno le basi congruenti per definizione di punto medio;

le altezze congruenti per la definizione di punto medio.

Per il criterio dei triangoli rettangoli, i triangoli sono congruenti.

Questo implica che i lati del quadrilatero EFGH sono congruenti perchè sono elementi corrispondenti in triangoli congruenti.

Questo implica che il quadrilatero EFGH è un rombo per definizione.

4) [[…]]

4) ***Lombardi Pasquale Francesco (Classe???), Liceo Scientifico, Cafiero, Barletta***

PUNTO 1

IPOTESI: ABCD rombo

G,H,F,E punti medi dei lati

TESI: [[ABCD]] [GHFE] rettangolo

DIMOSTRAZIONE: considero ABCD rombo

X definizione

AC=AD=BD=BC 1)

considero GHEF quadrilatero

considero CE=CG per metà di lati congruenti

X condizioni sufficienti di rombo

CEOG rombo → EO=GO=EC=CG 2)

considero HD=DF X metà di lati congruenti

X condizioni sufficienti di rombo

FDHO rombo → FO=OH 3)

considero 1), 2),3)

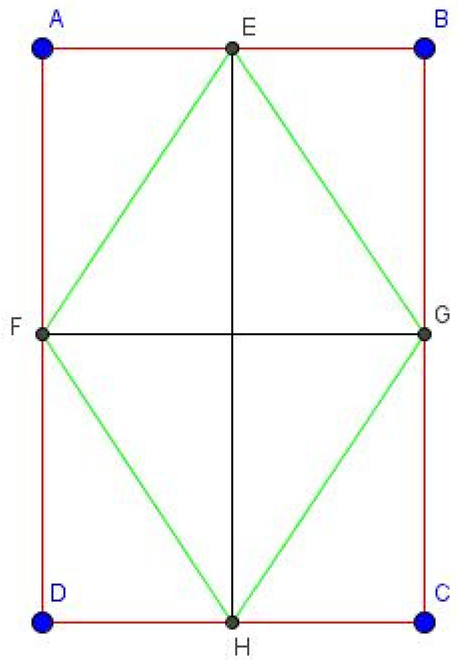
X propietà transitiva

GO=OF=EO=OH → GHFE rettangolo

X condizioni sufficienti di rettangolo [poche giustificazioni]

2) [[…]]

PUNTO 3



IPOTESI: ABCD rettangolo

H,F,E,G punti medi dei lati

TESI: EFGH rombo

DIMOSTRAZIONE: considero FHGE quadrilatero

considero $\triangle$FDH e $\triangle$HGC e $\triangle$FAE e $\triangle$GBE congruenti

FD=GC X metà di lati congruenti

DH=HC X punto medio

FA=GB X metà lati.

AE=EB X punto medio

X criteri di congruenza triangoli rettangoli

$\triangle$FDH=$\triangle$HGH=FAE=GEB

X elementi corrispondenti in triangoli congruenti

FH=HG=GE=EF

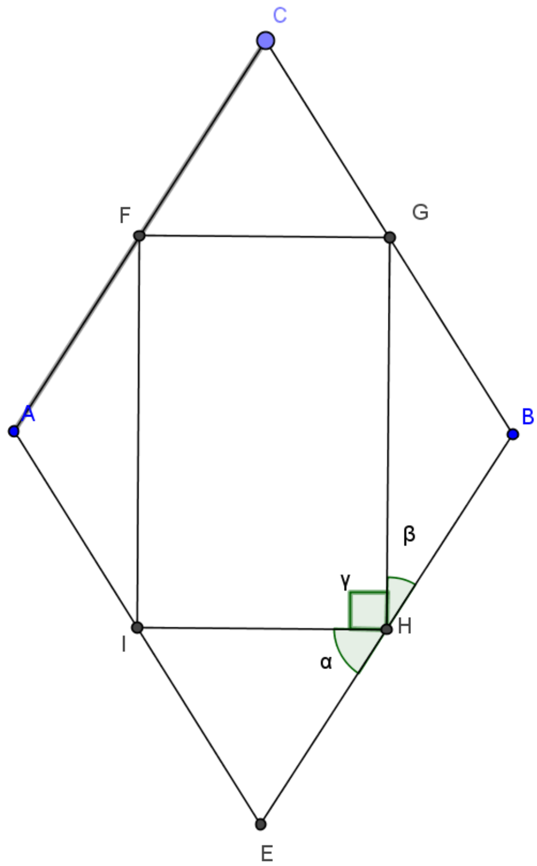
X propietà rombo

. FHGE rombo

[i triangoli vanno confrontati tutti e quattro assieme e non a coppie]

4) [[…]]

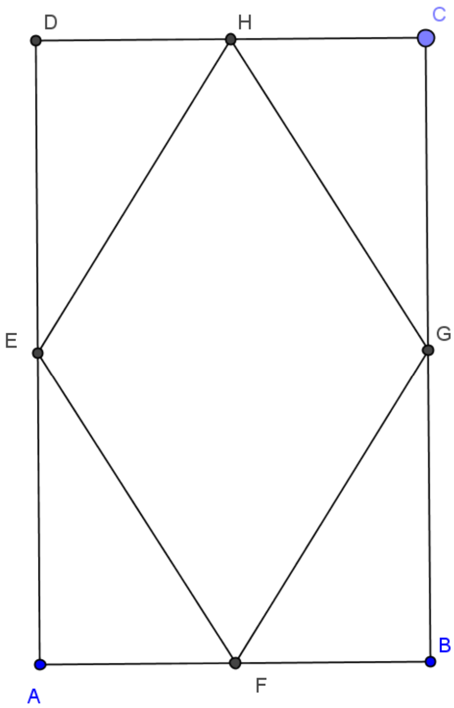
5) ***Mattia-Corrà-1^D, Liceo Bertrand Russell-Cles***



PUUNTO 1:
IP: ACBE è un rombo e I, H, G e F sono i suoi punti medi.
TS: IHGF è un rettangolo.

DIM: Gli angoli del rombo sono a due a due congruenti questo perché sono formati da coppie di rette parallele incidenti fra loro formando coppie di angoli congruenti tra loro (naturalmente si formano molte altre coppie di angoli alterni interni o esterni ecc.) all'interno del rombo che formano (infatti il rombo per definizione ha gli angoli opposti uguali).
I triangoli IHE e FGC sono isosceli e congruenti per il primo crit. di congruenza dei triangoli (angoli in E e in C congruenti perché opposti e i lati EH, EI, FC e CG tutti congruenti perché tutti la metà dei lati del rombo che sono anch'essi congruenti). Per lo stesso discorso i triangoli IAF e HBG sono congruenti e isosceli.
Considero gli angoli del quadrilatero IHGF: sono tutti formati da 180°-α-β (questo perché l'angolo α è l'angolo alla base dei due triangoli IHE e FGC e β degli altri due triangoli) quindi sono tutti uguali.
γ= 360°(somma dei quattro angoli) :4 quindi 90° [IHGF è quindi un rettangolo].
[[…]]

2) [[…]]

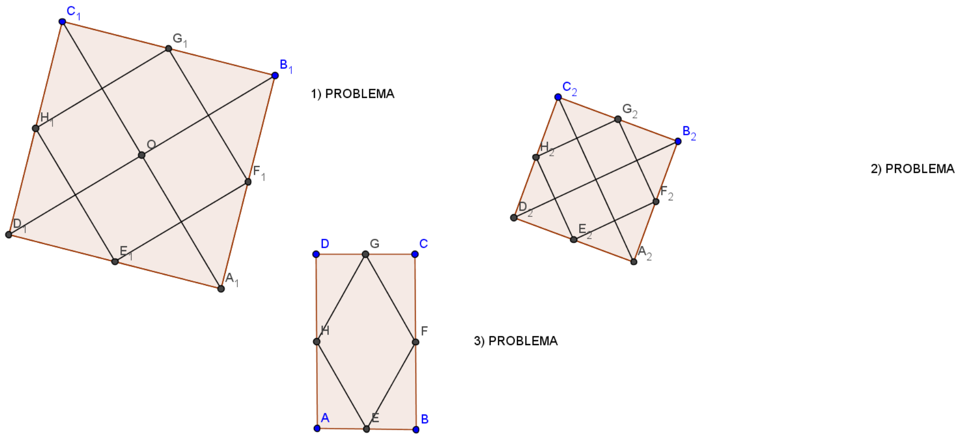


PUNTO 3:

IP: ABCD è un rettangolo e i punti F, G, H e E sono punti medi dei suoi lati.
TS: FGHE è un rombo.
DIM: I triangoli AFE, FBG, GCH e HDE sono congruenti per il primo criterio di congruenza dei triangoli (triangoli rettangoli con cateti congruenti). Da qui ne consegue che FG, GH, HE e EF sono congruenti [e quindi FGHE è un rombo].
[[…]]

4) [[…]]

6) ***Giorgia Filannino-Liceo scientifico 'C.Cafiero'- Barletta 2C***



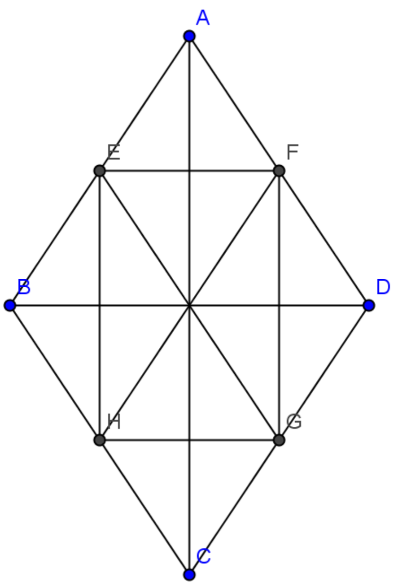
1)Essendo il quadrilatero un rombo, si sa che le bisettrici sono perpendicolari. Per il corollario del piccolo teorema di Talete, il segmento HE che congiunge i punti medi dei lati BA e DA, è parallelo alla diagonale del rombo DB. In modo analogo, si dimostra che FE è parallelo a AC. Se si considera CA, GH e FE le trasversali che tagliano HE, GF e DB, GH è perpendicolare ad HE. Gli angoli sono retti perché coniugati interni tra parallele tagliate da trasversali. Questa condizione, implica che HEFG è un rettangolo.

2) [[…]]

3) Per dimostrare che EFGH è un rombo, basta dimostrare che [[due lati consecutivi sono congruenti]] [tutti i lati sono confluenti]. [[…]]

4) [[…]]

7) ***Daniela Caffiero, Classe ????-Liceo scientifico 'C.Cafiero'- Barletta***

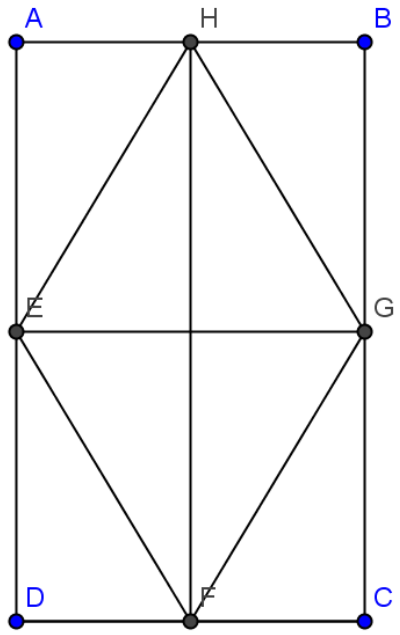


1) Dimostrare che i punti medi dei lati di un rombo sono i vertici di un rettangolo.

IPOTESI: ABCD rombo
E,F,G,H punti medi dei segmenti AB,AD,DC,BC
TESI: E,F,G,H vertici del rettangolo
DIMOSTRAZIONE: considero –ADC triangolo dove AC||FG per il teorema dei punti medi
-ABC triangolo dove AC||EH per il teorema dei punti medi
PER LA PROPRIETA TRANSITIVA EH||FG
Analogamente EF||GH
PER DEFINIZIONE EFGH PARALLELOGRAMMA
FH=DC e EG=BC [perché ?] DC=BC per ipotesi
PER CONDIZIONE SUFFICIENTE PERCHE UN PARALLELOGRAMMA SIA UN RETTANGOLO [quale ?] ABCD RETTANGOLO

3) Dimostrare che i punti medi dei lati di un rettangolo sono i vertici di un rombo.

IPOTESI: ABCD rettangolo H,G,F,E punti medi



TESI: H,G,F,E vertici di un rombo

DIMOSTRAZIONE: considero AEH triangolo =BHG triangolo =CGF triangolo =EFD triangolo per criterio triangoli rettangoli

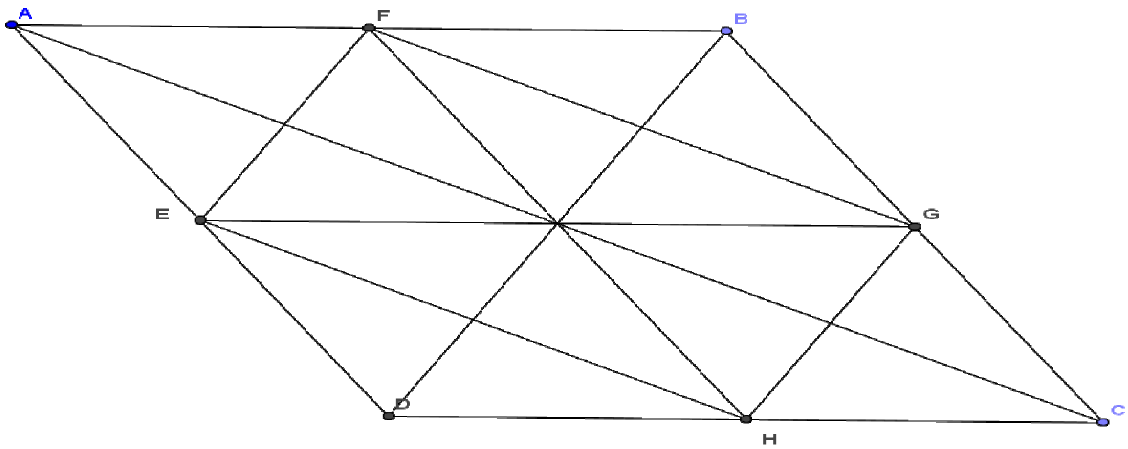
ELEMENTI CORRISPONDENTI IN TRIANGOLI CONGRUENTI

GF=EF=EH=HG

PER DEFINIZIONE HGFE rombo

4) [[…]]

8) ***(Non c'è il nome)* Cassano-Sfregola - 2^C-Liceo scientifico 'C.Cafiero'- Barletta**



Ipotesi: ABCD rombo; E,F,G,H punti medi;

Tesi: EFGH rettangolo

Dimostrazione:

1

- Considero ABD triangolo: EF // BD ∧ EF = ½ BD (per corollario del teorema di Talete)
- Considero DCB triangolo : GH// BD ∧ GH = ½ BD (per ragioni analoghe)

↓ (per proprietà transitiva)
EF ≅ GH ∧ EF//GH
↓(per condizioni sufficienti affinchè un quadrilatero sia un parallelogramma)
EFGH parallelogramma

2

Considero AFHD quadrilatero :

- AF ≅ DH (perché metà di segmenti congruenti) ∧ AF//DH (per proprietà rombo)

↓ (per condizioni sufficienti affinché un quadrilatero sia un parallelogramma)

AFDH parallelogramma
↓ (per proprietà parallelogramma)
AD ≅ FH

Considero AEGB quadrilatero:

- AE ≅ GB(perche metà di segmenti congruenti)∧ AE// GB (per proprietà del rombo)

↓ (per condizioni sufficienti affinché un quadrilatero sia un parallelogramma)
AEGB parallelogramma
↓(per proprietà parallelogramma)
EG ≅ AB
↓(per proprietà transitiva siccome AB=AD per proprietà rombo)
EG ≅ FH

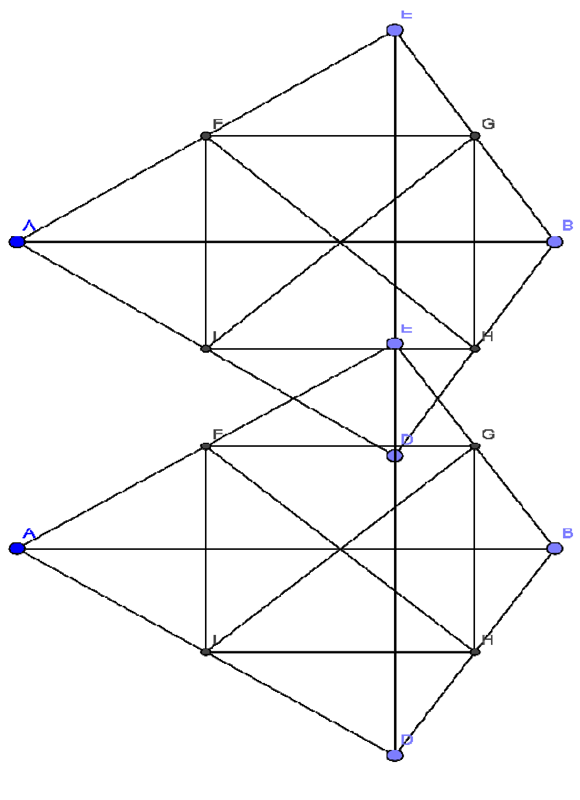
Dai punti 1 e 2 evinciamo che il quadrilatero EFGH è un parallelogramma con le diagonali congruenti

↓(per condizioni [[necessarie]] [sufficienti] affinché un parallelogramma sia un rettangolo)

EFGH ossia il quadrilatero formato dai punti medi dei lati del rombo è UN RETTANGOLO

C.V.D.

PUNTO NUMERO 2



Ipotesi: FGHI rettangolo; E,I,G,H punti medi del quadrilatero convesso ADBE
Tesi : ADBE rombo

Non sarà possibile dimostrare la seguente tesi , poiché basterà avere un poligono convesso con le diagonali perpendicolari per ottenere dai punti medi un rettangolo, di conseguenza dimostrerò ciò.

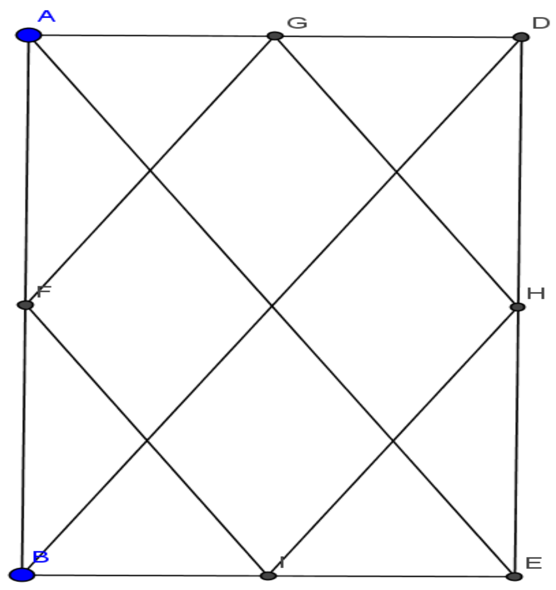
Ipotesi: FGHI rettangolo; E,I,G,H punti medi del quadrilatero convesso

Tesi: ADBE quadrilatero ha le diagonali perpendicolari ↔ AB⊥ED

Dimostrazione: Considero ADE triangolo : FI // ED ∧ FI = ½ ED (per corollario teorema di Talete)
Considero ABE triangolo : FG //AB ∧ FG = ½ AB (per corollario teorema di Talete)
↓(per proprietà transitiva e poiché per definizione di rettangolo FG ⊥ FI)
AB⊥ED

Ragionando in ugual maniera si può dimostrare l'inverso cioè, avendo nelle ipotesi ABDE quadrilatero convesso con le diagonali perpendicolari e F,G,H,I punti medi si dimostra tramite i corollari del teorema di Talete che FGHI è un rettangolo. Da tutto questo tiriamo la conclusione che ci porta ad affermare che <u>IL QUADRILATERO CONVESSO DEL QUALE I PUNTI MEDI DEI LATI SONO GLI SPIGOLI DI UN RETTANGOLO NON E' NECESSARIAMENTE UN ROMBO.</u>

PUNTO NUMERO 3



Ipotesi: ABED rettangolo G,F,H,I punti medi
Tesi: GFIH rombo

Dimostrazione :

- Considero ADE triangolo: GH// AE ∧ GH = ½ AE
- Considero AEB triangolo: FI // AE ∧ FI = ½ AE
- Considero DBE triangolo: HI// DB ∧ HI = ½ DB
- Considero DBA triangolo: FG//BD ∧ FG = ½ DB

↓(poiché DB=AE per proprietà rettangolo, per proprietà transitiva)

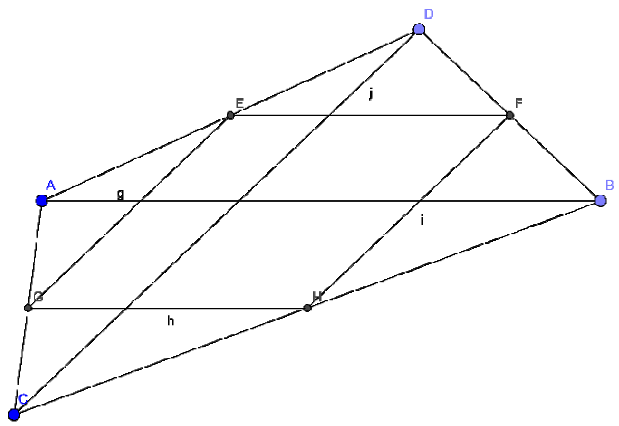
GH//FI ; HI//FG ∧ GH ≅ FI ≅ HI ≅ FG

↓(per condizioni sufficienti affinchè un quadrilatero sia un rombo)

GFIH rombo

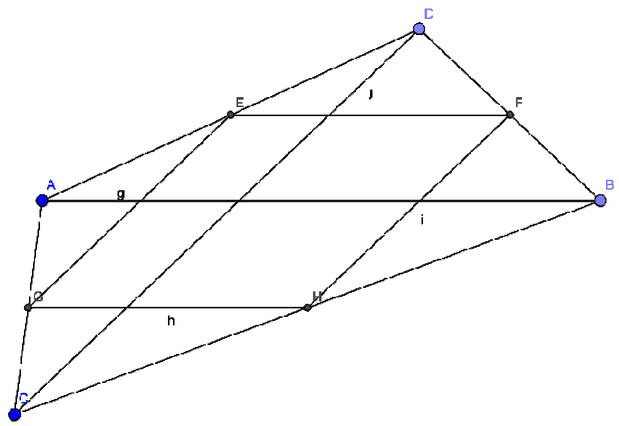
C.V.D.

PUNTO NUMERO 4



Ipotesi: ADBC quadrilatero convesso; EFHG rombo; E,F,G,H punti medi
Tesi: ADBC Rettangolo

Non sarà possibile dimostrare la seguente tesi poiché affinchè EFGH sia un rombo basterà avere un poligono con le diagonali congruenti ed ora lo andrò a dimostrare.

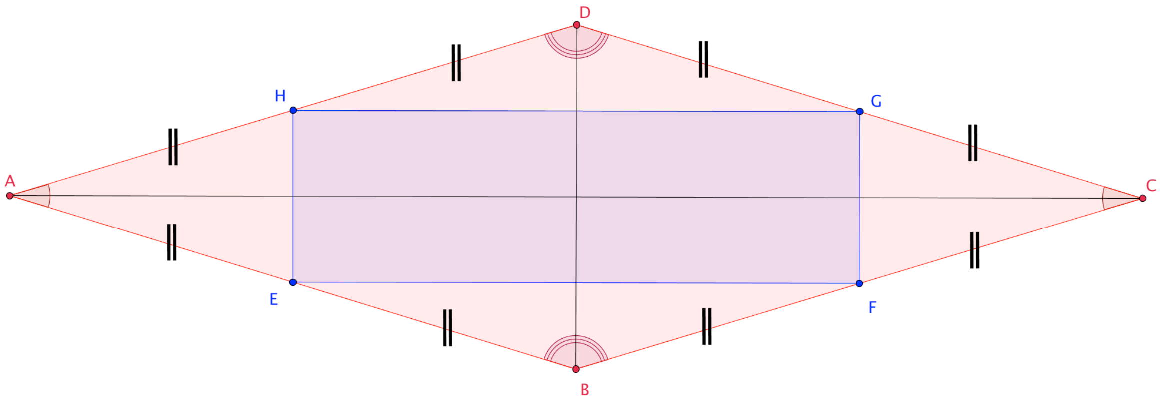


Ipotesi: ACBD quadrilatero convesso con diagonali (CD e AB) congruenti; EFHG punti medi
Tesi: EGHI rombo

La dimostrazione è analoga al PUNTO NUMERO 3.
Le condizioni necessarie affinchè un quadrilatero sia un rettangolo specificano che il quadrilatero per essere un rettangolo deve possedere le diagonali congruenti e CHE SI DIMEZZANO SCAMBIEVOLMENTE; ciò non viene specificato nell'ipotesi perciò possiamo concludere che NON E' POSSIBILE DIMOSTRARE CHE ACBD E' UN RETTANGOLO

9)-***Ianes Elisa 1D liceo B. Russell Cles (Trento)***

Punto 1



i
potesi: AB è congruente a BC è congruente a CD è congruente a DA
AE EB BF FC CG GD DH HA sono tutti congruenti fra di loro
l'angolo EBF è congruente all'angolo HDG
l'angolo GCF è congruente all'angolo HAE

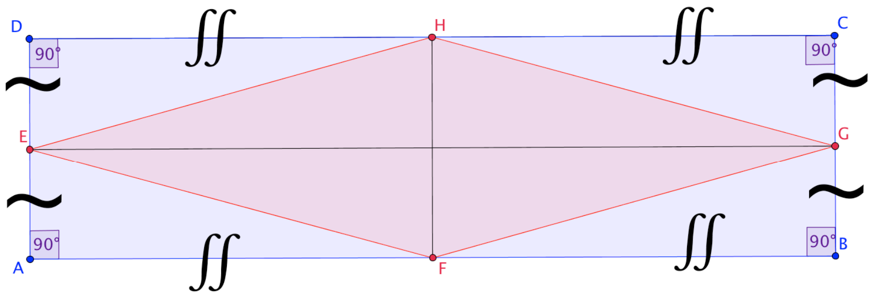
tesi: EFGH è un rettangolo

dimostrazione: AB è congruente a BC è congruente a CD è congruente a DA per ipotesi
AE EB BF FC CG GD DH HA sono tutti congruenti fra di loro per ipotesi
Gli angoli EBF e HDG sono congruenti per ipotesi
Gli angoli GCF e HAE sono congruenti per ipotesi
I triangoli ABC e ACD sono congruenti per il primo criterio di congruenza di triangoli
Gli angoli BAC BCA CAD ACD sono congruenti per precedente dimostrazione
Considero i triangoli AEH e FCG sono congruenti per il primo criterio di congruenza di triangoli
HE è congruente a FG per precedente dimostrazione
I triangoli EBF e DHG sono congruenti per il primo criterio di congruenza di triangoli
EF è congruente a HG per precedente dimostrazione
EF,HG sono diversi da HE,GF
DB è parallelo a GF per il teorema di Talete [per il corollario]
DB è parallelo a GF e HG trasversale allora l'angolo HGF è di 90° [perché ?]
DB è parallelo a GF e EF trasversale allora l'angolo GFE è di 90°[perché ?]
DB è parallelo a HE per il teorema di Talete
DB è parallelo a HE e HG trasversale allora l'angolo GHE è di 90°[perché ?]
DB è parallelo a HE e EF trasversale allora l'angolo FEH è di 90°[perché ?]

EFGH è un rettangolo perché ha gli angoli interni di 90° e i lati a due a due paralleli
CVD

Punto 2 [[…]]

Punto 3



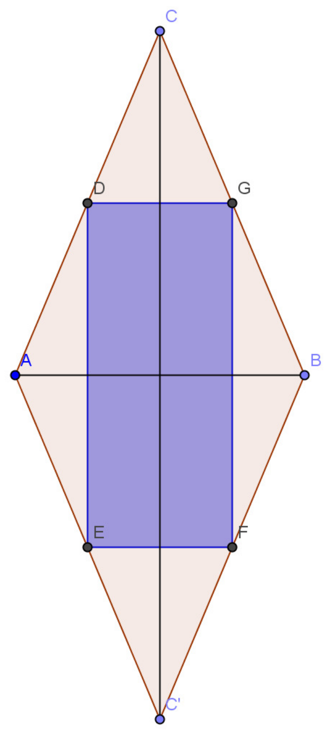
iI

Ipotesi: AB è congruente a CD
BC è congruente a DA
AF FB CH HD sono tutti congruenti fra di loro
BG GC DE EA sono tutti congruenti fra di loro
Gli angoli A B C D sono tutti congruenti tra loro e sono di 90°

tesi: EFGH è un rombo

dimostrazione: AB è congruente a CD per ipotesi
BC è congruente a DA per ipotesi
AF FB CH HD sono tutti congruenti fra di loro per ipotesi
BG GC DE EA sono tutti congruenti fra di loro per ipotesi
Gli angoli A B C D sono tutti congruenti tra loro e sono di 90° per ipotesi
I triangoli AFE FBG GCH HDE sono tutti congruenti tra loro per il primo criterio di congruenza di triangoli
EF FG GH HE sono tutti congruenti tra loro per precedente dimostrazione e quindi EFGH è un rombo.
[[…]]

Punto 4 [[…]]



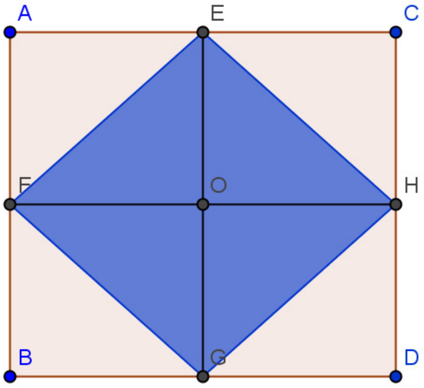
10) Giuseppe Ricco, 2ªC, Liceo Scientifico C. Cafiero di Barletta

1) Considero il triangolo ACC': per ipotesi ED interseca due punti medi di due suoi lati, quindi per un corollario del teorema di Talete sarà anche parallelo e congruente alla metà di CC'. Allo stesso modo, considerando il triangolo BCC', risulta GF parallelo a CC' e congruente alla sua metà. Per proprietà transitiva risulta DE congruente e parallelo a GF. Per condizioni necessarie e sufficienti risulta EFGD parallelogrammo. Ma sapendo che le diagonali del rombo CC' e AB sono perpendicolari, e che DG e EF sono paralleli ad AB, mentre DE e GF sono paralleli a CC',

risulteranno anche DG e EF perpendicolari a DE e GF. Dato che EFGD è un parallelogrammo con i lati perpendicolari a coppie, risulta essere un rettangolo.

2) [[…]]

3) Se considero il quadrilatero AEGB, risulta essere un parallelogrammo perché AE e GB appartengono a due rette parallele e sono uguali alla metà di due segmenti congruenti. Quindi risulta EG parallelo e congruente a AB. Allo stesso modo si può dire che EG è congruente e parallelo sia a AB che a CD, e che FH è congruente sia a AC che a BD e parallelo ad entrambi. Andando a considerare, invece, il quadrilatero AEOF, sappiamo che AF//EO e AE//FO, perché appartengono a segmenti paralleli, quindi AEOF è un parallelogrammo e AF è conguente a EO e AE è congruente a FO. Con lo stesso procedimento possiamo dire che FB è conguente a OG, e che EC è congruente a OH. Ma sapendo che i lati opposti di un rettangolo sono congruenti, risulteranno anche FO congruente a OH e EO congruente a OG, il che ci dimostra che FEHG è un parallelogrammo con le diagonali perpendicolari, cioè un rombo.



4) [[…]]