FLAT*landia*

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" *(Edwin A. Abbott)*

Flatlandia 8 - 22 Febbraio 2016 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

È data una circonferenza di diametro AB e centro O. Indicato con C un punto sulla circonferenza (diverso da A e da B), tracciare la retta r parallela ad AC per O. Sia D l'intersezione di r con la circonferenza dalla parte opposta di C rispetto ad AB.

(a) Dimostrare che DO è bisettrice dell'angolo CDB.

(b) Quale particolarità ha il triangolo CDB ?

(c) Dimostrare che i triangoli CDB e AOD sono simili.

Motivare le risposte.

Commento

Sono giunte 10 risposte, due da classi terze, 6 da classi seconde e 2 da una classe prima di Liceo scientifico.

Il problema poneva tre quesiti. Nel primo si chiedeva di dimostrare che, data una circonferenza e una sua corda, condotta dal centro la parallela ad essa questa risultava la bisettrice di un particolare angolo. Nel secondo quesito si chiedeva di indicare quale particolarità avesse un triangolo della figura e infine si chiedeva di dimostrare la similitudine tra tale triangolo e un altro triangolo della figura.

Le risposte giunte rispondono in maniera sostanzialmente corretta a tutti e tre i quesiti, anche se con procedimenti diversi e qualche imprecisione. Facciamo comunque alcune osservazioni:

- cercare di usare un linguaggio essenziale e preciso senza però che diventi "telegrafico";
- triangolo isoscele è per definizione un triangolo con (almeno) due lati congruenti e quindi un triangolo equilatero è isoscele. Inoltre un triangolo è isoscele se e soltanto se ha due angoli congruenti;
- nella similitudine finale, trattandosi di triangoli isosceli, era forse più semplice lavorare solo con gli angoli.

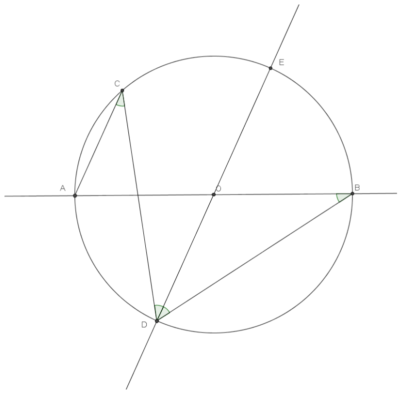
Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:
- Liceo "Aristosseno", Taranto
- Liceo Scientifico "B. Russell", Cles (TN) (più soluzioni)
- Liceo Scientifico "I. Newton", Roma
- Liceo Scientifico "Pitagora", Rende (CS)
- Liceo Scientifico "Alessi", Perugia
- Liceo Scientifico "U. Dini", Pisa

NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

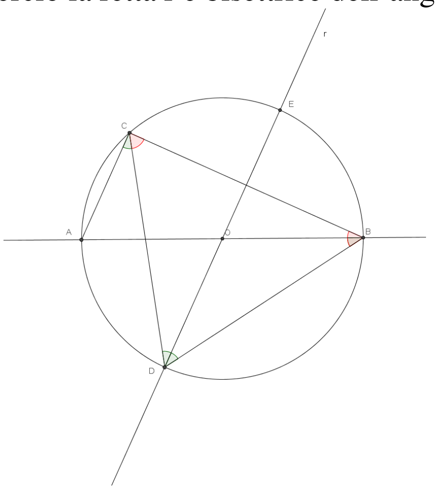
Soluzioni

1) Soluzione proposta dalla Classe III N, Liceo "Aristosseno", Taranto

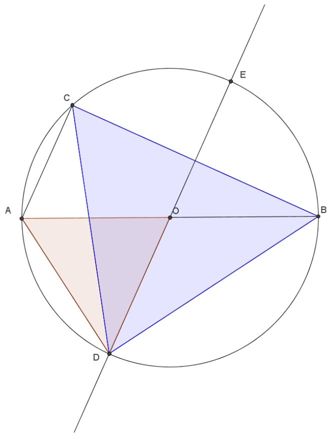
Flatlandia- Problema 8-22 Febbraio 2016
Soluzione proposta dalla classe 3 N Liceo Scientifico Aristosseno Taranto



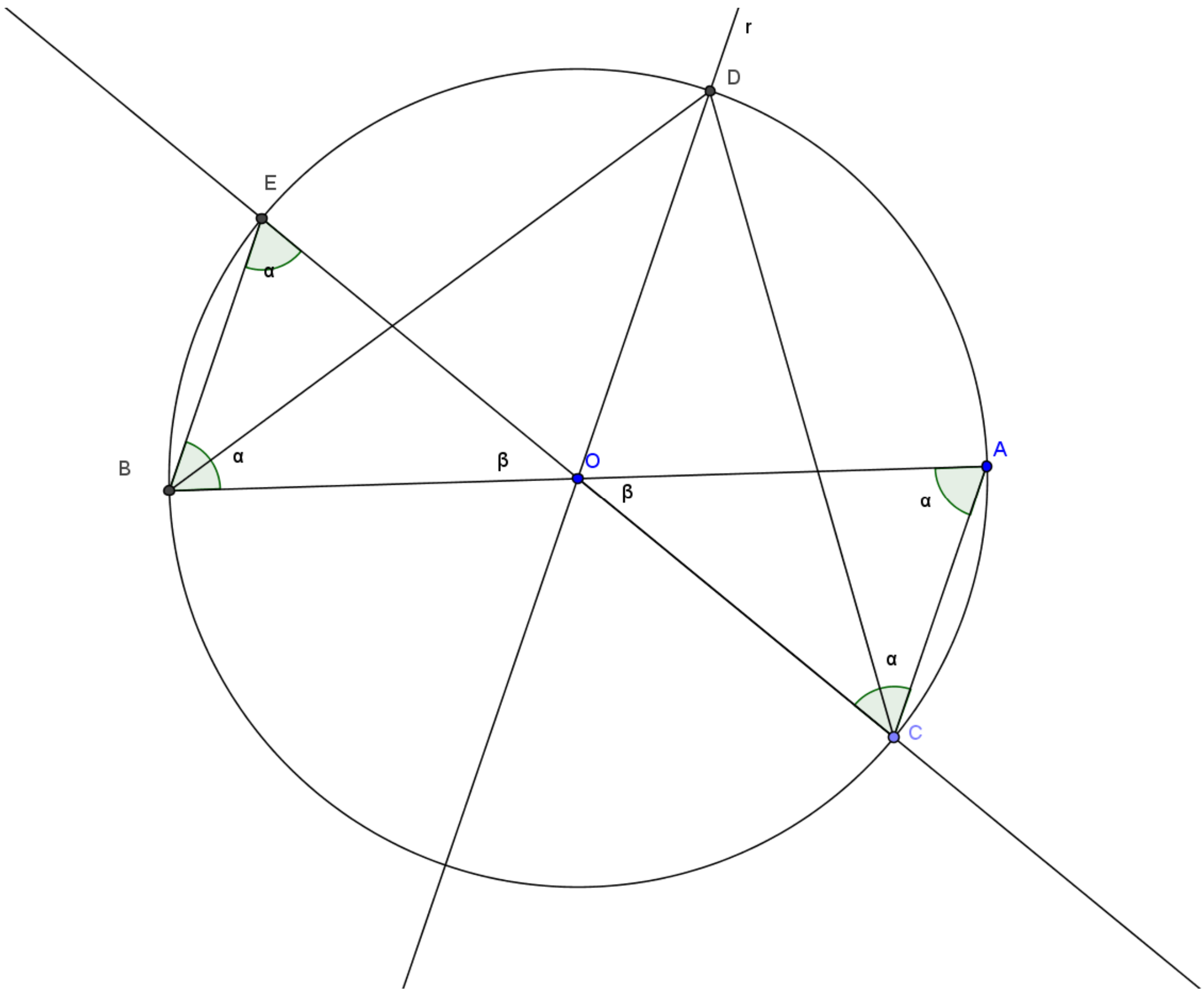
a)Gli angoli $A\hat{C}D$ e $A\hat{B}D$ sono congruenti in quanto angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco $A\overset{\frown}{D}$. Gli angoli $A\hat{B}D$ e $B\hat{D}O$ sono anch'essi congruenti in quanto angoli alla base del triangolo isoscele DOB, che ha OD e OB raggi della stessa circonferenza. Infine gli angoli $A\hat{C}D$ e $C\hat{D}O$ sono alterni interni della retta di AC e della retta r tagliate dalla trasversale CD . Da quanto detto segue che $C\hat{D}O = B\hat{D}O$ e perciò la retta r è bisettrice dell'angolo CDB.



b) Il triangolo CDB è isoscele sulla base CB .Infatti l'angolo $A\hat{C}B$ è retto in quanto inscritto in una semicirconferenza, quindi AC è perpendicolare a CB ; ed essendo la retta r parallela ad AC,essa è perpendicolare a CB(se due rette sono parallele ogni retta perpendicolare all'una lo è anche all'altra) .Nel triangolo CDB la retta r è la retta dell'altezza e della bisettrice dell'angolo $C\hat{D}B$ (ovvero è l'asse di CB) e perciò il triangolo è isoscele.
c)I triangoli CDB e AOD sono simili perché sono entrambi isosceli ad hanno l'angolo al vertice congruente. (I criterio di similitudine). Essendo infatti $A\hat{O}D \cong 2A\hat{B}D$ (poiché angolo al centro corrispondente ad ABD che insiste sullo stesso arco AD), e $C\hat{D}B \cong 2A\hat{B}D$ (poiché la retta r è bisettrice dell'angolo CDB)si ha $A\hat{O}D \cong C\hat{D}B$.

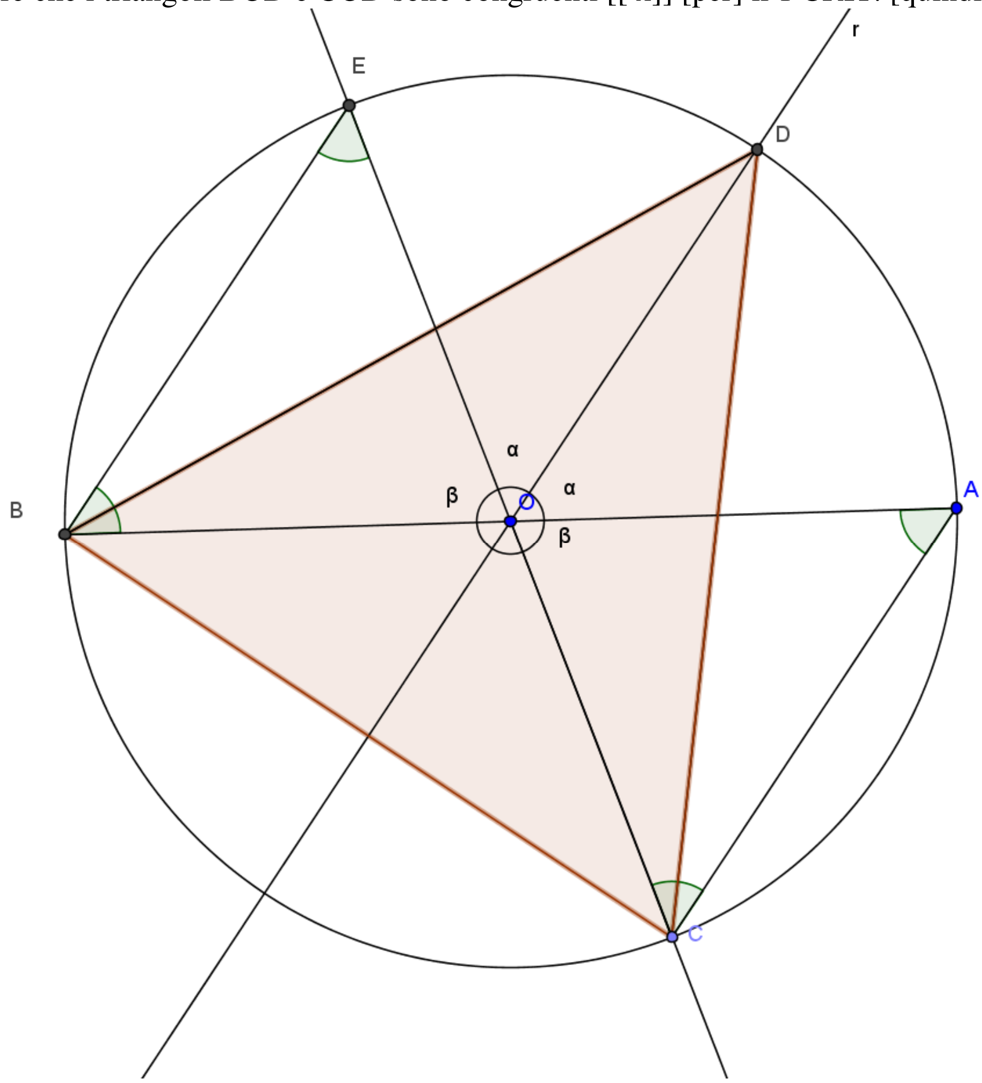


2) ***Mattia Corrà, classe 1 D, Liceo Bernard Russell scientifico scienze applicate –Cles (TN)***

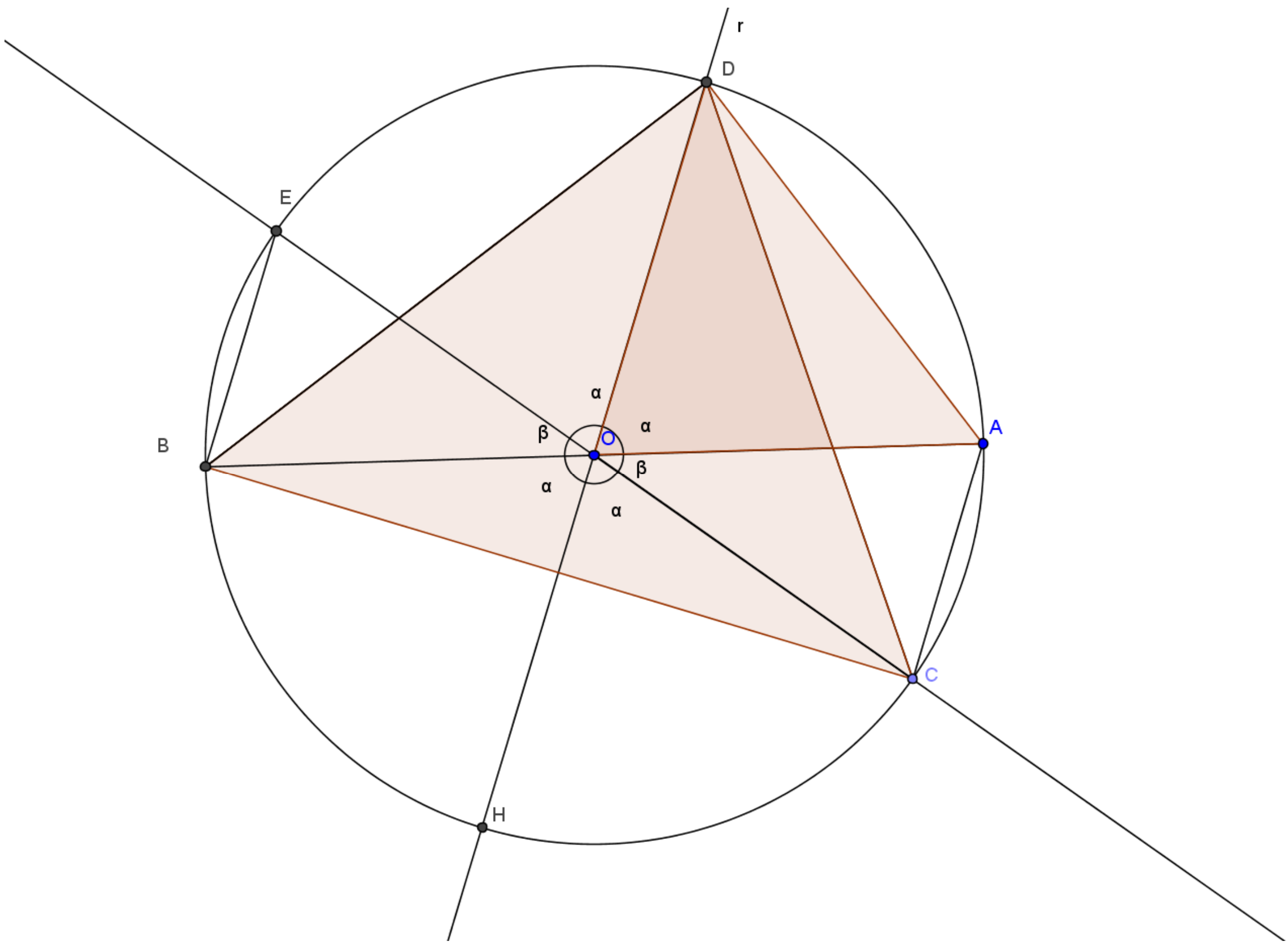


PUNTO 1:
IP: retta r parallela a CA.
TS: DO bisettrice.
DIM: Considero triangoli i OAC e BOE essi hanno: gli angoli COA e BOE congruenti [[x’]] [perché] opposti [al vertice].

BO=EO=OA=OC [[x']] [perché] tutti raggi del cerchio. Allora i due triangoli sono [[=]] [congruenti] per il 1 CRIT. Inoltre sono anche isosceli. (Ora uso α e β chiamando con lo stesso nome gli angoli [[che ho]] [dei quali] ho già dimostrato la congruenza)
CA è parallelo a [[BC x'] [BE perché] la trasversale EC forma con loro angoli [[alt. Int. Congruenti]] [alterni interni congruenti] . CA è parallelo a r e visto che BE è parallelo a CA è anch'esso parallelo a r.
A questo punto si può dire che gli angoli EOD e AOD sono entrambi [[=]] [congruenti] ad α.
Ora considero i triangoli BOD e COD essi hanno:
CO=OD=DO=OB [[x']] [perché?] tutti raggi e gli angoli COD e BOD congruenti [[x']] [perché] somma di angoli congruenti (entrambi [[formati da]] [congruenti ad] α+β)
Ora si può dire che i triangoli BOD e COD sono congruenti [[x]] [per] il 1 CRIT. [quindi ….].



PUNTO 2:
IP: Gli angoli AOD e EOD sono congruenti per [[dim. Prec.]] [la dimostrazione precedente] [[E]] [e] COA e EOB sono congruenti perché opposti [al vertice].
TS: Il triangolo BCD è isoscele.
DIM: L'angolo DCB è la metà di α+β [[x']] [perché] l'angolo al centro è il doppio dell'angolo alla circonferenza (che insiste sullo stesso arco), [come pure l'angolo DBC].
Visto che sono entrambi la metà di α+β essi sono congruenti e il triangolo BCD è isoscele.

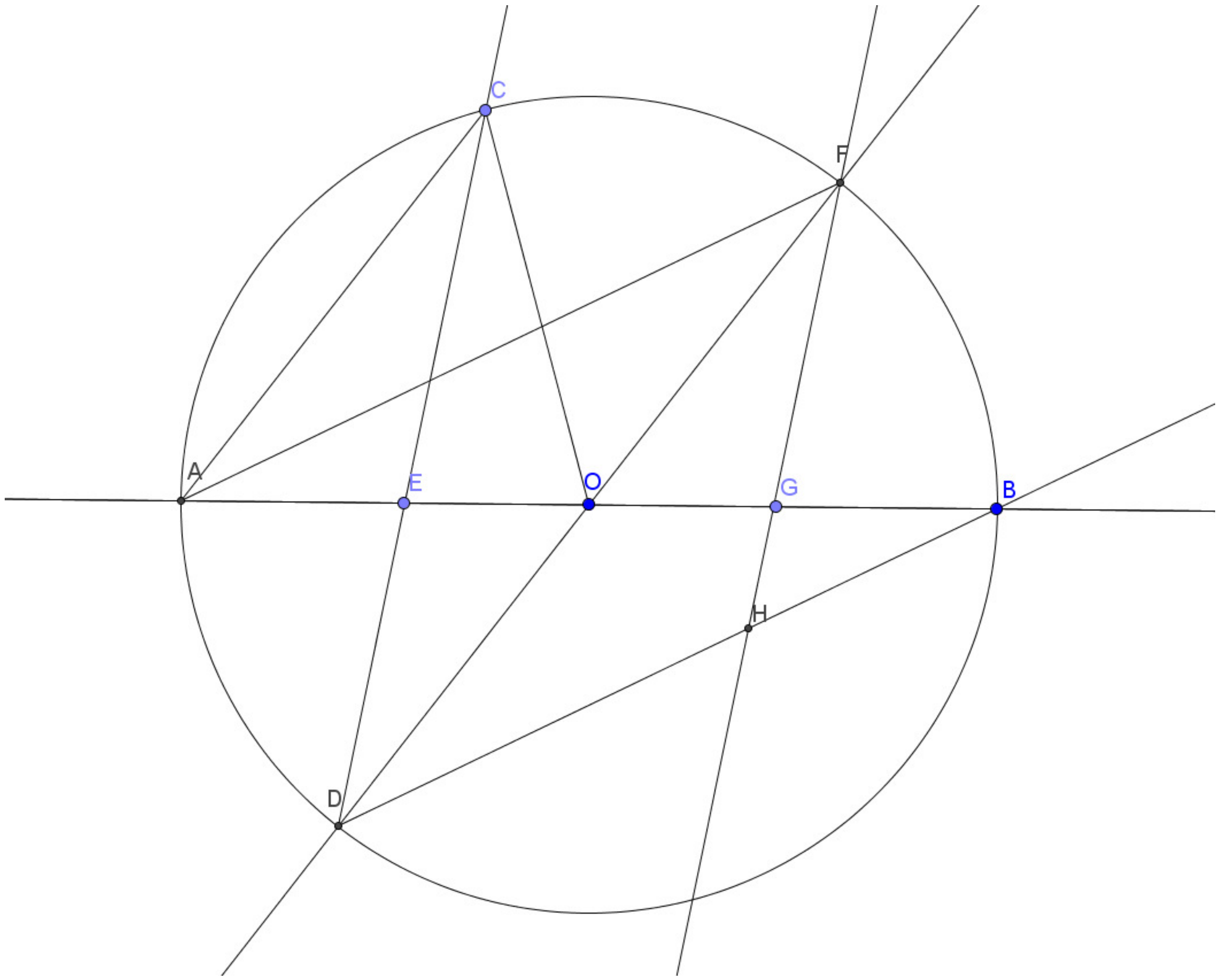


PUNTO 3:
IP: il triangolo BCD è isoscele.
TS: i triangoli BCD e AOD sono simili.
DIM:
Gli angoli COH e HOB sono entrambi congruenti ad α [[x']] [perché] opposti ad esso.
L'angolo BDC è la metà di 2 α ([[x']] [perché] l'angolo al centro è il doppio dell'angolo alla circonferenza) quindi è uguale ad α mentre gli angoli alla base [del triangolo BDC] sono entrambi $\frac{180° - \alpha}{2}$ [[x' di triangolo isoscele]] [perche' angoli di un triangolo isoscele].
Il triangolo AOD ha [[come]] un angolo α mentre gli altri due allora sono uguali a $\frac{180° - \alpha}{2}$, questo perché il triangolo è isoscele (AO=OD [[x']] [perché] entrambi raggi).
I triangoli BCD e AOD sono simili [[x' hanno gli angoli con gli stessi valori]] [perché hanno gli angoli congruenti].

3) Davide Zanella, Liceo B. Russell, Cles, Trento, Classe ???

PUNTO A

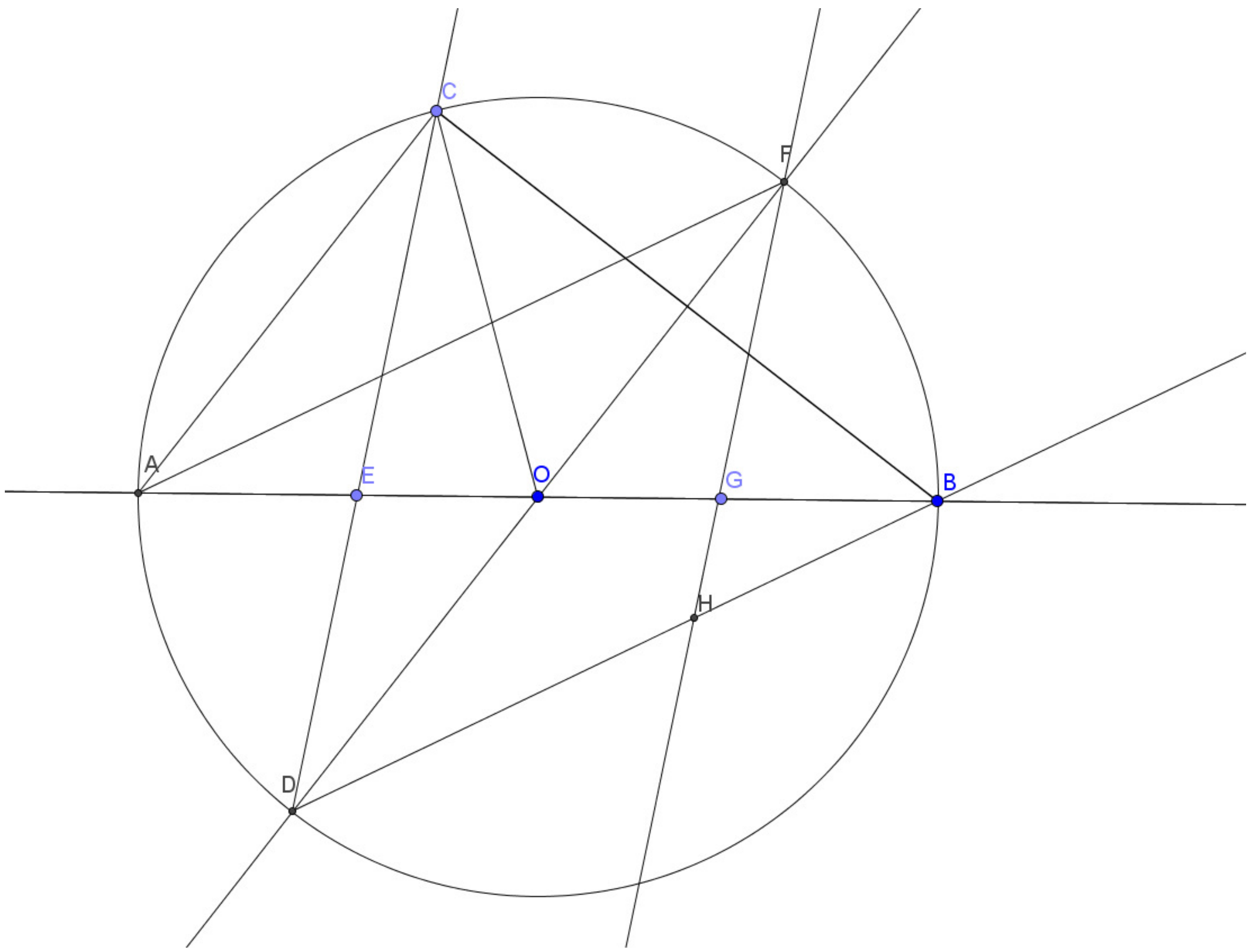
Chiamo F il punto di intersezione di *r* con la circonferenza dalla stessa parte di C rispetto ad AB traccio la parallela [[di]] [a] CD passante per F
chiamo E il punto di intersezione tra CD e AB e G il punto di intersezione tra la [[sua]] parallela passante per F [[e AB]] [a CD e AB].
EA^C = GO^F perché angoli corrispondenti di due rette parallele tagliate dalla trasversale AB
AE^C = OG^F perché angoli corrispondenti di due rette parallele tagliate dalla trasversale AB
quindi AC^E = OF^G perché angoli di triangoli con gli altri due angoli congruenti
AC^D = CD^F perché angoli alterni interni di due rette parallele tagliate dalla trasversale CD
CD^F = DF^H perché angoli alterni interni di due rette parallele tagliate dalla trasversale DF
DF^H = HD^F perché angoli alla base di triangolo isoscele DFH [perché DFH è isoscele ?]
quindi CD^F =FD^B per dimostrazione precedente
quindi DO bisettrice dell'angolo CD^B



PUNTO B

considero DOC
DO=CO perché raggi di circonferenza
allora DOC è un triangolo isoscele
considero DOB

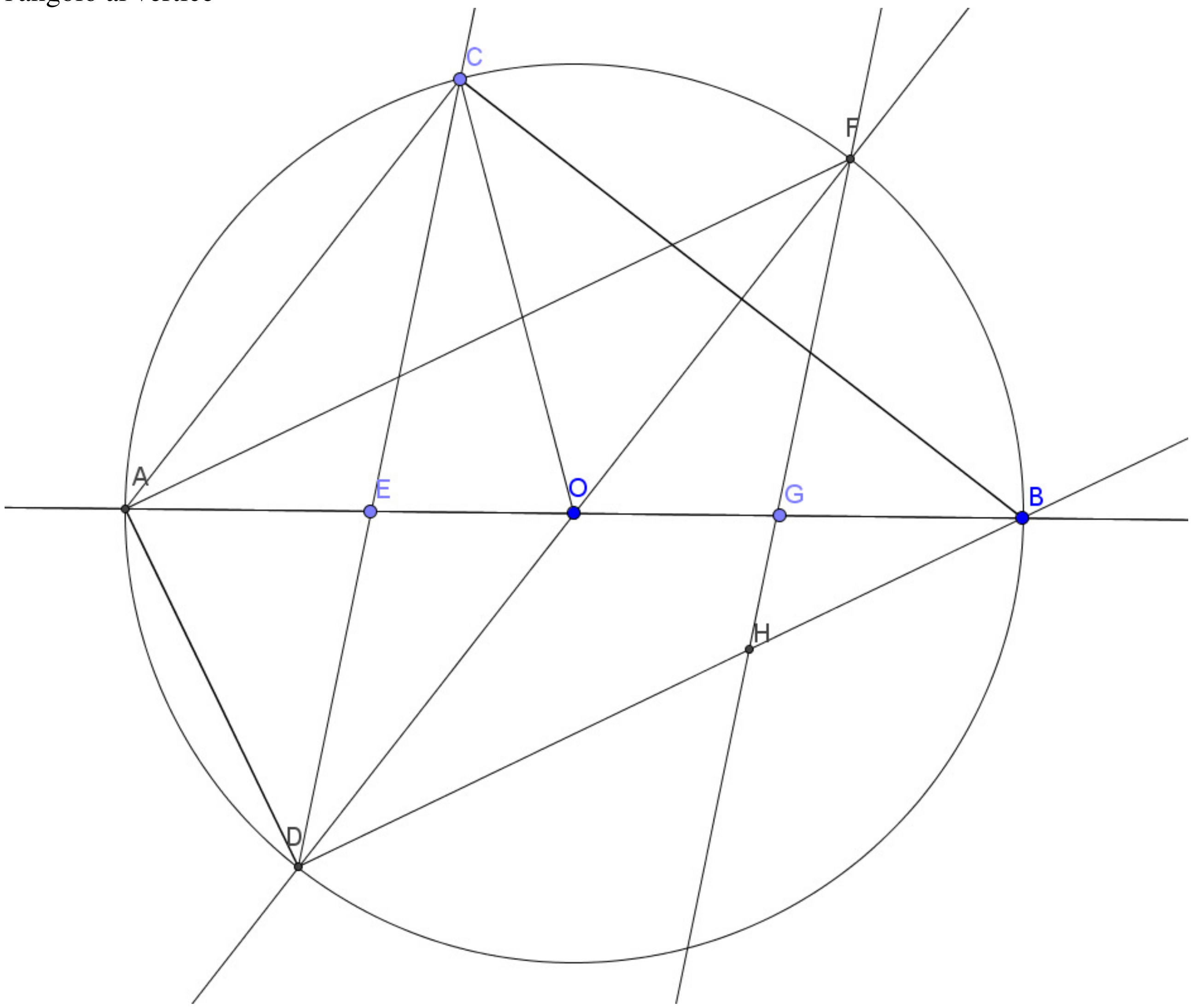
DO=OB perché raggi di circonferenza
allora DOB è un triangolo isoscele
considero DOC e DOB
essi hanno CD^O= BD^O per dimostrazione precedente
siccome sono due triangoli isosceli allora pure DC^O=DB^O
allora per sottrazione angoli congruenti anche DO^C=DO^B
DO in comune
allora DOC=DOB per secondo criterio di congruenza tra triangoli
allora DC=DB
quindi DBC è un triangolo isoscele



PUNTO C

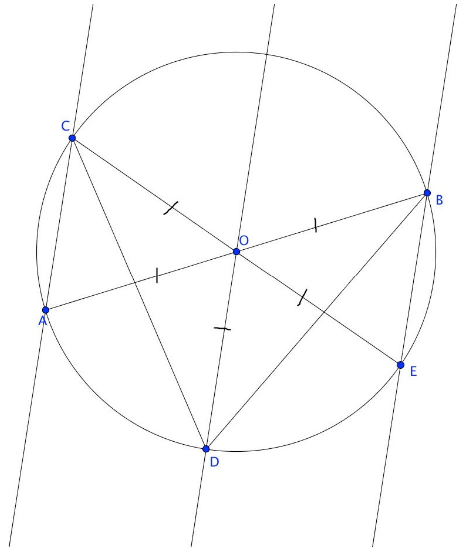
AOF è un triangolo isoscele perché AO e [[AF]] [OF] sono raggi della circonferenza
allora OA^F=OF^A
OF^A=FA^C per angoli alterni interni di due rette parallele tagliate dalla trasversale AF
quindi OA^F=FA^C
allora AF bisettrice di BA^C
quindi OF^A= ½ di OAC = HD^F = FDC per dimostrazione precedente
allora CD^B= OA^C
CA^O=DO^E perché angoli alterni interni di due rette parallele tagliate dalla trasversale AB
DO=AO perché entrambi sono raggi della circonferenza
allora AOD è isoscele
CDB e AOD sono isosceli ed hanno l'angolo al vertice congruente

quindi i due triangoli sono simili perché:[[(180°-x):2=(180°-x):2]] [è una identità !!] dove x è l'angolo al vertice



4) *Elisa-Ianes-1D-liceoB.Russell-Cles (TN)*

PUNTO A

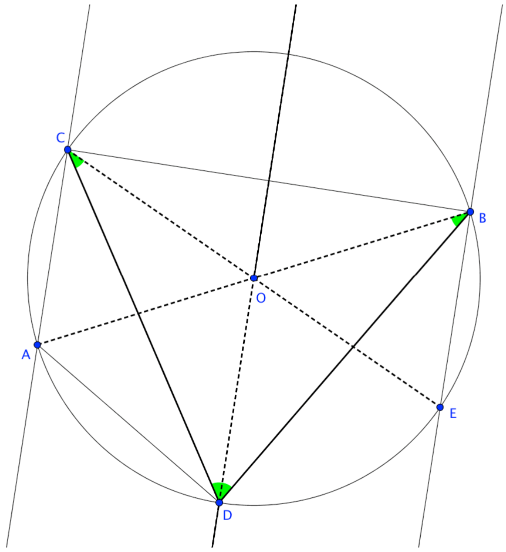


Ipotesi: CA parallela DO
Tesi: DO è bisettrice dell'angolo CDB

Dimostrazione:
traccio la retta parallela a CA passante per il punto B, chiamo E il punto di intersezione della retta con la circonferenza
considero i triangoli CAO e OEB
CO≅AO≅OE≅OB perché raggi della stessa circonferenza
gli angoli: COA≅BOE perché angoli opposti al vertice
i triangoli: CAO≅BOE per primo criterio congruenza triangoli
i triangoli CAO e BOE sono isosceli perché due lati congruenti
gli angoli: OCA≅CAO≅OBE≅BEO per precedente dimostrazione
considero le rette parallele AC e DO con trasversale AO
gli angoli: CAO≅AOD perché angoli alterni interni
considero le rette parallele DO e BE con trasversale EO
gli angoli: BEO≅EOD perché angoli alterni interni
considero i triangoli COD e BOD
gli angoli: EOD≅AOD per precedente dimostrazione
gli angoli: COA≅BOE perché opposti al vertice
gli angoli: COD≅BOD per somma di angoli interni congruenti
DO in comune
CO≅OB per raggi della stessa circonferenza
i triangoli: COD≅BOD per primo criterio congruenza triangoli
gli angoli: ODC≅ODB [[per precedente dimostrazione]] [in particolare].

=> DO è bisettrice dell'angolo CDB

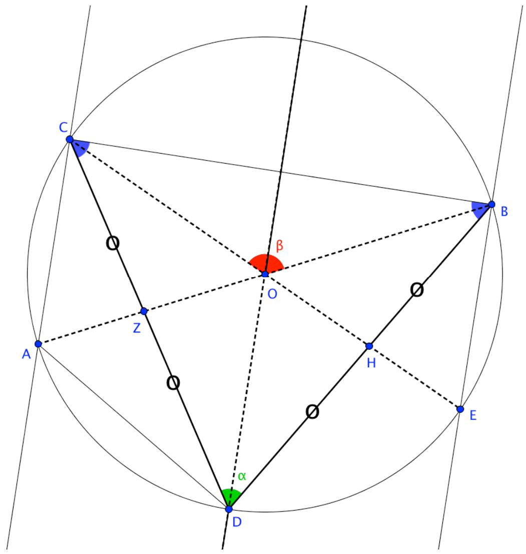
PUNTO B



Tesi: quale particolarità ha il triangolo CDB?

Dimostrazione:
gli angoli: OCD≅CDO≅ODB≅OBD per precedente dimostrazione
CD≅DB per precedente dimostrazione
CO≅OB [[per precedente dimostrazione]] [perché raggi della circonferenza]
il triangolo COB è isoscele perché due lati congruenti
gli angoli: OCB≅CBO perché triangolo isoscele
gli angoli: BCD≅CBD per somma angoli congruenti
gli angoli: BCD e CBD ≠ CDB perché non abbiamo sufficienti dati per dire che sono congruenti
=> il triangolo CDB è isoscele perché ha due lati e due angoli congruenti

PUNTO C



Tesi: i triangoli CDB e AOD sono simili

Dimostrazione:

gli angoli: [[$\alpha = \frac{\beta}{2}$]] $\beta = 2\alpha$ per proprietà della circonferenza

gli angoli: COB≅AOE perché angoli opposti al vertice

considero i triangoli CZO e BOH

CO≅OB perché raggi della stessa circonferenza

gli angoli: OBD≅OCD per dimostrazione precedente

gli angoli: COA≅BOE perché opposti al vertice

i triangoli: CZO≅BOH per il secondo criterio congruenza triangoli

considero i triangoli ZOD e OHD

gli angoli: ODC≅ODB per precedente dimostrazione

OD in comune

ZD≅HD per sottrazione lati congruenti

i triangoli: ZOD≅OHD per primo criterio congruenza triangoli

[in particolare] gli angoli: AOD≅EOD [[per precedente dimostrazione]].

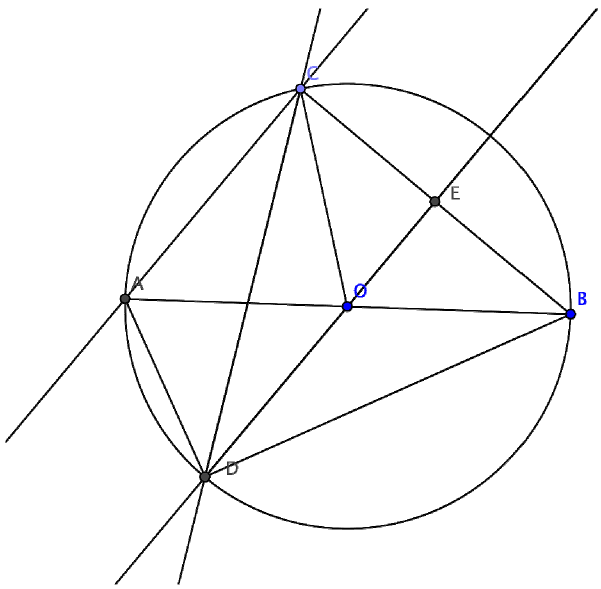
OD è bisettrice dell'angolo AOE

=> gli angoli: AOD≅CDB per precedente dimostrazione [quale ?]

gli angoli: BCD≅CBD≅OAD≅ADO per sottrazione angoli supplementari

=> i triangoli CDB e AOD sono simili perché hanno gli angoli congruenti

5) ***Matteo Caliari 2D Liceo Russell, Cles (Trento)***



IPOTESI: DE ∥ AC (simbolo che indica il parallelismo)

TESI: 1. L'angolo CDE ≅ EDB
2. CDB isoscele
3. CDB e AOD simili

DIMOSTRAZIONE:

l'angolo ACB ≅ $\frac{\pi}{2}$ perché insiste su una semicirconferenza.
Essendo AC ∥ DE l'angolo ACE ≅ DEB perché corrispondenti.
Considero i triangoli COE e EOB, essi hanno:
- OE in comune;
- OC ≅ OB perché entrambi raggi;
- angDEC ≅ angDEB perché entrambi retti.
Quindi i 2 triangoli sono congruenti, in particolare CE ≅ EB.

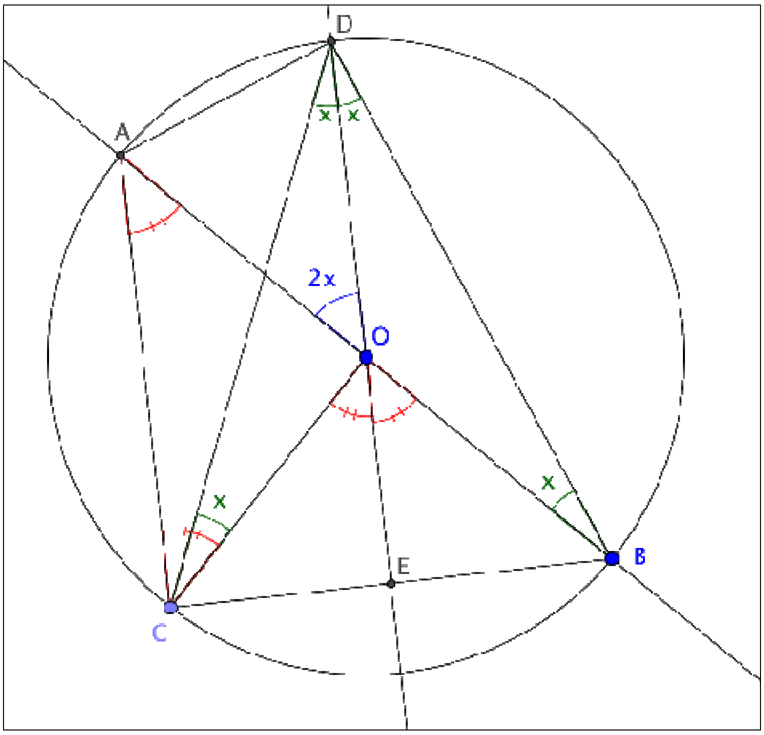
Considero i triangoli DEC e DEB, essi hanno:
-DE in comune;
-CE ≅ EB per dimostrazione precedente;
-angDEB ≅ angDEC per dimostrazione precedente.
Quindi essi sono congruenti, in particolare angCDE ≅ angEDB come volevasi dimostrare.

Inoltre gli angoli DBE e DCE risultano congruenti facendo parte dei triangoli congruenti DEC e DEB. A questo punto possiamo dire che il triangolo DBC è isoscele sulla base BC avendo gli angoli alla base congruenti.

Gli angoli CDE e ACD sono congruenti perché alterni interni.
2CDE ≅ CDB perchè DE bisettrice.
2ACD ≅ AOD perché avendo in comune l'arco il primo è un angolo alla circonferenza mentre il secondo al centro.
2CDE ≅ CDB e 2CDE ≅[2ACD] ≅ AOD, quindi gli angoli CDB e AOD risultano congruenti.
L'angolo ADB ≅ $\frac{\pi}{2}$ perché insiste su una semicirconferenza.
L'angolo DCB = $\frac{\pi}{2}$ - ACD e l'angolo ADE = $\frac{\pi}{2}$ - EDB, essendo ACD ≅ EDB gli angoli DCB e ADE sono congruenti.
L'angolo DAB ≅ DCB perché entrambi angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco DB. Essendo DCB ≅ DBC per dimostrazione precedente, DAB ≅ ADE ≅ DCB ≅ DBC; inoltre con AOD ≅ CDB, i triangoli AOD e CDB sono simili avendo tutti e tre gli angoli congruenti.

6) Francesca Tucci, 2H, Liceo Scientifico "I. Newton", Roma

Ipotesi: AB Diametro



OD // AC

COA è un triangolo isoscele quindi gli angoli in C e in A sono congruenti.
Gli angoli COE e OCA sono congruenti [perché alterni interni delle retta parallele AC e DE tagliate dalla trasversale CO] [[AC//DE]]
Gli angoli EOB e CAO sono congruenti [perché corrispondenti delle rette parallele AC e DE tagliate dalla trasversale AB] [[lo stesso motivo]].

quindi sono congruenti gli angoli COE e EOB e di conseguenza [COD] [[AOD]] e BOD.

I triangoli CDO e BDO sono congruenti per il 1° criterio di congruenza, infatti
CO=BO (raggi)
OD in comune
angoli COD=BOD

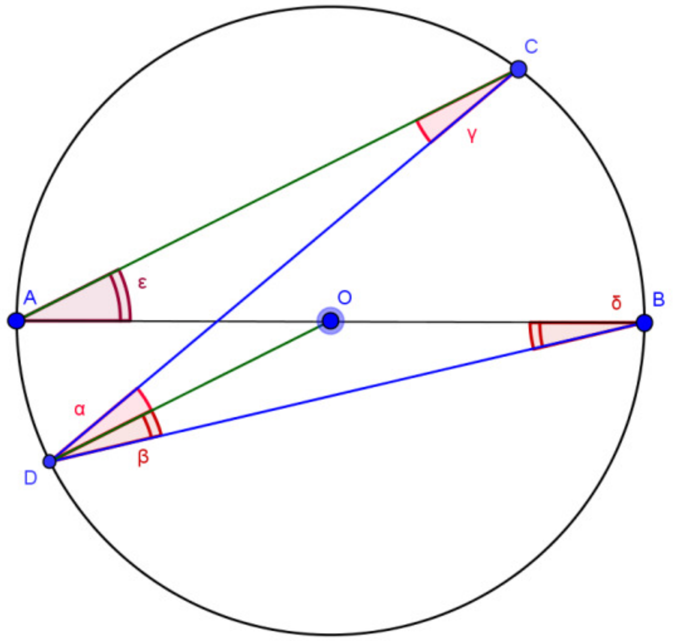
quindi DO è la bisettrice dell'angolo CDB e inoltre CBD è un triangolo isoscele.

Indicando con 2x l'angolo CDB si ha AOD=2x (perché doppio dell'angolo alla circonferenza DBO=x), quindi CDB=AOD.

I due triangoli CDB e AOD sono isosceli e hanno angoli al vertice congruenti, quindi hanno anche gli angoli alla base congruenti e per questo sono simili.

7) Daniela Barbuscio – classe III E Scientifico - Liceo Scientifico - Linguistico "Pitagora" di Rende (CS)

(A)



Osserviamo che:

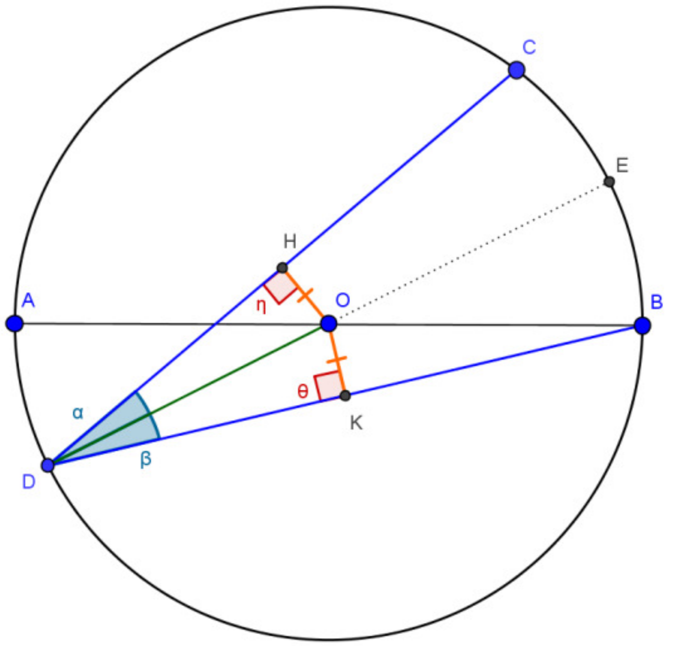
- $\alpha \cong \gamma$, perché angoli alterni interni formati dalle parallele AC e DO con la trasversale CD;

- $\gamma \cong \delta$, perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco AD;

- $\delta \cong \beta$, perché angoli alla base del triangolo isoscele DOB (DO ≅ OB, sono raggi).

Da questo risulta che $\alpha \cong \gamma \cong \delta \cong \beta$, in particolare $\alpha \cong \beta$, quindi DO è la bisettrice di $\widehat{CDB}$.

(B)



Tracciamo le distanze OH e OK da O alle corde rispettivamente DC e DB.
Consideriamo i triangoli DHO e DKO, essi hanno:

- $\alpha \cong \beta$, per dimostrazione precedente;

- $\eta \cong \theta$, perché retti per costruzione, infatti OH e DC sono perpendicolari come

  pure OK e DB;
- DO, in comune.

Pertanto i triangoli DHO e DKO risultano congruenti per il secondo criterio di congruenza generalizzato, avendo congruenti due angoli e un lato, in particolare

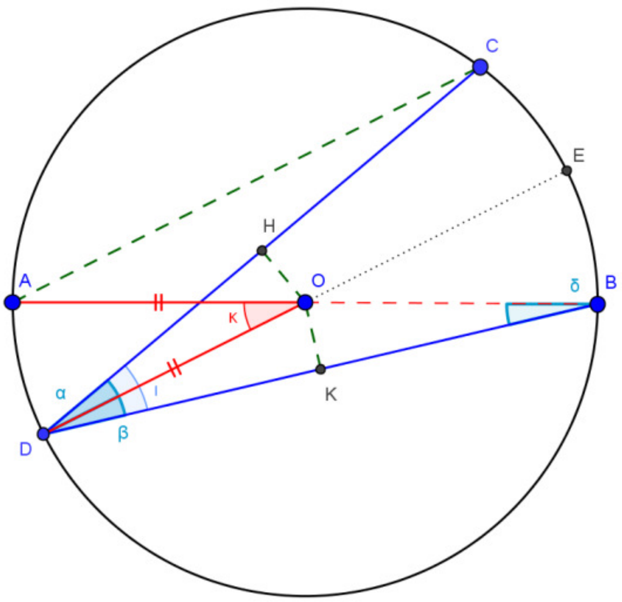
OH≅OK.

Dal teorema che dice "In una circonferenza corde congruenti hanno distanze congruenti dal centro e viceversa", risulta che le corde DC e DB sono congruenti

poiché le loro distanze dal centro sono congruenti (OH≅OK per dimostrazione

precedente).

(C)



Osserviamo che:

- $\kappa \cong 2\delta$, perché κ è un angolo [[alla circonferenza]] [al centro] e δ l'angolo

  [alla circonferenza] [al centro]] che insistono sullo stesso arco AD. Segue dal teorema: "In una circonferenza, un angolo al centro è doppio dell'angolo alla circonferenza che insiste sullo stesso arco";

- $\widehat{CDB} \cong 2\delta$, per dimostrazione precedente (DO è la bisettrice di $\widehat{CDB}$, $\alpha \cong$

  $\delta \cong \beta$).

Quindi $\kappa \cong \widehat{CDB}$, poiché i doppi di uno stesso angolo sono congruenti.

Premettiamo che:

- AO $\cong$ DO, perché raggi della circonferenza, quindi $\frac{AO}{OD} = 1$;

- CD $\cong$ DB, per dimostrazione precedente, quindi $\frac{CD}{DB} = 1$.

Consideriamo i triangoli AOD e CBD, essi hanno:

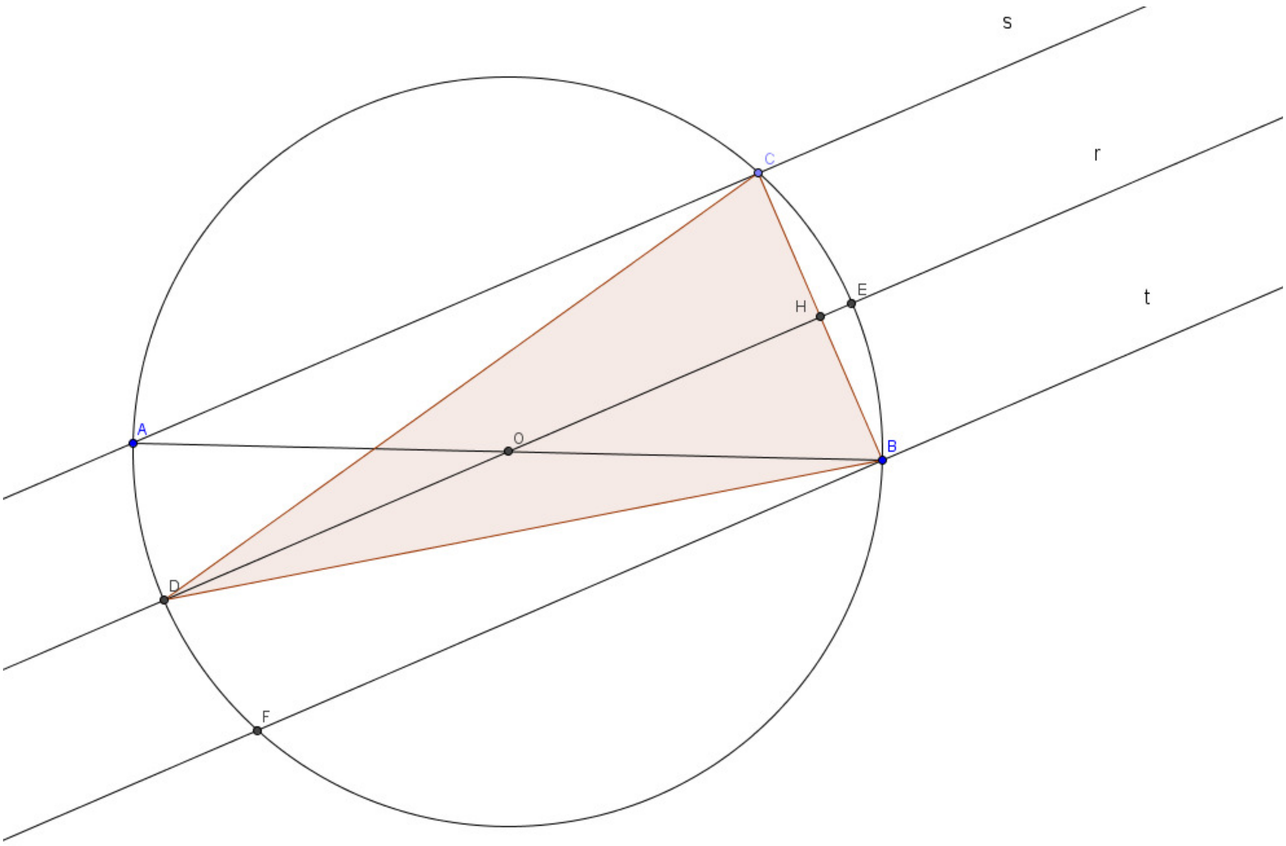
- $\kappa \cong \widehat{CDB}$, per dimostrazione precedente;

- AO:CD = OD:DB, in quanto, permutando i medi otteniamo
  AO:OD = CD:DB per cui vale 1=1, per quanto premesso.

I due triangoli AOD e CDB, risultano simili avendo [[i]] due lati in proporzione e l'angolo compreso congruente.

C.V.D.

8) Francesco Saverio Miliani, Classe 2°G, Liceo Scientifico "Alessi", Perugia (PG).



Ipotesi:

- AB Diametro della circonferenza di centro O
- C appartiene alla circonferenza
- DO // [[AB]] [AC]
- D appartiene all'arco $\widehat{AB}$
- C appartiene all'arco $\widehat{BA}$

Tesi:

a) DO è bisettrice dell'angolo $\hat{CDB}$

b) Il triangolo CDB è isoscele (particolarità del triangolo)

c) Il triangolo CDB è simile al triangolo AOD

Dimostrazione:

Traccio la retta t **[passante per B]** ***// r , che incontra la circonferenza in F oltre che in B***
Nel seguito chiamo s la retta AC

- Considero il Triangolo ABC:

Esso è rettangolo poiché l'angolo ACB è retto, in quanto insiste su una semicirconferenza.
Ciò implica che **CB è perpendicolare alla retta s**

- Considero le rette s, r, t parallele rispettivamente per ipotesi e per costruzione, tagliate dalle due trasversali CB e AB:

  Per il piccolo teorema di Talete, a segmenti congruenti sulla prima trasversale corrispondono segmenti congruenti sulla seconda trasversale, poiché **AO è congruente ad OB (raggi)** si ha che **CH è congruente ad HB**

- Poiché una perpendicolare a una retta è perpendicolare anche alle rette parallele ad essa.Essendo **CB perpendicolare ad s** , è perpendicolare anche alle sue parallele **r, t (e quindi ai segmenti AC, DH e FB),**

- Considerando quindi il Triangolo CDB, noteremo che:
  - CH è congruente ad HB
  - DH è perpendicolare a CB

Quindi la perpendicolare [condotta da D] al segmento CB passa per il punto medio H, pertanto DH è asse di CB e perciò **il triangolo CDB è isoscele sulla base CB**, come volevasi dimostrare (b). **In particolare DO sarà la bisettrice dell'angolo CDB,** angolo al vertice del triangolo isoscele CDB, poiché l'altezza di un triangolo isoscele è anche mediana della base e bisettrice dell'angolo al vertice, come volevasi dimostrare (a).

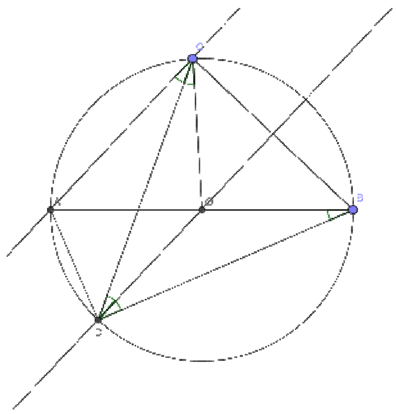
- Gli angoli BOE e AOD sono **congruenti poiché opposti al vertice. L'angolo BDE è uguale alla metà dell'angolo BOE**, poiché rispettivamente angoli alla circonferenza e al centro di una stessa circonferenza che insistono sullo stesso arco.
  Ma se BDE è uguale alla metà di BDC, per dimostrazione precedente, allora **l'angolo BDC è congruente all'angolo BOE**, e per proprietà transitiva della congruenza, **l'angolo BDC è congruente all'angolo AOD**.

- Consideriamo ora i due triangoli BDC ed AOD:

- Gli angoli CDB ed AOD sono congruenti per dimostrazione precedente
- Il triangolo BDC è isoscele per dimostrazione precedente
- Il triangolo AOD è isoscele poiché i due lati AO e OD sono congruenti in quanto raggi

Ciò implica che **I due triangoli [isosceli] AOD e CDB sono simili**, poiché hanno l'angolo al vertice congruente e quindi, per somma degli angoli interni, avranno congruenti anche gli angoli alla base, come volevasi dimostrare (c).

9) Simmaco De Lillo, classe 3^G, Liceo Scientifico U.Dini, Pisa



Hp: A,B,C, D appartengono alla circonferenza di centro O e diametro AB, AC ∥ DO

1)

Th: ∠CDO = ∠ODB

Dim : ∠ACD = ∠CDO (gli angoli alterni interni di due rette parallele sono uguali);

∠ACD = ∠ABD(i 2 angoli [alla circonferenza] insistono sulla medesima corda AD e 2 angoli [alla circonferenza] che insistono sulla medesima corda sono congruenti)

Il triangolo DOB è isoscele sulla base DB perché DO = OB (sono raggi), ne consegue che i 2

angoli alla base ($\angle$OBD e $\angle$ODB)sono congruenti(gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono

congruenti).

$\angle$OBD = $\angle$ABD perché A, O e B sono allineati (AB essendo diametro della circonferenza passa per

il centro)
L'uguaglianza gode della proprietà transitiva quindi:

$\angle$CDO = $\angle$ACD =$\angle$ABD = $\angle$OBD = $\angle$ODB ovvero $\angle$CDO = $\angle$ODB Q. E. D.

2)

Il triangolo COD è isoscele sulla base CD perché CO = DO (sono raggi), ne consegue che i 2

angoli

alla base ($\angle$ODC e $\angle$DCO)sono congruenti(gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono

congruenti); per motivo analogo $\angle$OCB = $\angle$OBC.

$\angle$DCB = $\angle$DCO + $\angle$OCB ; $\angle$DBC = $\angle$DBO + $\angle$OBC ma $\angle$OCB = $\angle$OBC e $\angle$DBO = $\angle$ODB =

$\angle$ODC = $\angle$DCO quindi $\angle$DBC = $\angle$DCO + $\angle$OCB ne consegue che $\angle$DBC = $\angle$DCO.

Il triangolo CDB ha 2 angoli congruenti quindi è un triangolo isoscele (Se un triangolo ha due angoli congruenti, allora è isoscele)

3)

Th: i triangoli CDB e AOD sono simili

Dim: ∠AOD =2 ∠ABD (l'angolo al centro ha ampiezza doppia rispetto all'angolo alla circonferenza che insiste sulla medesima corda)

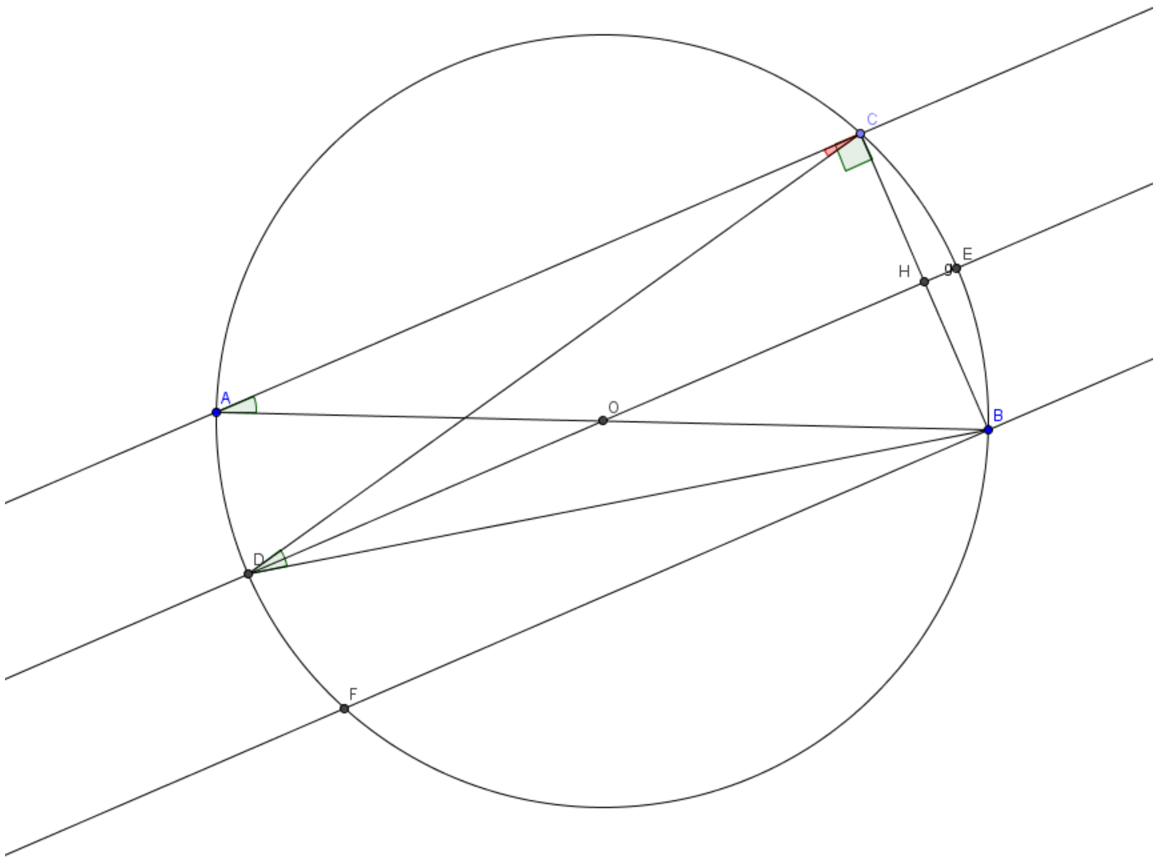
∠CDB =2 ∠ODB (DO è bisettrice dell'angolo ∠CDB) ma ∠ODB =∠OBD =∠ABD quindi ∠CDB

=2 ∠ABD per questo ∠CDB = ∠AOD.

Chiamo k il rapporto tra AO e CD $k = \dfrac{\overline{AO}}{\overline{CD}}$; $\dfrac{\overline{OD}}{\overline{BD}} = \dfrac{\overline{AO}}{\overline{CD}} = k$ perché $\overline{OD} = \overline{AO}$ (raggi) e ($\overline{BD} = \overline{CD}$)

I triangoli AOD e CDB sono simili per il 2 criterio infatti hanno 2 coppie di lati proporzionali $\left(\dfrac{\overline{OD}}{\overline{BD}} = \dfrac{\overline{AO}}{\overline{CD}} = k \right)$ e gli angoli compresi congruenti (∠CDB = ∠AOD) . Q. E. D.

10) Giacomo Patuani, classe 2G, Liceo Scientifico Alessi, Perugia



[Nella figura il punto E va al posto del punto H]

<u>Ipotesi</u>
O centro della circonferenza
AB diametro
C appartiene all'arco AB
DO//AC
D appartiene all'arco BA
<u>Tesi</u>

a) **DO bisettrice dell'angolo BDC**
b) **Il triangolo BDC è isoscele (Particolarità del triangolo)**
c) **BDC è simile ad AOD**

Dimostrazione
Il triangolo ABC è inscritto in una semicirconferenza pertanto l'angolo ACB è retto. Quindi AC è perpendicolare a BC
Traccio la perpendicolare a BC passante per B che è parallela a DO e AC . Essa incontra la circonferenza in un ulteriore punto F
Considero ora il fascio improprio di rette BF, DO e AC tagliate dalle trasversali AB e CB in particolare AO congruente a OB perché raggi di conseguenza CE congruente a EB per il piccolo teorema di Talete.
La retta DO essendo paralla ad AC risulta anch'essa perpendicolare a CB.
I triangoli DEC e DBE sono congruenti perché hanno DE in comune, CE congruente ad EB (per dimostrazione precedente) e l'angolo in E retto (per dimostrazione precedente). In particolare gli angoli BDE e EDC sono congruenti e quindi DO è bisettrice dell'angolo BDC (a). Segue anche che DB è congruente ad DC quindi il triangolo BDC è isoscele(b)
Considero gli angoli BDC e BAC che insistono sullo stesso arco di conseguenza hanno la stessa ampiezza.
Considero le parallele DO e AC tagliate dalla trasversale AB formano angoli alterni interni congruenti di conseguenza gli angoli DOA e BAC sono congruenti; Per la proprietà transitiva l'angolo DOA è congruente all'angolo BDC.
Il triangolo DOA isoscele perché DO e OA sono congruenti in quanto raggi.
Considero i triangoli DOA e BDC sono entrambi isosceli sulle basi DA e BC rispettivamente per dimostrazione precedente, hanno gli angoli al vertice congruenti e quindi anche gli angoli alla base congruenti. Quindi il triangolo DOA è simile al triangolo BDC (c). Cvd

Nota: Gli angoli e i lati vanno tutti letti in senso antiorario