FLAT*landia*

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" (Edwin A. Abbott)

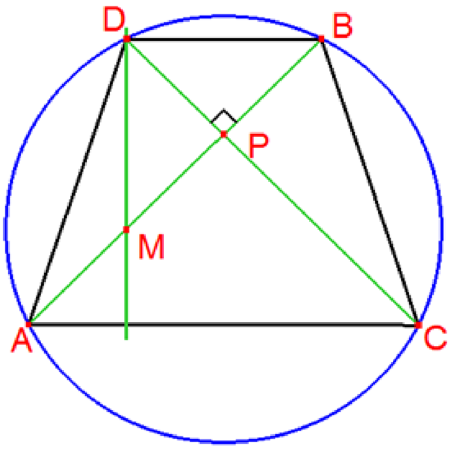
Flatlandia 9 - 23 marzo 2016 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

Sia data una circonferenza e due sue corde congruenti AB e CD fra loro perpendicolari e incidenti nel punto P.

1) Dimostrare che il quadrilatero $ACBD$ è un trapezio.
2) Se $AP = 2\ PB$ ed M è il punto medio di AP, dimostrare che la retta DM è altezza del trapezio.

Motivare tutte le risposte.



Commento

Sono giunte quattro risposte, due da classi terze e due da classi seconde, tutte di Liceo scientifico.

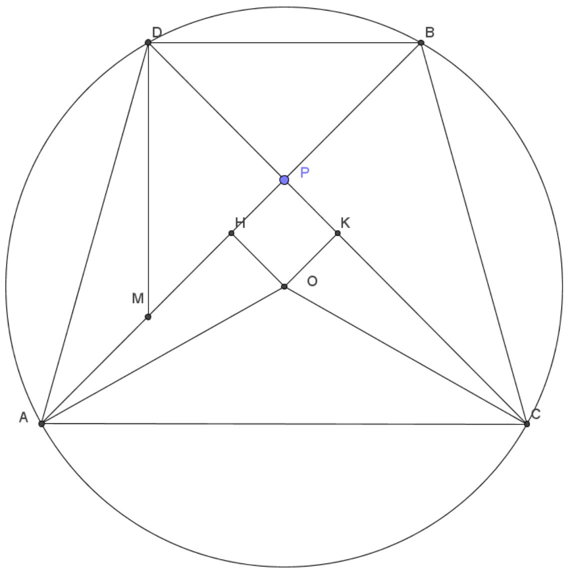
Il problema poneva due quesiti. Nel primo si chiedeva di dimostrare che, data una circonferenza e due sue corde fra loro congruenti e perpendicolari, esse individuavano un trapezio. Nel secondo quesito si chiedeva di dimostrare che, supposto che il punto di intersezione delle due corde le dividesse in due parti una doppia dell'altra, la congiungente un vertice del trapezio con il punto medio della maggiore delle due risultava altezza del trapezio.
Le soluzioni arrivate rispondono in maniera sostanzialmente corretta ad entrambi i quesiti usando anche una buona proprietà di linguaggio.

Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:
- Liceo "Aristosseno", Taranto (TA)
- Liceo Scientifico "Cafiero", Barletta (BT)
- Liceo Scientifico "U.Dini", Pisa (PI)
- Liceo Scientifico "XXV Aprile", Portogruaro (VE)

NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni

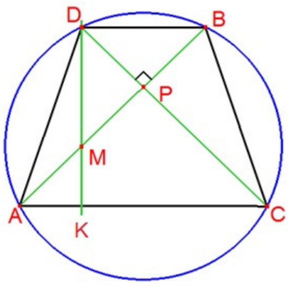
1) *Soluzione proposta dalla classe 3^ N, Liceo "Aristosseno", Taranto*



1) Congiungiamo i vertici A e C del quadrilatero con il centro O della circonferenza . Il triangolo AOC è isoscele poiché OA ed OC sono raggi della stessa circonferenza e quindi gli angoli $O\hat{A}C$ e $O\hat{C}A$ sono congruenti.
Tracciamo poi le distanze OH e OK del centro O della circonferenza dalla due corde AB e CD rispettivamente .Essendo le due corde congruenti ,sarà : $OH \cong OK$ e quindi i triangoli rettangoli OHA e OKC sono congruenti avendo $OA \cong OC$ ed $OH \cong OK$.
Dalla congruenza di questi triangoli deduciamo che gli angoli $O\hat{A}H$ e $O\hat{C}K$ sono congruenti e quindi il triangolo APC ha gli angoli alla base congruenti (perché somme di angoli congruenti) ed è perciò un triangolo isoscele e rettangolo in P(l'angolo in P è retto) : $P\hat{A}C \cong P\hat{C}A = 45°$.
Ma $P\hat{A}C \cong P\hat{D}B$ e [[$P\hat{C}A \cong P\hat{D}B$]] [$P\hat{C}A \cong P\hat{B}D$] in quanto angoli alla circonferenza che insistono sugli stessi archi BC e AD rispettivamente. Da quanto detto deduciamo che le corde AC e BD sono parallele poiché le trasversali AB e CD formano angoli alterni interni congruenti con esse.
Il quadrilatero ABCD è allora un trapezio, ed è anche isoscele perché le sue diagonali sono congruenti.

2) Nel caso in cui AP = 2 PB si ha che MP = PB ; il triangolo MBD è isoscele poiché DP è altezza e mediana sulla sua base MB .E poiché DP è anche bisettrice dell'angolo al vertice $M\hat{D}B$, l'angolo $B\hat{D}M$ è retto. Ma le rette di AC e BD sono parallele e poiché DM è perpendicolare a DB ,essa sarà anche perpendicolare ad AC e quindi la retta DM è altezza del trapezio.

2) ***Soluzione proposta da Chiara Iovine e Vittorio Dal Negro, Classe 2^B, Liceo Scientifico "Cafiero", Barletta (BT)***



Ip: Y circonferenza; AB, CD corde; $AB \cong CD \wedge AB \perp CD$; $AB \cap CD = P$
Ts: ACBD trapezio

Dim: $AB \cong CD$ x ip $\Rightarrow$ AB arco $\cong$ CD arco x archi corrispondenti a corde congruenti
$\Downarrow$ x angoli alla circonferenza che insistono su archi congruenti
$A\hat{C}B \cong D\hat{A}C$ [1]
$B\hat{A}D \cong B\hat{C}D$ x angoli alla circonferenza che insistono su uno stesso arco (BD) [2]
[1] $\wedge$ [2] $\Rightarrow$ $B\hat{A}C \cong D\hat{C}A$ x differenza angoli
$\Downarrow$ x archi corrispondenti ad angoli congruenti
AD arco $\cong$ BC arco
$\Downarrow$ x corde corrispondenti ad archi congruenti
$AD \cong CB$
$C\hat{D}B \cong D\hat{C}A$ x angoli alla circonferenza che insistono su archi congruenti $\wedge$ alterni interni
$\Downarrow$ x criteri parallelismo
$DB \parallel AC$
$\Downarrow$ x definizione
ACBD trapezio

2) Ip: Y circonferenza; AB, CD corde; $AB \cong CD \wedge AB \perp CD$; $AB \cap CD = P$; $AP = 2PB$; $AM \cong MP$
Ts: DM altezza

Dim: PBD triangolo rettangolo isoscele x dimostrazione precedente [(quale ?)]
$\Downarrow$ x teorema diretto
$P\hat{D}B \cong P\hat{B}D = 45°$ [3]
$AM \cong MP \wedge AP \cong 2PB$ x ipotesi
$\Downarrow$ x transitività
$MP \cong PB$
MPD retto x ipotesi
Considero MPD $\wedge$ DPB triangoli rettangoli: $MP \cong PB$ x dimostrazione
DP in comune
$\Downarrow$ x 1° criterio
$MPD \cong DPB$ triangoli
$\Downarrow$ x elementi corrispondenti
$M\hat{D}P = 45°$ [4]
[3] $\wedge$ [4] $\Rightarrow$ $B\hat{D}K = 90°$ x somma angoli
$\Downarrow$ x definizione

DK⊥ BD

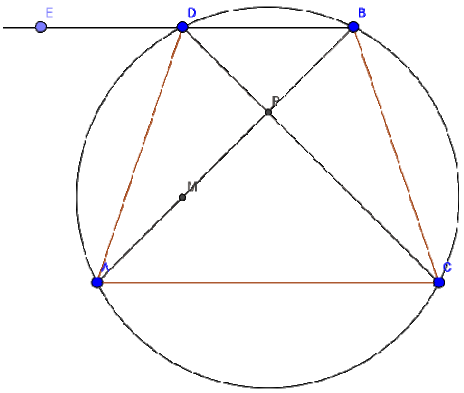
⇓ x parallelismo

DK⊥ AC

⇓ x definizione

DK altezza

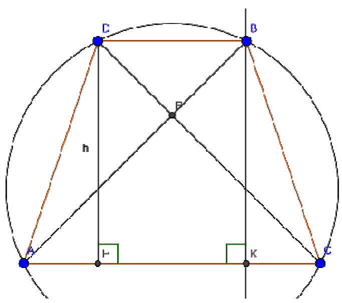
3) ***Soluzione proposta da Simmaco De Lillo, Classe 3G, Liceo Scientifico U.Dini, Pisa***



1) Hp : $\overline{AB} = \overline{CD}$; $AB \perp CD$ A, B, C, D appartengono alla medesima circonferenza.

Th: ACBD è un trapezio.
Dim: $\angle ACB = \angle DAC$ (entrambi sono angoli alla circonferenza che insistono su corde congruenti AB e DC).
$\angle ADB = 180° - \angle ACB$ il quadrilatero è ciclico (i vertici appartengono alla medesima circonferenza) e quindi la somma degli angoli opposti è 180°.
Sia E un punto appartenente alla semiretta BD dalla parte di D.
Se [[$\angle ADC = 180° - \angle ACB$]] [$\angle ADB = 180^{O} - \angle ACB$], $\angle ADE = \angle ACB = \angle DAC$ (ADE è l'angolo esterno a ADB quindi: $\angle ADE + \angle ADB = 180°$).
2 rette DB e AC tagliate da un' altra retta DA formano angoli alterni interni uguali ($\angle ADE = \angle DAC$)quindi [$DB \parallel AC$].
Il quadrilatero ACBD ha una coppia di lati paralleli quindi è un trapezio. Q. E. D.

2) Hp: $\overline{AP} = 2\overline{PB}$; $\overline{AM} = \overline{MP}$



Th: $DM \perp AC$
Dim:
Siano H e K le proiezioni ortogonali rispettive di D e B sulla base AC.
Si considerino i triangoli DHC e BKA
I 2 triangoli sono rettangoli perche se D è un punto ed AC è un segmento, la proiezione ortogonale H del punto D su AC è il piede della perpendicolare condotta da D ad AC quindi $\angle DHC$ è retto e con discorso analogo si può mostrare che $\angle BKA$ è retto.
$\overline{DH} = \overline{BK}$ (La distanza fra 2 rette parallele è costante); DH e BK sono cateti dei rispettivi triangoli;
$\overline{CD} = \overline{AB}$ (Per ipotesi); CD e AB sono ipotenusa dei rispettivi triangoli.
I triangoli DHC e BKA sono congruenti perché hanno rispettivamente un cateto e l'ipotenusa congruente.
Essendo i triangoli congruenti $\angle CAB = \angle DCA = \alpha$
Inoltre $\angle DCA = \angle BDC = \alpha$ (Gli angoli alterni interni formati da 2 rette parallele e un trasversale sono congruenti) e per lo stesso motivo $\angle BAC = \angle DBA = \alpha$.

Il triangolo DBP è formato da un angolo retto e da 2 angoli di ampiezza α quindi 2α = 90°

(2α+90°=180° la somma degli angoli interni di un triangolo è 180°).

I triangoli DMP e DPB sono congruenti infatti hanno entrambi un angolo retto(DPM e DPB) un

cateto in comune (DP) e l'altro cateto congruente($\overline{AP} = 2\overline{PB}$ (per ipotesi) ma $\overline{AP} = 2\overline{AM}$ (M

punto medio di AP) quindi [[$\overline{PM} = \overline{AM}$]] [$\overline{PM} = \overline{PB}$]) quindi $\angle DBM = \angle DMB = \alpha$.
Sia I il punto d'intersezione tra DM e AC

Anche l'angolo AMI ha ampiezza α infatti è l'angolo opposto al vertice dell'angolo DMB (che ha

ampiezza α)

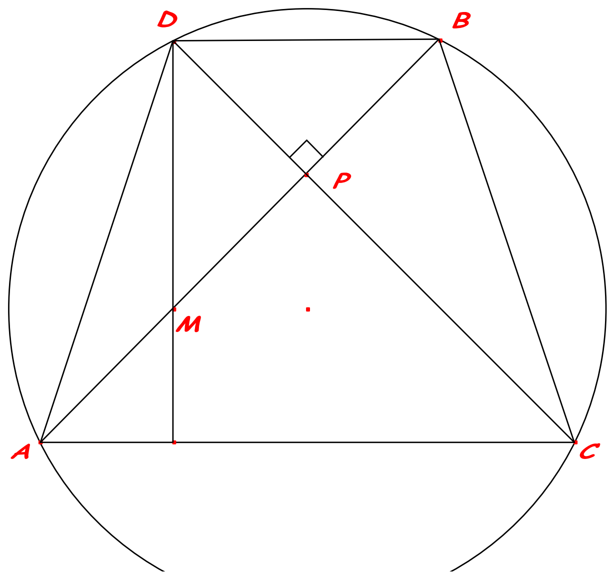
Il triangolo AMI è retto infatti ha 2 angoli di ampiezza α (MAI e AMI) e di conseguenza l'angolo

MIA è retto (la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto ma essendo la somma

di due angoli (MAI e AMI) un angolo retto (2 α =90°) l'altro angolo deve essere un angolo retto)

quindi $DM \perp AC$. Q. E. D.

4) Soluzione proposta da Mario Veshaj, Classe II D, Liceo Scientifico "XXV Aprile" Portogruaro (VE)



Dim 1)

Gli archi AB e CD sono congruenti perché sottesi da corde congruenti per ipotesi.

Gli angoli ACB e CAD insistono sugli archi congruenti AB e CD. Per questo sono congruenti e, inoltre, per essi si ha: ACB ≅ ACD + BCD e CAD ≅ CAB + BAD.

Consideriamo ora gli angoli BCD e BAD. Essi insistono sullo stesso arco BD. Di conseguenza sono congruenti.

Allora gli angoli ACD e CAB sono congruenti perché differenze di angoli congruenti.

CAB ≅ BDC, poiché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco BC.

Poiché gli angoli ACD ≅ CAB ≅ BDC, allora ACD ≅ BDC.

Prendiamo in considerazione gli angoli ACD e BDC. Essi sono alterni interni rispetto alle rette BD e AC tagliate dalla trasversale CD. Poiché sono congruenti, BD // AC.

ACBD è un trapezio poiché è un quadrilatero con due soli lati paralleli.

Dim 2)

Gli angoli ACD e ABD sono congruenti poiché insistono sulla stessa corda AD.

Poiché gli angoli ACD ≅ BDC per Dim 1) e ACD ≅ ABD, allora ABD ≅ BDC.

Il triangolo DPB è isoscele poiché gli angoli alla base ABD e BDC sono congruenti.

Pertanto BP ≅ DP.

Poiché BP ≅ MP, BP ≅ MP ≅ DP.
Consideriamo il triangolo [[DMP]] [DMB]. DP è mediana di BM e congruente [alla meta' di] quest'ultimo.
Questo accade solo in un triangolo rettangolo, in cui BM è l'ipotenusa. L'angolo BDM è allora retto perché opposto all'ipotenusa.
Siccome l'angolo BDM è retto, BD ⊥ MD.
Considerando che BD || AC per Dim 1), MD ⊥ AC. Pertanto DM altezza ACBD.