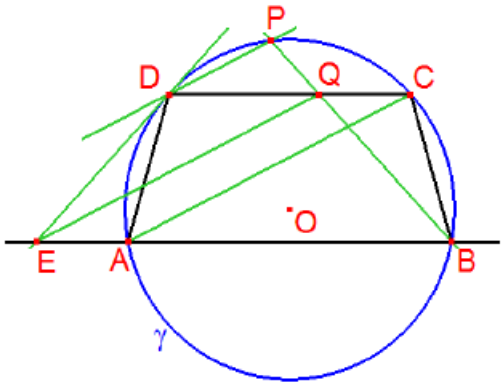
FLATlandia

"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" (Edwin A. Abbott)

Flatlandia 9 - 23 novembre 2015 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

1. Provare che un trapezio è inscrivibile in una circonferenza se e soltanto se è isoscele.



2. Il trapezio $ABCD$, con AB e DC paralleli e $AD < DC$, è inscritto in una circonferenza γ. Sia DP la corda di γ parallela ad AC e supponiamo inoltre che la tangente a γ in D intersechi la retta AB in E e che PB e DC si taglino in Q (vedi figura). Provare che EQ è congruente ad AC.
3. Provare che se AD e DC sono congruenti, allora DP è la tangente alla circonferenza γ in D.

Giustificare tutte le risposte.

Commento

Sono giunte due (solo due!) risposte, una da una classe prima e una da una classe terza, entrambe di Liceo scientifico.

Il problema poneva tre quesiti. Nel primo si chiedeva di dimostrare che l'unico trapezio inscrivibile in una circonferenza e' quello isoscele. Nel secondo di provare, partendo da un trapezio (isoscele) inscritto in una circonferenza avente il lato obliquo di lunghezza inferiore a quella della base minore, che due particolari segmenti erano tra loro congruenti. Infine nel terzo quesito si chiedeva di esaminare il caso in cui il lato obliquo risultava congruente alla base minore.

Delle due risposte giunte una affronta soltanto il primo quesito, dando una risposta parziale, mentre l'altra risponde a tutti e tre i quesiti in maniera sostanzialmente corretta anche se non mancano alcune imprecisioni e lungaggini.

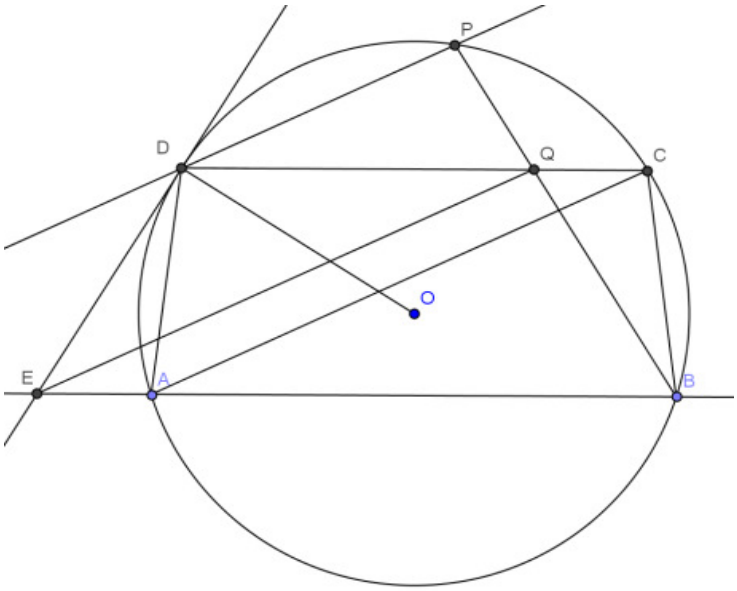
Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:

- Liceo "Aristosseno", Taranto (TA)
- Liceo Scientifico "B. Russell", Cles (TN)

NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni

Soluzione proposta dalla classe III N, Liceo "Aristosseno", Taranto

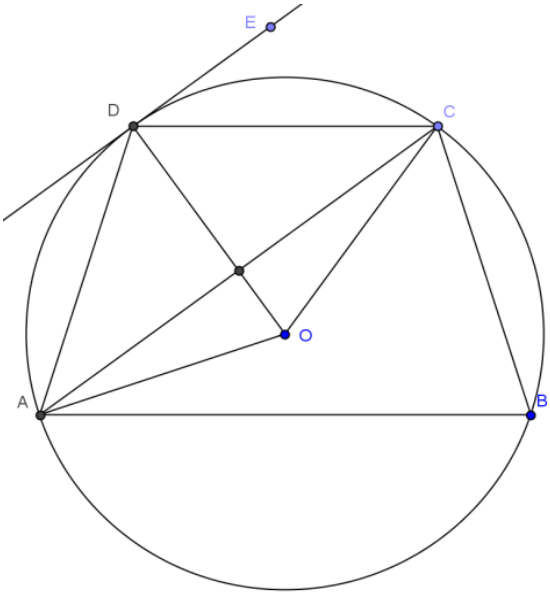


1.La condizione necessaria e sufficiente affinché un quadrilatero sia inscrivibile in una circonferenza è che esso abbia gli angoli opposti supplementari. Nel trapezio [isoscele] ABCD gli angoli adiacenti alle basi sono congruenti [[(coniugati interni)]] e perciò : BAD + BCD = BAD + ADC = 180° e ABC + ADC = ABC + BCD = 180° [proprietà degli angoli coniugati interni] e quindi : BAD + BCD = ABC + ADC [e il trapezio e' inscrivibile in una circonferenza] .Viceversa, se un trapezio ABCD è inscrivibile in una circonferenza ,BAD + BCD = ABC + ADC [= 180°] e BAD + ADC = ABC + BCD = 180° (coniugati interni) perciò BAD = ABC e BCD = ADC [già questo ci permette di affermare che il trapezio ABCD e' isoscele] . Ma BAD insiste sull'arco BD = BC + DC e ABC insiste sull'arco AC = AD + DC e quindi gli archi BD e AC sono congruenti Sottraendo da entrambi questi archi l'arco comune DC, sono congruenti gli archi AD e BC. La congruenza degli archi implica la congruenza delle corde AD e BC, che sono i lati obliqui del trapezio , che è quindi isoscele.

2. Osserviamo anzitutto che il trapezio ha gli angoli opposti supplementari : BCD +BAD= 180° ,ma anche DAE + BAD = 180° in quanto adiacenti e quindi BCD = DAE. I triangoli BCQ e AED sono congruenti per il II criterio di congruenza .Infatti AD = BC (lati obliqui del trapezio isoscele),CBQ = EDA (angoli alla circonferenza che insistono su archi congruenti [perché sono congruenti ?]) e BCQ = DAE come già detto.

Dalla congruenza dei triangoli segue che AE = CQ ,ed essendo anche AE parallelo a CQ (perché appartengono alle rette delle basi del trapezio),il quadrilatero EACQ è un parallelogramma.

Sarà allora EQ parallelo ad AC ed EQ = AC.

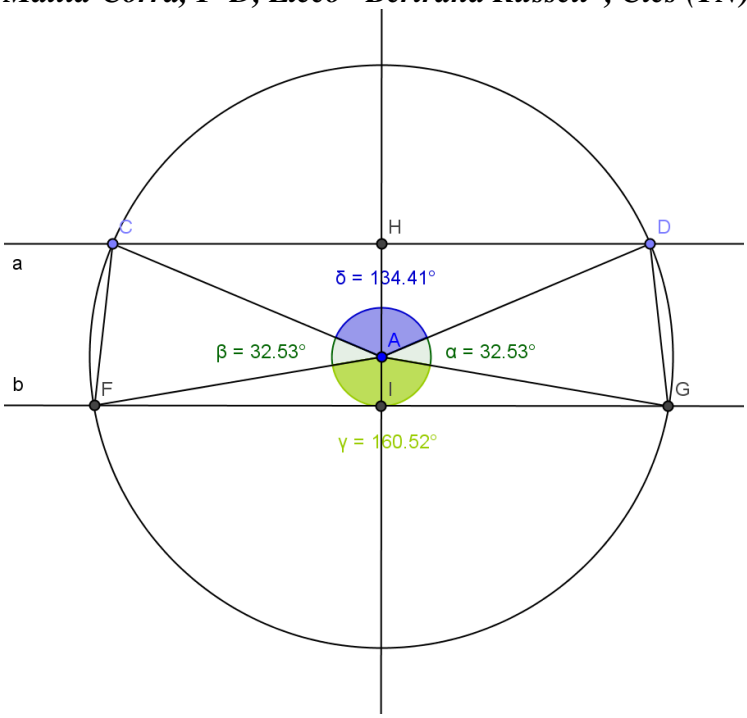


3. Se AD = DC ,il triangolo ADC è isoscele sulla base AC e poiché OA = OC sono raggi della stessa circonferenza, la retta di OD è asse di AC e quindi perpendicolare ad esso.

Essendo la retta di AC e la retta [DP] [[DE]] condotta da D parallele [per ipotesi] , la retta di OD che è perpendicolare alla prima,sarà anche perpendicolare alla seconda retta.

Questo significa che [DP] [[DE]] è la tangente alla circonferenza in D. [Nella figura è indicato un punto E che non c'entra nulla].

Mattia-Corrà, 1^D, Liceo "Bertrand Russell", Cles (TN)



Tesi: Se si disegna un trapezio qualunque in un cerchio sarà sempre isoscele.

DIM.: Disegno un trapezio che ha per definizione le due basi parallele, inscritto in una circonferenza.

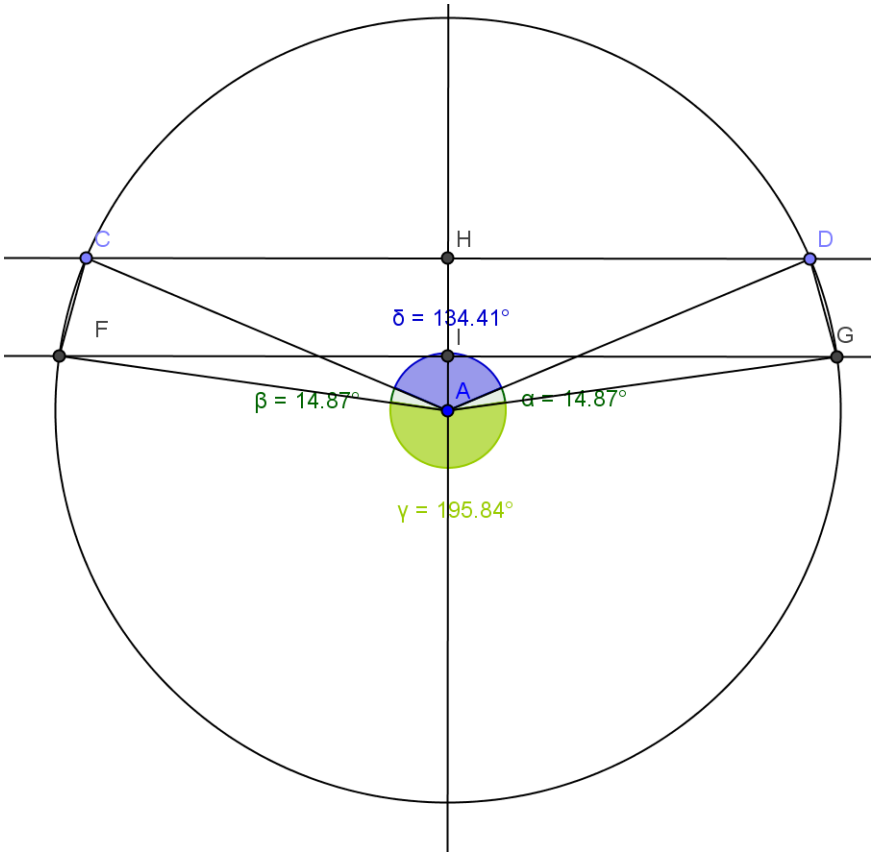
Considero i triangoli FAG e DAC. Traccio [la] [[una]] retta perpendicolare ai seg. FG e CD passante per A (centro della circonferenza). I segmenti AI e AH (appartenenti alla retta j) sono altezze dei triangoli considerati. (essendo perpendicolari alla base) ed essendo altezze di triangoli isosceli [[(FI =IG perché il diametro perpendicolare alla corda]] sono anche bisettrici e dividono gli angoli γ e δ in due parti congruenti.

Gli angoli α e β sono congruenti perché sottrazione di numeri uguali (α e β = 180°- (γ/2+δ/2)).

I triangoli FAC e GAD sono congruenti per il primo criterio di equivalenza dei triangoli (due lati che sono [[tutti il]] [uguali al] raggio del cerchio e angoli uguali).

I segmenti FC e DG sono congruenti perché di triangoli congruenti.

Questa dimostrazione vale anche se il centro del cerchio non è all'interno del trapezio.
Basta considerare i triangoli CAD e FAG.



[Manca la dimostrazione che un trapezio isoscele è inscrivibile in una circonferenza].

[[Questa dimostrazione afferma inoltre la regola che la somma degli angoli opposti di un quadrilatero inscritto è uguale alla somma degli altri due.]]

2. [[…]]
3. [[…]]