FLAT*landia*

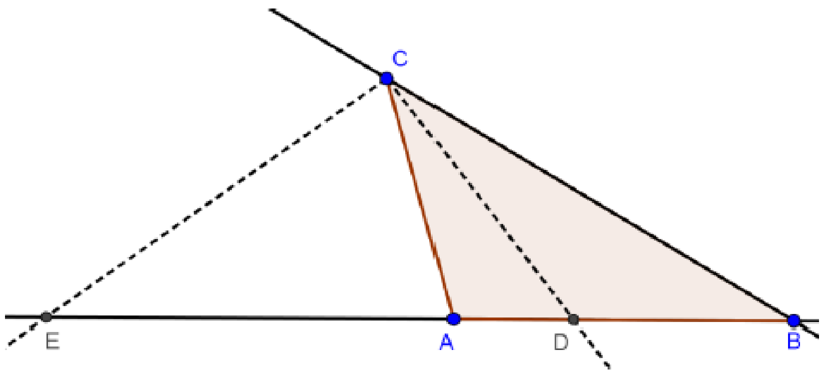
"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" *[(Edwin A. Abbott)]*

Flatlandia 5 – 19 dicembre 2017 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

Sia dato un triangolo ABC.

1) Dimostrare che le bisettrici interna ed esterna relative a un suo vertice sono fra loro perpendicolari.
2) Dire quando la bisettrice esterna relativa a un dato vertice del triangolo incontra il prolungamento del lato opposto.
3) Tracciare le bisettrici interna (CD) ed esterna (CE) relative al vertice C del triangolo (vedi figura). Dimostrare che i segmenti CD e CE sono congruenti se e soltanto se l'angolo in A e l'angolo in B del triangolo differiscono di un angolo retto.



Motivare le risposte.

Commento

Sono giunte quattro risposte, tre da classi II e una da una classe III di tre Licei Scientifici.

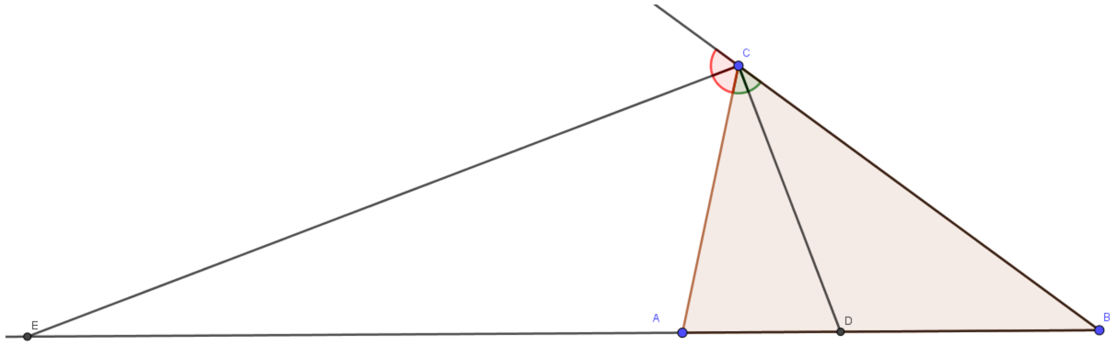
Il problema poneva tre quesiti relativi alle bisettrici di un triangolo.
Nel primo quesito si chiedeva di dimostrare la perpendicolarità tra la bisettrice dell'angolo interno e la bisettrice dell'angolo esterno relative ad uno stesso vertice.
Nel secondo quesito era richiesto di studiare il caso in cui la bisettrice dell'angolo esterno in un vertice incontra la retta del lato opposto
Nel terzo quesito, infine, si chiedeva di dimostrare una relazione tra due degli angoli del triangolo nel caso in cui il triangolo formato dalle due bisettrici (interna ed esterna relative al terzo angolo) con la retta del lato opposto sia isoscele.
Le risposte al primo e terzo quesito sono sostanzialmente corrette, mentre il secondo quesito non è stato in buona parte compreso.
Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:

- L.S. Aristosseno di Taranto
- L.S. Galilei di Alessandria
- L.S. Fermi di Bologna
- L.S. Rummo di Benevento

NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

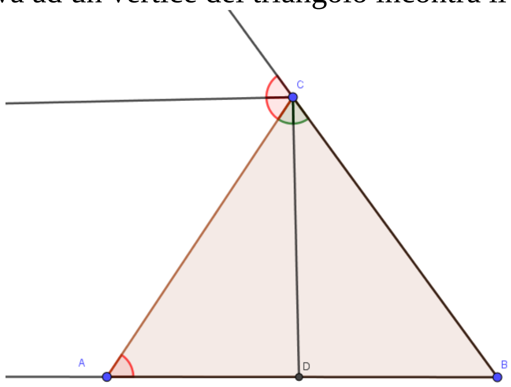
Soluzioni

1) Soluzione proposta dalla classe II E indirizzo Scientifico Liceo Aristosseno Taranto

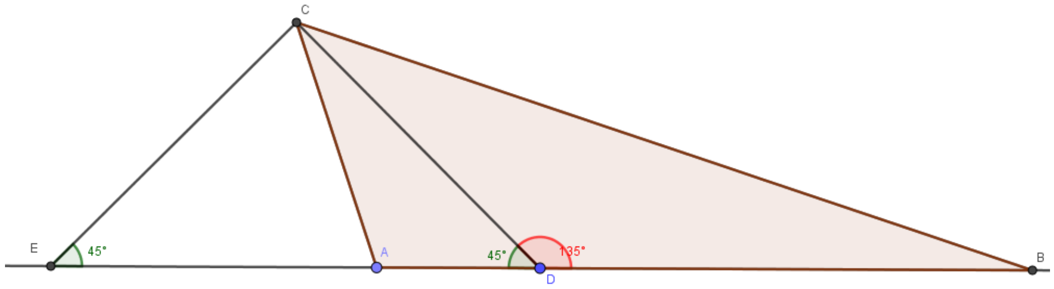


1)Considerate le bisettrici interna ed esterna relative al vertice C del triangolo ABC ,osserviamo che gli angoli interno ed esterno di vertice C sono adiacenti e quindi supplementari ;poiché le bisettrici dividono ciascuno di tali angoli in parti congruenti si ha che $2\widehat{DCA} + 2\widehat{ACE} = 180°$ e quindi : $\widehat{DCA} + \widehat{ACE} = 90°$ e perciò CD e CE sono perpendicolari fra loro.

2)La bisettrice esterna relativa ad un vertice del triangolo incontra il prolungamento del lato opposto



quando le bisettrice interna non è anche altezza relativa al lato opposto. In tal caso,infatti, essendo le bisettrici esterna ed interna perpendicolari fra loro e quella interna perpendicolare al lato opposto, la bisettrice sarà parallela al lato opposto (due rette perpendicolari ad una stessa retta sono parallele fra loro) [Questo accade, cioè che una bisettrice interna è anche altezza, esattamente quando il triangolo è isoscele sulla base relativa a quell’altezza]. Nel triangolo isoscele questo accade per la bisettrice esterna relativa all’angolo al vertice , nel triangolo equilatero accade per le tre bisettrici esterne relative ai tre vertici.



3) Se CD = CE il triangolo ECD è isoscele sulla base ED ,ma essendo (per il punto 1)) CD e CE perpendicolari fra loro, questo triangolo è anche rettangolo e perciò l'angolo $\widehat{CDA}$ = 45° e $\widehat{CDB}$ =135°

Nel triangolo CAD : $\widehat{CAD} = 180° - \widehat{CDA} - \widehat{ACD} = 135° - \frac{\widehat{ACB}}{\mathbf{2}}$

Nel triangolo CDB : $\widehat{CBD} = 180° - \widehat{CDB} - \widehat{BCD} = 180° - 135° - \widehat{BCD} = 45° - \widehat{BCD} = 45° - \frac{\widehat{ACB}}{\mathbf{2}}$

Allora $\widehat{CAD} - \widehat{CBD}$ =90°, ovvero $\widehat{CAB} - \widehat{CBA}$ =90°.

Viceversa, se $\widehat{CAB} - \widehat{CBA}$ =90° , ovvero $\widehat{CAD} = 90° + \widehat{CBA}$ e $\widehat{ACB} = 180° - (\widehat{CAB} + \widehat{CBA}) = 90° - 2\widehat{CBA}$ e allora , dividendo per due : $\widehat{BCD} = 45° - \widehat{CBA}$ = $\widehat{ACD}$

Nel triangolo CAD : $\widehat{CDA} = 180° - \widehat{ACD} - \widehat{CAD} = 180° - (45° - \widehat{CBA}) - (90° + \widehat{CBA}) = 45°$ e siccome ECD=90° ,sarà anche $\widehat{CED}$ = 45° perciò il triangolo ECD è isoscele e si ha CD= CE.

2)Soluzione di Luciano Spettoli, classe III E, Liceo Scientifico G. Galilei, Alessandria

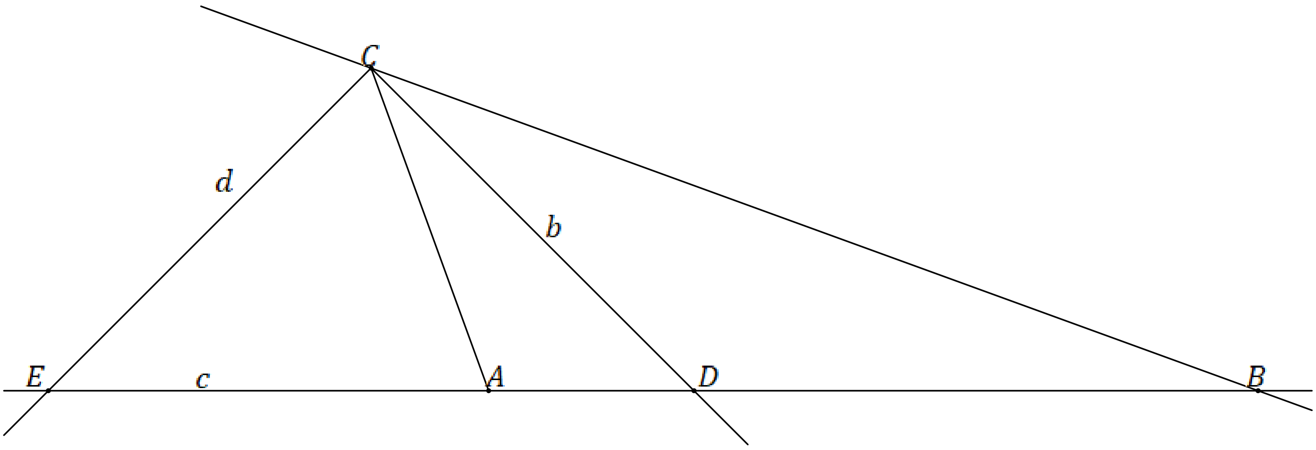
Ipotesi:

- b è bisettrice di $\widehat{ACB}$
- d è bisettrice dell'angolo esterno ad $\widehat{ACB}$

Tesi:

- $b \perp d$

- Condizioni di esistenza di $E | (E \in d) \wedge (E \in c)$
- $(\overline{CD} \cong \overline{CE}) \Leftrightarrow \left((\widehat{BAC} - \widehat{ABC} = 90°) \vee (\widehat{ABC} - \widehat{BAC} = 90°)\right)$



Dimostrazione:

Per il teorema dell'angolo esterno, l'angolo esterno ad $\widehat{ACB}$ è uguale a $\widehat{BAC} + \widehat{ABC}$. Per la definizione di bisettrice, l'angolo compreso tra d e $\overline{AC}$ vale $\frac{\widehat{BAC}+\widehat{ABC}}{2}$. Per la somma degli angoli interni di ABC avremo: $180° = \widehat{ABC} + \widehat{ACB} + \widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{ACB} = 180° - \widehat{ABC} - \widehat{BAC}$; per la definizione di bisettrice si verifica che $\widehat{ACD} = \frac{\widehat{ACB}}{2} = 90° - \frac{\widehat{ABC}}{2} - \frac{\widehat{BAC}}{2}$. L'angolo compreso tra b e d è la somma tra l'angolo compreso fra d e $\overline{AC}$ e l'angolo $\widehat{ACD}$, dunque vale: $\frac{\widehat{BAC}+\widehat{ABC}}{2} + \left(90° - \frac{\widehat{ABC}}{2} - \frac{\widehat{BAC}}{2}\right) = 90° + \frac{\widehat{ABC}}{2} - \frac{\widehat{ABC}}{2} + \frac{\widehat{BAC}}{2} - \frac{\widehat{BAC}}{2} = 90°$. [*Tesi 1*]

[[…]] La domanda non è stata compresa. Bisognava studiare la possibilità che la bisettrice esterna relativa a un dato vertice del triangolo non incontrasse il prolungamento del lato opposto.

Per la somma degli angoli interni di ACD si ha: $180° = \widehat{ACD} + \widehat{ADC} + \widehat{CAD} = 90° - \frac{\widehat{ABC}+\widehat{BAC}}{2} + \widehat{ADC} + \widehat{BAC}$ da cui: $\widehat{CDE} \equiv \widehat{ADC} = 180° - \left(90° - \frac{\widehat{ABC}+\widehat{BAC}}{2} + \widehat{BAC}\right) = 90° + \frac{\widehat{ABC}}{2} + \frac{\widehat{BAC}}{2} - \widehat{BAC} = 90° + \frac{\widehat{ABC}}{2} - \frac{\widehat{BAC}}{2}$.
Per la somma degli angoli interni di ACE si ha: $180° = \widehat{ACE} + \widehat{AEC} + \widehat{CAE} = \frac{\widehat{BAC}+\widehat{ABC}}{2} + 180° - \widehat{BAC} + \widehat{AEC}$ da cui: $\widehat{CED} \equiv \widehat{AEC} = 180° - \left(\frac{\widehat{BAC}+\widehat{ABC}}{2} + 180° - \widehat{BAC}\right) = \widehat{BAC} - \frac{\widehat{BAC}}{2} - \frac{\widehat{ABC}}{2} = \frac{\widehat{BAC}}{2} - \frac{\widehat{ABC}}{2}$. Se avessimo che $\overline{CD} \cong \overline{CE}$, allora CDE sarebbe isoscele su base $\overline{DE}$ e si avrebbe $\widehat{CDE} \cong \widehat{CED}$, e, sostituendo, si otterrebbe: $90° + \frac{\widehat{ABC}}{2} - \frac{\widehat{BAC}}{2} = \frac{\widehat{BAC}}{2} - \frac{\widehat{ABC}}{2} \Rightarrow 90° + \widehat{ABC} - \widehat{BAC} = 0 \Rightarrow \widehat{BAC} - \widehat{ABC} = 90°$. Questa

relazione vale anche al contrario: se assumiamo che $\widehat{BAC} - \widehat{ABC} = 90°$, allora $\widehat{BAC} = 90° + \widehat{ABC}$.

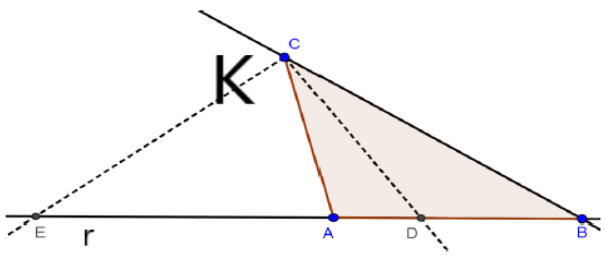
Inoltre avremmo che $\widehat{CED} = \frac{\widehat{BAC}}{2} - \frac{\widehat{ABC}}{2} = 45° + \frac{\widehat{ABC}}{2} - \frac{\widehat{ABC}}{2} = 45°$ e $\widehat{CDE} = 90° + \frac{\widehat{ABC}}{2} - \frac{\widehat{BAC}}{2} = 90° + \frac{\widehat{ABC}}{2} - 45° - \frac{\widehat{ABC}}{2} = 45°$; per la proprietà transitiva dell'uguaglianza abbiamo quindi $\widehat{CED} \cong \widehat{CDE}$ e dunque il triangolo CDE è isoscele con base $\overline{DE}$ e perciò $\overline{CD} \cong \overline{CE}$. Dunque $\left(\overline{CD} \cong \overline{CE}\right) \Leftrightarrow \left(\widehat{BAC} - \widehat{ABC} = 90°\right)$. (Analogamente, se si considerasse l'altro angolo esterno ad $\widehat{ACB}$, quello tra $\overline{CB}$ e la retta per A e C, allora si avrebbe $\overline{CD} \cong \overline{CE}$ se e solo se $\widehat{ABC} - \widehat{BAC} = 90°$). $\left(\overline{CD} \cong \overline{CE}\right) \Leftrightarrow \left(\left(\widehat{BAC} - \widehat{ABC} = 90°\right) \vee \left(\widehat{ABC} - \widehat{BAC} = 90°\right)\right)$. [*Tesi* 3]

3)Francesco De Rossi, Classe 2E Liceo Scientifico "Enrico Fermi" di Bologna

Ho chiamato l'angolo piatto"P",l'angolo retto"R"e l'angolo adiacente esterno di ACB "K" ,
(Al posto del segno di congruenza ho messo " ≅")
Ipotesi comune alle dimostrazioni 1 e 3:
CE bisettrice di K
CD bisettrice di ACB
AB appartenente a r

Dimostrazione punto 1:
Tesi:CD è perpendicolare a CE

Problema di Flatlandia 5-19 dicembre 2017
Sia dato un triangolo ABC.
1) Dimostrare che le bisettrici interna ed esterna relative a un suo vertice sono fra loro perpendicolari.
2) Dire quando la bisettrice esterna relativa a un dato vertice del triangolo incontra il prolungamento del lato opposto.
3) Tracciare le bisettrici interna (CD) ed esterna (CE) relative al vertice C del triangolo (vedi figura). Dimostrare che i segmenti CD e CE sono congruenti se e soltanto se l'angolo in A e l'angolo in B del triangolo differiscono di un angolo retto.



Motivare le risposte.

Dimostrazione:
K+ ACB ≅ P :
(1/2)K + (1/2) ACB ≅ (1/2) P :
ECA + ACD ≅ R poichè per ipotesi, CE bisettrice di K e CD bisettrice di ACB:
ECD ≅ R :
quindi poiché l'angolo avente come lati CD e CE è retto, CD è perpendicolare a CE C.S.V.D..

Dimostrazione punto 2:
Ip: CE incidente r

Tesi:CA non congruente a CB [In sostanza si dimostra che CE non interseca r quando ABC è un triangolo isoscele]

Dimostrazione:
Supponiamo per assurdo la falsità della tesi , e che quindi CA ≅CB ,allora ABC sarebbe isoscele ,e quindi per il teorema del triangolo isoscele CAB≅ ABC .
K ≅ CAB +ABC per il teorema dell'angolo esterno:
K ≅ 2 CAB per una deduzione precedente:
(1/2)K ≅CAB:
ECA ≅ CAB poichè per ipotesi, CE bisettrice di K:
quindi per il teorema delle rette parallele [[CB]] [CE] è parallelo a r,ciò contraddice l'ipotesi ,pertanto la tesi deve essere vera C.S.V.D..

Dimostrazione punto 3:
1)
Ip:CAB-ABC ≅ R
E appartenente a r

Tesi:CD ≅CE

Dimostrazione:

CAB-ABC ≅ R :
ABC ≅ CAB -R e CAB ≅ABC +R.

[[…]]

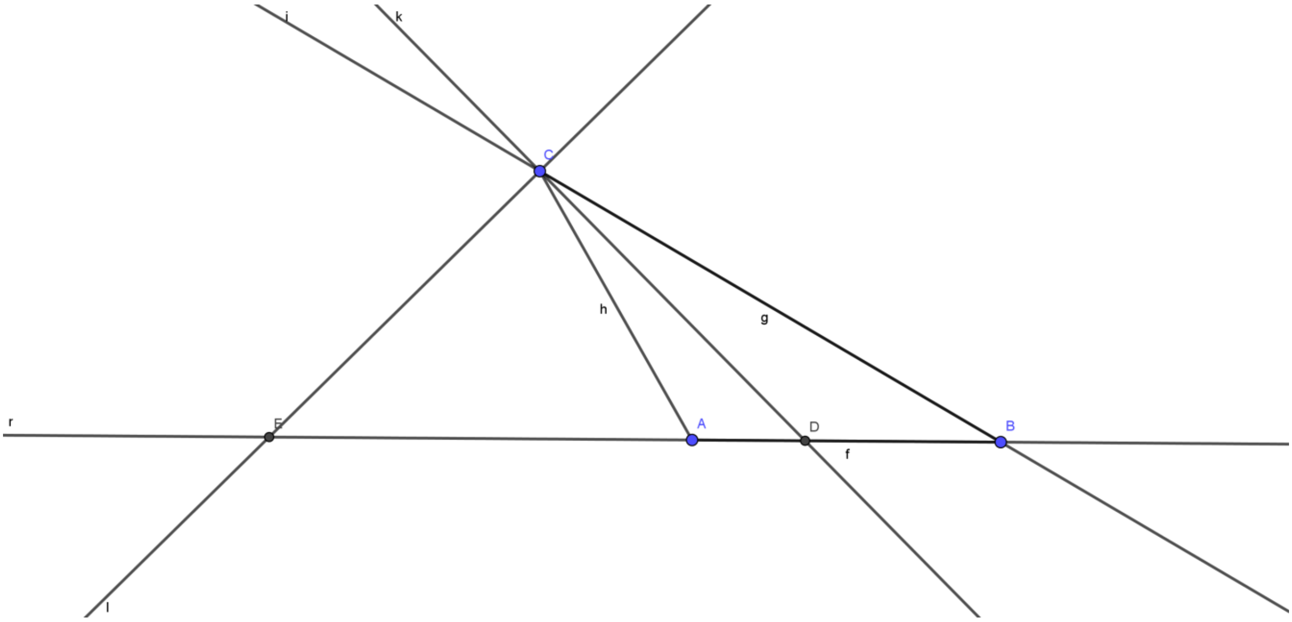
CEB ≅P-ECB- ABC per il teorema dell'angolo esterno:
CEB ≅P-ECD-DCB- ABC:
CEB ≅P-R-(1/2)ACB-ABC poiché, per una deduzione precedente ,ECD ≅R:
CEB ≅R-(1/2)(P-CAB-ABC)-ABC:
CEB ≅R-(1/2)(P-ABC-R-ABC)-ABC per una deduzione precedente :
CEB ≅R-(1/2)(R-2ABC)-ABC:
CEB ≅R-(1/2)R+ABC-ABC :
CEB ≅(1/2)R

CDE ≅P-ECD- CEB per il teorema dell'angolo esterno:
CDE ≅P-R-(1/2)R per una deduzione precedente:
CDE ≅ (1/2)R

Quindi per la proprietà transitiva CDE ≅CEB ; quindi per il teorema inverso del triangolo isoscele CD ≅CE. C.S.V.D..

2)Ip: CD ≅CE
E appartenente a r

Tesi:CAB-ABC ≅ R



Dimostrazione:
Poichè CD ≅CE,per il teorema del triangolo isoscele
CDE ≅ CEB ,poichè ECD è anche retto per dimostrazione 1, CDE e CEB sono congruenti a (1/2)R

CAE ≅P-ECA- CEB per il teorema dell'angolo esterno:
CAE ≅P-(1/2)(P-ACB)-(1/2)R per una deduzione precedente:
ACB+ABC ≅(1/2)R+(1/2)ACB per una deduzione precedente e per il teorema dell'angolo esterno :
(1/2)ACB ≅(1/2)R-ABC:
ACB ≅R-2ABC.

CAB ≅P-ACB-ABC per il teorema dell'angolo esterno:
CAB ≅P-(R-2ABC)-ABCper una deduzione precedente :
CAB ≅P-R+2ABC-ABC:
CAB-ABC ≅R

C.S.V.D.

[Il teorema che più volte è stato citato è, più correttamente, quello che riguarda la somma degli angoli interni di un triangolo].

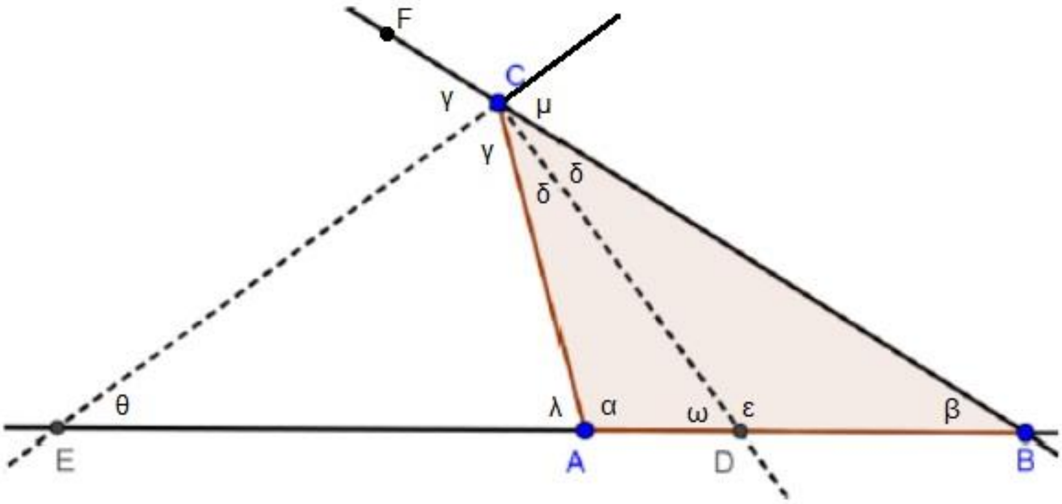
[[N.B. A causa della differente codifica unicode il simbolo di congruenza potrebbe non apparire correttamente rappresentato.]]

4)Mariachiara Rosella-2E-Liceo Scientifico G.Rummo-Benevento

Dimostrazione relativa al problema di Dicembre 2017 di Flatlandia.

IP: CD bisettrice dell’angolo ACB
CE bisettrice dell’angolo FCA

TH: 1. CE perpendicolare a CD
2. Dire quando la CE incontra il prolungamento di AB
3. CD=CE ⇔α-β= 90°



1) Consideriamo le bisettrici CE e CD. Gli angoli [[CAF]] [FCA] e ACB sono supplementari quindi $2\delta+2\gamma= 180°$. Dividendo entrambi i membri per due otteniamo $\delta+\gamma=$ l'angolo ECD=90°, cioè CE perpendicolare a CD.

2) [[…]]

3)Se CD= CE allora $\alpha-\beta= 90°$

Il triangolo [[ACD]] [ECD] è isoscele perché CD=CE per ipotesi e rettangolo perché $\delta+\gamma=90°$ come abbiamo dimostrato nel punto 1, quindi $\theta = \omega = 45°$.

$\varepsilon=180°- 45°= 135°$ perché supplementare di ω.

Per il teorema dell'angolo esterno applicato sul triangolo CAD sappiamo che $\varepsilon=\delta+\alpha$, cioè che $\delta+\alpha=135°$.

Per il teorema dell'angolo esterno applicato sul triangolo CBD sappiamo che $\omega=\delta+\beta$, cioè che $\delta+\beta=45°$.

Sottraiamo membro a membro:

$\delta+\alpha=135°$

$\delta+\beta=45°$

~~$\alpha-\beta= 90°$~~

Se $\alpha-\beta= 90°$ allora CD= CE

$\alpha-\beta= 90°$ cioè $\alpha=\beta+90°$

Per il teorema dell'angolo esterno applicato sul triangolo CAD sappiamo che $\varepsilon=\delta+\alpha$, cioè che $\varepsilon=90°+\beta+\delta$.

Per il teorema dell'angolo esterno applicato sul triangolo CBD sappiamo che $\omega=\delta+\beta$.

Consideriamo la somma degli angoli interni del triangolo CBD : $180°=\beta+\delta+\varepsilon$ e quindi $180°= 90°+2\beta+2\delta$.

Ora consideriamo il triangolo CDE. Sappiamo che $\delta+\gamma= 90°$ e quindi $\theta+\omega= 180°-90°=2\beta+2\delta$.

Sostituiamo a ω il suo valore cioè $\delta+\beta$ e otteniamo $\theta+\delta+\beta=2\beta+2\delta$, quindi $\theta=\beta+\delta$.

Questo vuol dire che $\theta = \omega$ e cioè che il triangolo CDE è isoscele sulla base DE e per questo CE=CD.