FLATlandia

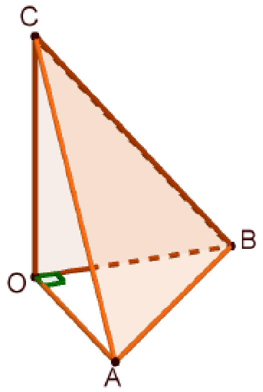
*"Abbi pazienza, ché il mondo è vasto e largo" (Edwin A. Abbott)*

# Flatlandia - Problema 3-17 aprile 2019 - Commento alle soluzioni ricevute

**Il testo del problema**

**Problema Flatlandia - 3-17 aprile 2019**

Siano $OA$, $OB$, $OC$ tre segmenti dello spazio a due a due perpendicolari in $O$.
Dette $x$, $y$, $z$, le rispettive lunghezze di $OA$, $OB$, $OC$, trovare in funzione di $x$, $y$, $z$ il volume del tetraedro $OABC$, l'area della faccia $ABC$ e la distanza di $O$ dal piano $ABC$. Motivare le risposte.




**Commento**

Sono giunte due risposte, una da una classe III e l'altra da una classe II di liceo scientifico.
Il problema partiva da un tetraedro trirettangolo e chiedeva di determinarne il volume, l'area della faccia "obliqua" e la distanza tra questa faccia e il vertice opposto.
La prima risposta è completa e corretta, mentre la seconda è stata necessariamente tagliata in quanto le risposte alla seconda e alla terza domanda (per la loro prolissità) non sono assolutamente proponibili.

Sono pervenute risposte dalle seguenti scuole:

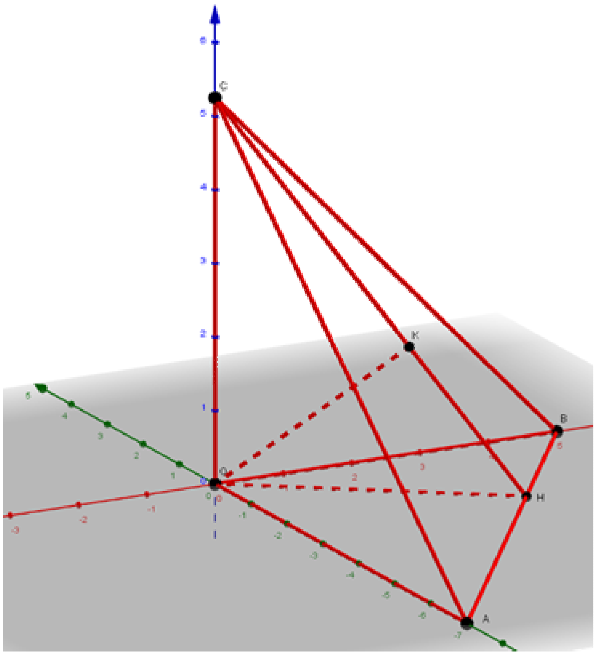
- Liceo Scientifico "Aristosseno", Taranto
- Liceo Scientifico "E. Fermi", Bologna

*NOTA. Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.*

**Soluzioni arrivate**

**1) Soluzione proposta dalla classe 3^ H Liceo Scientifico “Aristosseno”, Taranto**

a) Il volume del tetraedro è quello di una piramide che ha per base il triangolo rettangolo AOB e per altezza il segmento OC , esso è quindi dato da : $V = \frac{1}{3}\frac{xy}{2}z = \frac{xyz}{6}$ . [z minuscolo e non maiuscolo]

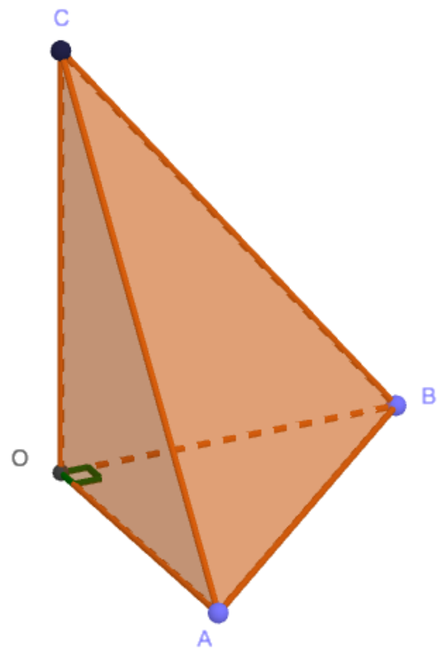


b) Tracciata l’altezza OH relativa all’ipotenusa nel triangolo AOB , sappiamo che i segmenti CO e OH sono fra loro perpendicolari in quanto se una retta è perpendicolare ad un piano essa è perpendicolare a tutte le rette che passano per il suo piede O ; per questo il triangolo COH è rettangolo in O. Essendo poi il segmento OH perpendicolare ad AB , per il teorema delle tre perpendicolari la retta di AB è perpendicolare al piano individuato dalle rette di CO e OH . Per questo il punto H è il piede dell’altezza della faccia ABC del tetraedro .Per calcolare l’area della faccia ABC determiniamo prima la lunghezza dell’ipotenusa AB del triangolo rettangolo AOB attraverso il teorema di Pitagora : $\overline{AB} = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$ ; essa è la base della faccia ABC. Per determinare l’altezza CH della faccia ABC, calcoliamo la misura di OH attraverso il prodotto dei cateti del triangolo AOB diviso per l’ipotenusa AB : $\overline{OH} = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ,e poi applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo COH : $\overline{CH} = \sqrt{\overline{CO}^2 + \overline{OH}^2} = \sqrt{z^2 + \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}}$ . L’area della faccia ABC sarà perciò : $S_{ABC} = \frac{AB\ CH}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\ \frac{\sqrt{x^2z^2+y^2z^2+x^2y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2z^2+y^2z^2+x^2y^2}$ .

c)Tracciata la distanza OK del vertice O dal piano della faccia ABC , possiamo esprimere la misura di questa distanza in funzione di x,y e z attraverso il volume del tetraedro che abbiamo già calcolato. Se infatti consideriamo come base del tetraedro la faccia ABC e come altezza il segmento OK, il volume del tetraedro sarà espresso da : $V = \frac{S_{ABC}\ OK}{3} = \frac{1}{6}\sqrt{x^2z^2+y^2z^2+x^2y^2}\ OK$ , e uguagliandolo a $V = \frac{xyz}{6}$ già calcolato, ricaviamo : $OK = \frac{xyz}{\sqrt{x^2z^2+y^2z^2+x^2y^2}}$.

2) **Soluzione proposta da Marco Fiorani Borraccino, 2^F Liceo Scientifico "E.Fermi" Bologna**

Flatlandia apr2019 Marco Fiorani Borraccino 2^F Liceo scientifico E. Fermi, Bologna




Ipotesi:
OABC è un tetraedro
$OA \perp OB$
$OA \perp OC$
$OB \perp OC$
OA=x
OB=y
OC=z

Tesi:
Trovare in funzione di x,y,z: volume di OABC, area di ABC, distanza di O da ABC

Dimostrazione tesi 1:

Poiché il volume di una qualsiasi piramide [[a base triangolare]] è uguale a un terzo della superficie della base moltiplicata per l'altezza:$V = \frac{S \cdot h}{3}$; in funzione delle variabili date il volume sarà : $V = \frac{x \cdot y \cdot z}{6}$,infatti z sarebbe l'altezza perchè OC è perpendicolare alla base per ipotesi e la superficie della base si calcola utilizzando l'area del triangolo OAB : $A = \frac{x \cdot y}{2}$.
Dimostrazione tesi 2: [[…]] [molte affermazioni non sono dimostrate e i conti sono assolutamente improponibili].