FLAT*landia*

Rubrica mensile di problemi di geometria per studenti della Scuola secondaria

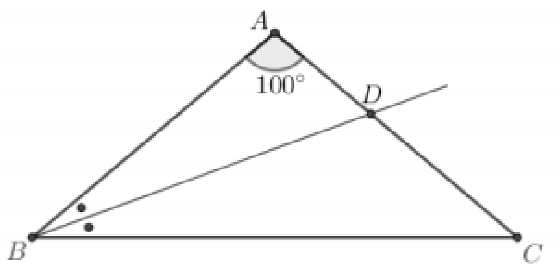
Flatlandia – Problema 7 – 31 marzo 2022 - Commento alle soluzioni ricevute

Il testo del problema

Sia ABC un triangolo isoscele di base BC e angolo al vertice A di ampiezza $100°$. Se BD è la bisettrice dell'angolo in B (vedi figura), provare che

$$BD + DA = BC.$$

Motivare la risposta.



Commento

Abbiamo ricevuto nove risposte, tutte da classi di Liceo scientifico.

Il problema prendeva in considerazione un triangolo isoscele con un angolo al vertice di 100° e, dopo aver tracciato la bisettrice di uno degli angoli alla base, chiedeva di dimostrare una particolare relazione tra segmenti della figura.

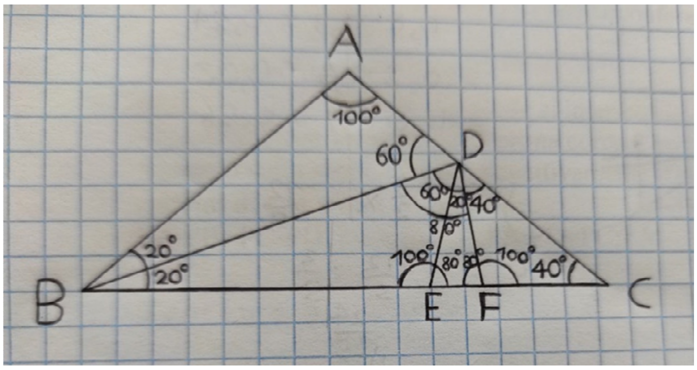
Le soluzioni arrivate sono, in linea di massima, corrette, utilizzando anche ragionamenti non banali. Bisogna però notare, in alcuni elaborati, molti errori di scrittura (segmenti e angoli indicati in modo errato) che una più attenta rilettura avrebbero evitato.

Sono arrivate risposte da studenti delle seguenti scuole (in ordine di arrivo):
-IISS "Charles Darwin", Roma
-Liceo Scientifico "Galileo Galilei", Pescara
-Liceo Scientifico "G. Rummo", Benevento
-Liceo Scientifico Statale "Antonio Pacinotti", Cagliari
-Liceo Scientifico "Torricelli-Ballardini", Faenza (RA)
-Liceo "B. Russell"- Liceo delle Scienze applicate, Cles (TN)
-Liceo Scientifico "Archimede", Messina
-Liceo Scientifico "Barsanti e Matteucci", Viareggio (LU)

Nota. *Nelle soluzioni riportate, le correzioni, le aggiunte o i commenti sono scritti fra parentesi quadre. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.*

Soluzioni arrivate

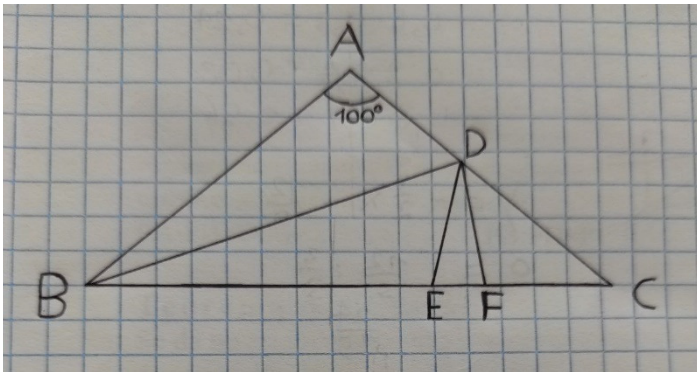
1) Soluzione inviata da Francesco Ferraro, Alberto Giudici – 2BL – IISS Charles Darwin - Roma



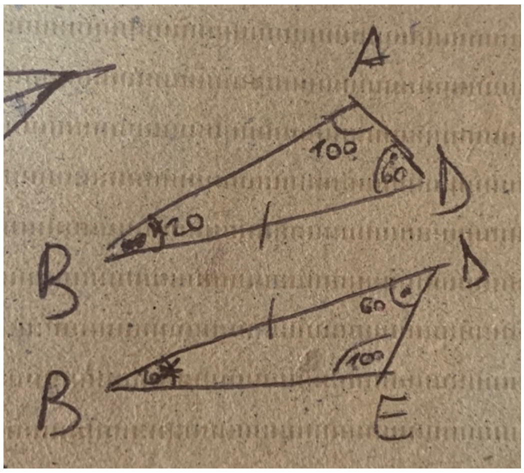
Dimostrazione

Ipotesi: ABC è isoscele; BD è la bisettrice dell’angolo in B; l’angolo in A è ampio 100°

Tesi: BC=BD+DA

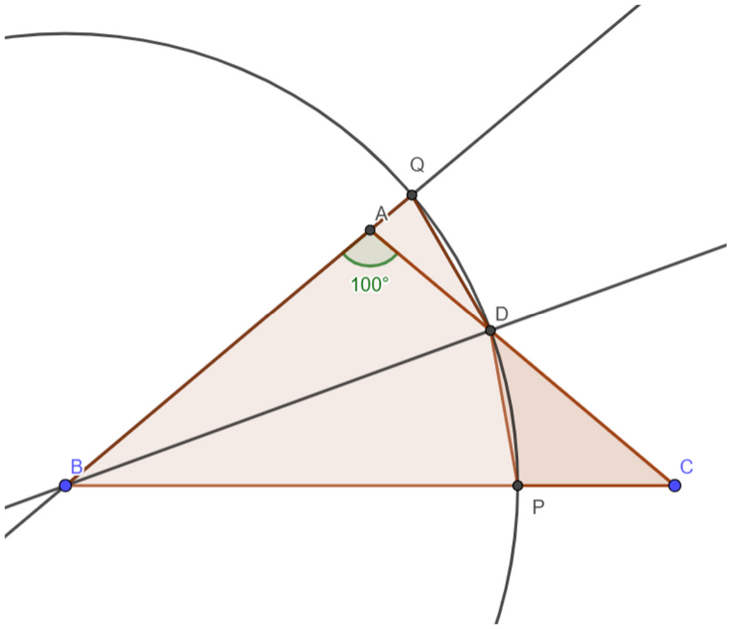


Dimostrazione: Tracciamo innanzitutto la bisettrice dell’angolo BD^C, segnando con E il punto di intersezione di questa con il lato BC. Successivamente tracciamo il segmento DF, tale che il triangolo BDF sia isoscele [sulla base DF] (l’angolo BD^F dovrà equivalere a $\frac{180°-20°}{2}$=80°, come l’angolo BF^D). Poi [[dimostriamo]] [determiniamo] le ampiezze di alcuni angoli: l’angolo in B e quello in C sono ampi 40° perché ABC è isoscele; BD è la bisettrice di B^ quindi AB^D e DB^C equivalgono a 20°; BD^A pertanto sarà ampio 60° e BD^C 120°; poiché DE è la bisettrice di BD^C, BD^E=60°. Detto ciò, possiamo facilmente dimostrare che il triangolo BDE è congruente al triangolo BAD, per il secondo criterio di congruenza (BD^E ≅ BD^A, AB^D ≅ DB^C e la base BD è in comune). Dimostrato ciò possiamo affermare che ED ≅ DA. Tracciando DF, abbiamo formato due triangoli: DEF e DFC,



entrambi isosceli, poiché per il triangolo DEF l'angolo EF^D=80°, come l'angolo DE^F (180°-100°), mentre per il triangolo DFC l'angolo in C vale 40° e l'angolo DF^C vale 100° (180°-80°), il che implica che FD^C sia uguale a 40°. Allora se FC≅FD, FD≅ED e ED≅DA (come dimostrato prima), FC≅DA. Prendiamo in considerazione il triangolo BDF: essendo isoscele per costruzione, BD≅BF. In conclusione, sapendo che BC≅BF+FC, che BF≅BD e che FC≅DA, BC≅BD+DA.

2) Soluzione inviata da Andrea Di Cintio, 2^E, Liceo Scientifico "Galileo Galilei", Pescara



IPOTESI:

AB ≅ AC;

∠BAC ≅ 100°

BD bisettrice di AB^C

TESI:

BD + DA = BC

DIMOSTRAZIONE:

Costruisco la circonferenza di centro in B e di raggio uguale a BD che interseca il triangolo nel punto D sul lato AC, e nel punto P sul lato BC.
Prolungo il lato AB e chiamo Q il punto di intersezione del prolungamento [di AB] con la circonferenza.

Considero il triangolo ABC:

∠BAC = 100° per ipotesi;

∠ABC ≅ ∠BCA = (180°-100°)/2 = 40° perché triangolo isoscele

∠ABD ≅ ∠DBC = 40°/2 = 20° perché BD bisettrice ∠ABC per ipotesi.

Considero il triangolo PBD:

PBD è isoscele sulla base PD, perché BD ≅ BP dato che BD e BP sono sue raggi della circonferenza di centro in B;

in particolare:

∠DBP = 20° per dimostrazione precedente;

∠BPD = (180°-20°)/2 = 80° perché PBD isoscele per dimostrazione precedente.

Considero ora il triangolo CDP:

del triangolo CDP conosco tutti gli angoli:

∠PCD = 40° per dimostrazione precedente;

∠DPC = 180-80 = 100° per angoli supplementari in quanto BPC allineati;

∠PDC = 180°-100°-40° = 40°

Quindi: CDP isoscele sulla base CD per angoli alla base congruenti.

Considero il triangolo QBD:

Il triangolo QBD è isoscele sulla base QD, perché QB ≅ BD in quanto raggi della circonferenza di centro in B;

In particolare:

$\angle QBD = 20°$ per dimostrazione precedente;

$\angle BQD = (180°-20°)/2 = 80°$

Considero il triangolo ADQ:

$\angle AQD = 80°$ per dimostrazione precedente;

$\angle DAQ = 180°-100° = 80°$ per angoli supplementari in quanto B, A, Q allineati;

Quindi: ADQ è isoscele sulla base AQ per angoli alla base congruenti.

Considero le corde DP, DQ della circonferenza di centro in B:

queste sono congruenti perché su di loro insistono angoli al centro congruenti ($\angle QBD \cong \angle DBP$ perché BD bisettrice $\angle QBP$);

Dunque:

$DP \cong DQ$ per dimostrazione precedente;

$DP \cong PC$ per dimostrazione precedente;

$DQ \cong AD$ per dimostrazione precedente;

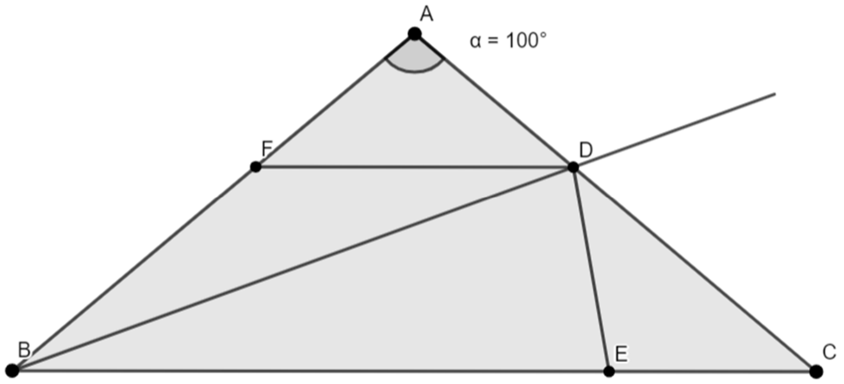
$PC \cong AD$ per segmenti congruenti a segmenti congruenti;

$BP \cong BD$ perché raggi della circonferenza di centro in B;

$BP + PC \cong BD + AD$ per somme di segmenti congruenti;

$BC \cong BD + AD$ per somme di segmenti congruenti.

3) Soluzione inviata da Aldo Coletta, 3C, Liceo “Rummo”, Benevento BN



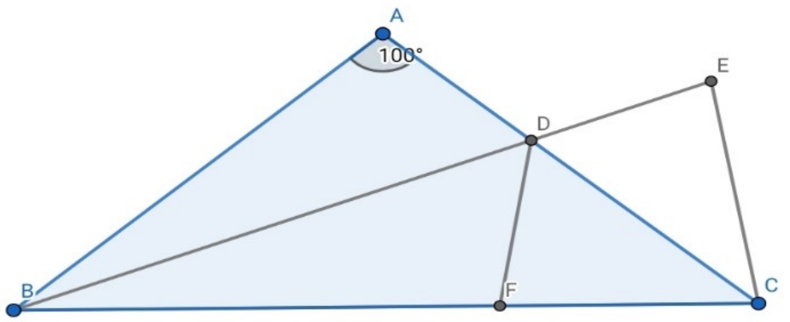
Ipotesi:

- il triangolo ABC è isoscele sulla base $\overline{BC}$
- $\widehat{BAC}$ = 100°
- $\widehat{ABD}$=$\widehat{DBC}$

Tesi: $\overline{BC} = \overline{BD} + \overline{AD}$

Dimostrazione:
Essendo ABC un triangolo isoscele, avrà gli angoli alla base congruenti. Dunque $\widehat{ABC}$=$\widehat{ACB}$=40° (Considerando inoltre che la somma degli angoli interni di un triangolo è 180° e $\widehat{BAC}$ = 100° per ipotesi)
Prendiamo un punto E sul segmento $\overline{BC}$ tale che $\overline{BD}$= $\overline{BE}$.
Il triangolo BDE risulterà dunque isoscele ed avrà $\widehat{DBE}$= 20° per costruzione, e $\widehat{BED}$=$\widehat{BDE}$=80° (per il teorema relativo agli angoli alla base di un triangolo isoscele ed essendo la somma degli angoli interni di un triangolo uguale a 180°).
Di conseguenza, $\widehat{CED}$= 180°- 80° = 100° e considerando che $\widehat{ECD}$=40° per costruzione, anche $\widehat{EDC}$=40°, per la somma degli angoli interni di un triangolo. Ne consegue che ECD è isoscele sulla base $\overline{CD}$ ed è simile al triangolo ABC, avendo gli angoli ordinatamente congruenti ([[terzo criterio]] [primo criterio] di similitudine tra triangoli).
Tracciamo poi una parallela a $\overline{BC}$ passante per D. Essa incontrerà il lato $\overline{AB}$ in F, definendo il triangolo AFD.
Il triangolo avrà $\widehat{AFD}$=$\widehat{ABC}$ e $\widehat{ADF}$=$\widehat{ACB}$ essendo [[per il teorema di Talete]] angoli corrispondenti sulle due parallele $\overline{BC}$ ed $\overline{FD}$, tagliate da $\overline{AB}$ ed $\overline{AC}$.
Quindi anche AFD simile ad ABC avendo gli angoli ordinatamente congruenti ([[terzo criterio]] [primo criterio] di similitudine tra triangoli).
Di conseguenza AFD simile ad ECD per proprietà transitiva.
Per il teorema della bisettrice:
$\overline{AD}$:$\overline{AB}$=$\overline{DC}$:$\overline{BC}$
Il rapporto si similitudine tra il triangolo ECD e il triangolo ABC risulta dunque essere uguale a quello tra il triangolo AFD e il triangolo ABC. Essendo dunque i due triangoli AFD e ECD simili tra loro e con uno stesso rapporto di similitudine rispetto ad ABC, dovranno essere anche congruenti.
Ecco che allora $\overline{EC}$=$\overline{AD}$.
Dunque $\overline{BC} = \overline{BE} + \overline{EC} = \overline{BD} + \overline{AD}$. C.V.D.

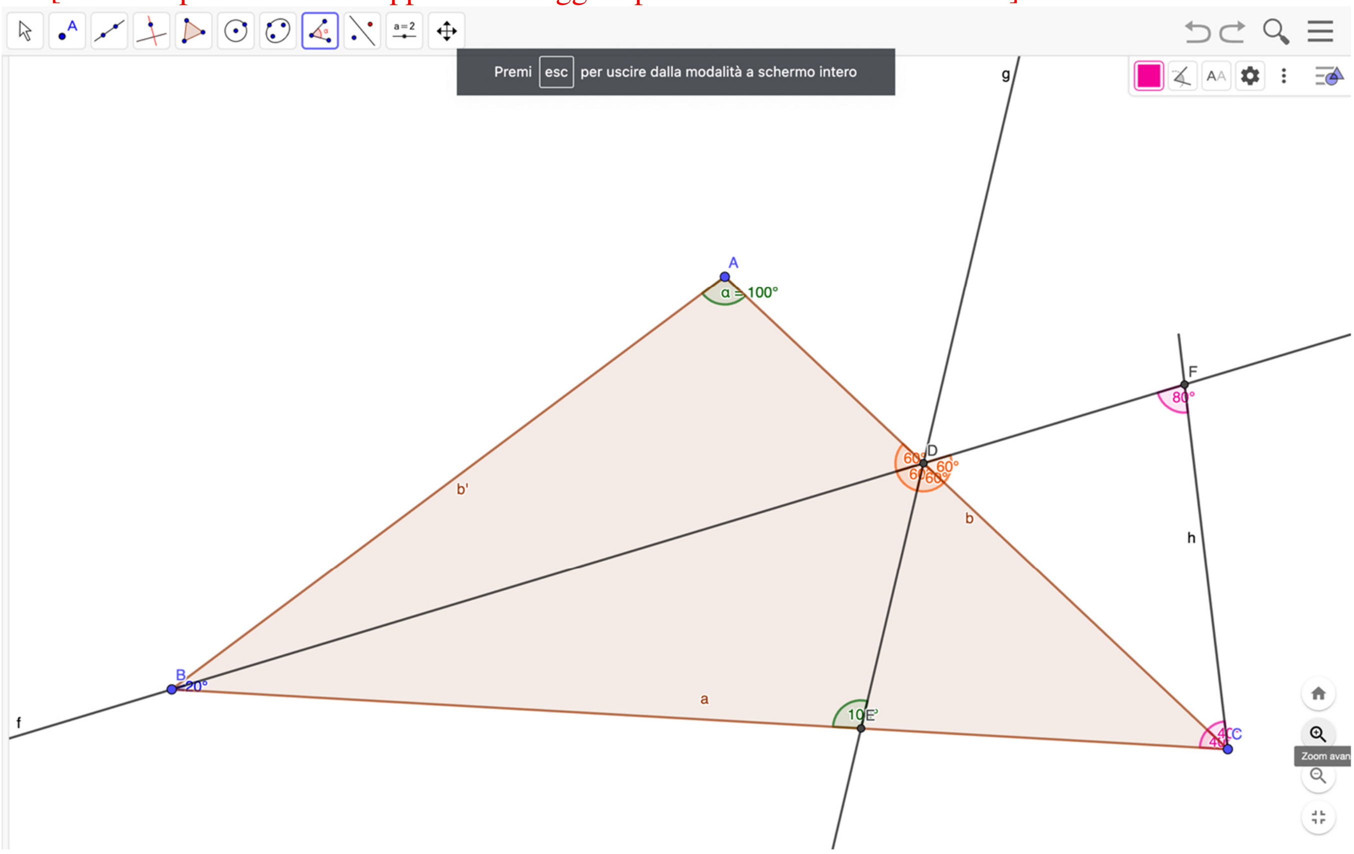
4) Soluzione inviata da Carlo Maria Ennas 3Q, Liceo Scientifico Statale "Antonio Pacinotti", Cagliari



Ipotesi: il triangolo ABC è isoscele sulla base BC, BD è bisettrice dell'angolo $A\hat{B}C$ e $B\hat{A}C$=100°
Tesi: BD+AD=BC
Dimostrazione:
Sia E il punto sul prolungamento di BD dalla parte di D tale che DE=AD. Sia DF la bisettrice dell'angolo $B\widehat{D}C$. Si evidenzia che BE=BD+DE=BD+AD dato che DE e AD sono congruenti per costruzione.
Per ipotesi il triangolo BAC è isoscele sulla base BC quindi gli angoli $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$ sono congruenti. La somma degli angoli interni del triangolo BAC è $A\hat{B}C + A\hat{C}B + B\hat{A}C = B\hat{A}C + 2\left(A\hat{B}C\right)$=100°+2($A\hat{B}C$)=180° da cui si ricava che $A\hat{B}C$=40° e quindi $A\hat{B}D$=20° perché BD biseca l'angolo $A\hat{B}C$.
Nel triangolo ABD sono noti gli angoli $B\hat{A}D$=100°per ipotesi e $A\hat{B}D$=20° per le dimostrazioni precedenti, si ricava quindi che $A\widehat{D}B$=60°. L'angolo $B\widehat{D}C$ è supplementare di $A\widehat{D}B$ allora $B\widehat{D}C$=120° quindi considerato che DF biseca $B\widehat{D}C$ abbiamo che l'angolo $B\widehat{D}F$=$F\widehat{D}C$=60°. Inoltre gli angoli $B\widehat{D}A$ e $C\widehat{D}E$ sono opposti al vertice e quindi congruenti, $C\widehat{D}E$=60°.
Si osservano ora i triangoli BDA e BDF, essi sono congruenti per il secondo criterio di congruenza dei triangoli perché hanno BD in comune, l'angolo $A\hat{B}D$=$D\hat{B}F$ perché BD è bisettrice e l'angolo $B\widehat{D}A$=$B\widehat{D}F$=60° per le dimostrazioni precedenti. In particolare AD=DF perché lati corrispondenti in triangoli congruenti. Nel triangolo DFC essendo noti gli angoli $F\widehat{D}C$=60° e $D\hat{C}F$=40° allora si ricava che l'angolo $D\hat{F}C$=80°.
I triangoli DFC e DEC hanno: DC in comune, DF=DE per proprietà transitiva della congruenza perché entrambi sono congruenti al segmento AD e l'angolo $F\widehat{D}C$ =$E\widehat{D}C$ =60° per la dimostrazione precedente. Quindi i due triangoli sono congruenti e in particolare $D\hat{F}C$ =$D\hat{E}C$=80° e $D\hat{C}F$=$D\hat{C}E$=40°.
Quindi gli angoli $B\hat{E}C$ e $B\hat{C}E$ sono congruenti perché $B\hat{E}C$=80° e
$B\hat{C}E$=$B\hat{C}D + D\hat{C}E$=40°+40°=80°.
Allora il triangolo EBC ha gli angoli relativi a EC congruenti, quindi è isoscele sulla base EC, e allora BC=BD+DE=BD+AD.

5) Soluzione inviata da Francesca Neri, Classe 2AS, Liceo scientifico tradizionale Torricelli-Ballardini, Faenza (RA)

[Molte imprecisioni. Era opportuno rileggere prima di inviare la soluzione.]



1) Traccio la bisettrice di BDC (angolo di 120°) che interseca [[AB]] [BC] in E (formando [[BDC]] [BDE] angolo e CDE angolo di 60°)
2) Considero i due triangoli BDA e BDE
   - BD=BD per proprietà riflessiva
   - Gli angoli BDA=BDE poiché entrambi di 60°
   - Gli angoli ABD= [[DAE]] [DBC] per ipotesi

   Quindi i due triangoli sono = per il 2° criterio e in particolare DA=DE
3) Prolungo BD di un segmento [[BF]] [DF] tale che [[BF]] [DF]=DA
4) Considero i triangoli DEC e DFC
   - DC=DC per proprietà riflessiva
   - Gli angoli CDE=CDF (entrambi di 60°, CDE per costruzione al p1 e CDF [[alterno interno]] [opposto al vertice] a ADB)
   - DE=DF per proprietà transitiva (entrambi =DA)

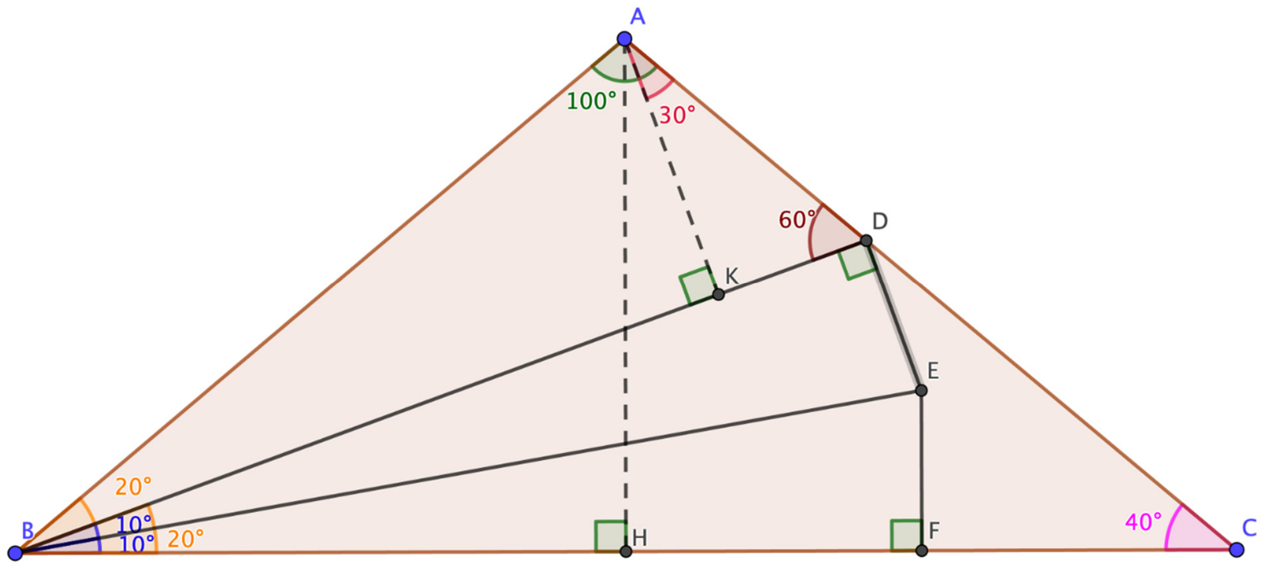
   Quindi sono = per il 1° criterio e in particolare l'angolo DCF= DCE (entrambi di 40°)

   → DFC angolo è di 80°
5) Nel triangolo BCF gli angoli alla base BCF (40°+40°) e BFC sono congruenti (80°) perciò è isoscele:

   BC=BF --> BF= BD+ DF --> DF=DA

   ➔ BC= BD+DA.

6) Soluzione inviata da Seppi Davide, classe 2D, Liceo “Bertrand Russell”, Cles (TN)



Ipotesi:

- Il triangolo ABC è isoscele sulla base BC;
- $B\hat{A}C = 100°$;
- BD bisettrice di $A\hat{B}C$.
-

Tesi: BD+DA=BC.

Considero gli angoli $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$: essi sono ≅ perché angoli alla base di un triangolo isoscele;
⟹ $A\hat{B}C + A\hat{C}B = 180°$(somma angoli interni di un triangolo) – $B\hat{A}C$ (=100°) = 80°;
⟹ $A\hat{B}C = A\hat{C}B = 80°/2 = 40°$.

Considero gli angoli $A\hat{B}D$ e $D\hat{B}C$: essi sono ≅ perché BD bisettrice;
⟹ $A\hat{B}D = D\hat{B}C = A\hat{B}C$ (=40°) /2 = 20°.

Considero l’angolo $A\hat{D}B$: esso è uguale a 180°- $A\hat{B}D$ (=20°) – $B\hat{A}D$ (=100°) = 60°.

Traccio il segmento AK ⊥ a BD;
⟹ $K\hat{A}D$ = 180° - $A\hat{K}D$ (=90°) – $K\hat{D}A$ (=60°) = 30°.

Chiamo l la lunghezza dei lati AB e [[BC]] [AC] [[(≅ per dimostrazione precedente);]]
⟹ posso dire che:

- $\mathrm{BK} = l \cdot \cos\left(A\hat{B}D\right) = l \cdot \cos(20°)$;
- $\mathrm{AK} = l \cdot \sin\left(A\hat{B}D\right) = l \cdot \sin(20°)$.

Considero il triangolo AKD: esso è metà triangolo equilatero perché i suoi angoli misurano 90°, 30° e 60°;

$\Longrightarrow$ essendo AK = $l \cdot \sin(20°)$ (per dimostrazione precedente) si può dire che:

- AD = $\frac{l \cdot \sin(20°)}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2l \cdot \sin(20°)}{\sqrt{3}}$ perché l'altezza di un triangolo equilatero è uguale al suo lato per $\frac{\sqrt{3}}{2}$;
- DK = AD/2 = $\frac{2l \cdot \sin(20°)}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{l \cdot \sin(20°)}{\sqrt{3}}$ perché DK è metà lato di un triangolo equilatero.

Considero il segmento [[BC]] [BD] : [[BC]] [BD] = BK + DK = $l \cdot \cos(20°) + \frac{l \cdot \sin(20°)}{\sqrt{3}}$.

Traccio poi:

- BE bisettrice dell'angolo $D\hat{B}F$;
- Il segmento DE $\perp$ BD, con E su BE;
- Il segmento EF $\perp$ BC, [[con E su BE]] [con F su BC].

Considero i due triangoli DBE e BEF:

- Essi sono rettangoli perché DE $\perp$ BD e EF $\perp$ BF, per costruzione;
- $D\hat{B}E \cong E\hat{B}F$ perché BE bisettrice di $D\hat{B}F$ per costruzione;
- BE è in comune;

$\Longrightarrow$ i due triangoli sono $\cong$ per il criterio generalizzato di congruenza dei triangoli rettangoli;
$\Longrightarrow$ BF $\cong$ BD;
$\Longrightarrow$ BF = $l \cdot \cos(20°) + \frac{l \cdot \sin(20°)}{\sqrt{3}}$.

Traccio, quindi, AH altezza del triangolo ABC relativa a BC:
$\Longrightarrow$ BH = $l \cdot \cos(ABH) = l \cdot \cos(40°)$;
$\Longrightarrow$ CH = $l \cdot \cos(ACH) = l \cdot \cos(40°)$;
$\Longrightarrow$ BC = BH + CH = $l \cdot \cos(40°) + l \cdot \cos(40°) = 2l \cdot \cos(40°)$.

Considero il segmento CF: CF = BC – BF = $2l \cdot \cos(40°) - \left[l \cdot \cos(20°) + \frac{l \cdot \sin(20°)}{\sqrt{3}}\right]$.
Considero i segmenti AD e CF:

- CF = $2l \cdot \cos(40°) - \left[l \cdot \cos(20°) + \frac{l \cdot \sin(20°)}{\sqrt{3}}\right] = l \cdot 0{,}3949308436\ ...$;
- AD = $\frac{2l \cdot \sin(20°)}{\sqrt{3}} = l \cdot 0{,}3949308436\ ...$;

$\Longrightarrow$ i due segmenti sono $\cong$. [si poteva ottenere la stessa espressione senza ricorrere ad una scrittura decimale illimitata !!!]

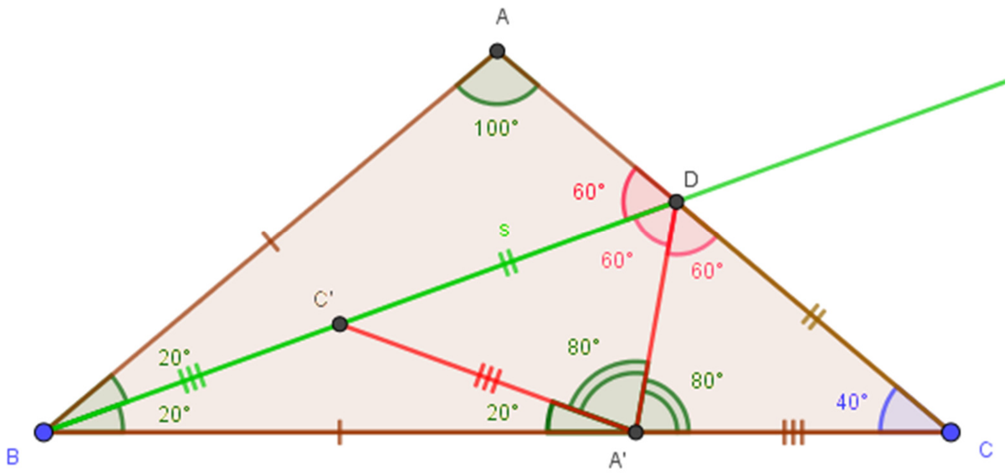
Considero il segmento BC = BF + CF:

- BF = BD per dimostrazione precedente;
- CF = AD per dimostrazione precedente;

$\Longrightarrow$ BC = BD + AD.

C.V.D.

7) **Soluzione inviata da Barbaccia Riccardo 2B, Liceo Scientifico Archimede, Messina**



Hp
$B\hat{A}C = 100°$
$A\hat{B}D \cong D\hat{B}C$
$AB \cong AC$

Ts
$AD + BD = BC$

Costruiamo un segmento $A'B$ tale che $A' \in BC$ e $A'B \cong AB$.

Consideriamo i triangoli BAD e $BA'D$:

$A'B \cong AB$	per costruzione	$\Longrightarrow BAD \cong BA'D$	per il I criterio di congruenza dei triangoli	$\Longrightarrow$
BD	in comune			
$A\hat{B}D \cong D\hat{B}C$	per ipotesi			

[[.....]]

$$A\hat{B}C = \frac{180° - B\hat{A}C}{2} = \frac{180° - 100°}{2} = \frac{80°}{2} = 40° \quad \text{poiché ABC isoscele;}$$

$$A\hat{B}D = \frac{A\hat{B}C}{2} = \frac{40°}{2} = 20° \quad \text{poiché } A\hat{B}D \cong D\hat{B}C \text{ per ipotesi;}$$

$$A\widehat{D}B = B\widehat{D}A' = 180° - D\hat{B}A - B\hat{A}D = 180° - 20° - 100° = 60°;$$

$$A'\widehat{D}C = 180° - 2A\widehat{D}B = 180° - 2 * 60° = 180° - 120° = 60° \Longrightarrow A'\widehat{D}C = B\widehat{D}A'.$$

Costruiamo un segmento DC' tale che $C' \in BD$ e $DC' \cong DC$.

Consideriamo i triangoli $DA'C$ e $DA'C'$:

$DC' \cong DC$	per costruzione	$\Rightarrow DA'C \cong DA'C'$	per il I criterio di congruenza dei triangoli	$\Rightarrow$
DA'	in comune			
$A'\widehat{D}C = B\widehat{D}A'$	poiché precedentemente dimostrato			

$\Longrightarrow A'C \cong A'C' \wedge C\widehat{A'}D \cong C'\widehat{A'}D.$ poiché elementi corrispondenti in triangoli congruenti.

$$C\widehat{A'}D = C'\widehat{A'}D = 180° - A'\widehat{D}C - D\hat{C}A' = 180° - 60° - 40° = 80°;$$

$$C'\widehat{A'}B = 180° - 2C\widehat{A'}D = 180° - 2 * 80° = 180° - 160° = 20°.$$

Consideriamo il triangolo $\boldsymbol{BC'A'}$:

$$\left.\begin{array}{l} C'\widehat{A'}B = 20° \\ C'\hat{B}A' = 20° \end{array}\right\| \Longrightarrow C'\widehat{A'}B \cong C'\hat{B}A' \Longrightarrow BC'A'\,triangolo\ isoscele \Longrightarrow C'A' \cong C'B$$

$$sostituiamo\ C'A' \cong CA' \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow CA' \cong C'B.$

[[Inserire tutto in tabelle a volte non migliora l'esposizione…]]

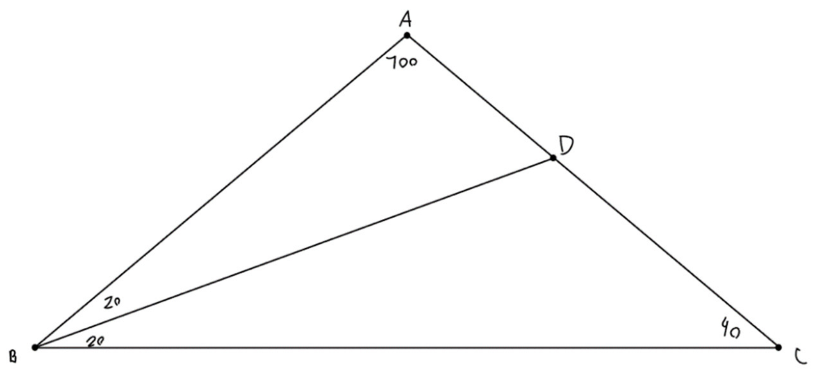
8) **Soluzione inviata da Filippo Chiappini, 1D, Liceo Scientifico Barsanti e Matteucci, Viareggio, LU**

Per il problema ho trovato 2 dimostrazioni, illustrate in seguito.

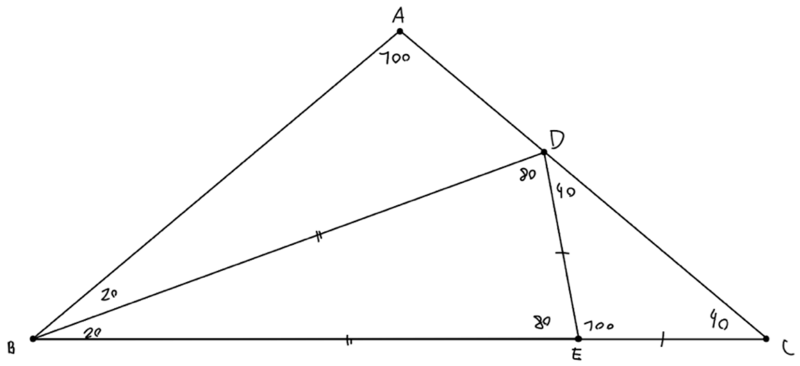
Ipotesi:
bAc = 100°
AB ≅ AC
aBc ≅ aCb
BD è bisettrice di aBc, quindi dBc ≅ aBd [notazioni infelici per gli angoli, anche se forse dettate dalla necessità…]

Tesi:
BD + DA = BC

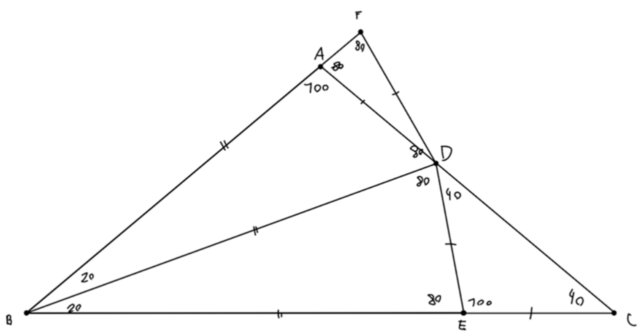
Dimostrazione 1:
aBc ≅ aCb = 40° perché ABC è isoscele e bAc = 100°, quindi aBc = (180 – 100) /2.
(Teorema della somma degli angoli interni di un triangolo).



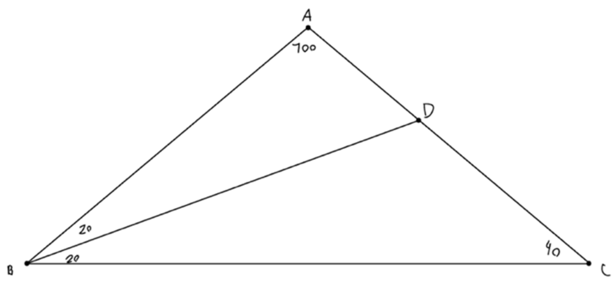
Determino un punto E ∈ BC tale che BD ≅ BE.
Tracciato DE, bEd ≅ bDe = 80°, perché BDE è isoscele e dBe = 20° , quindi bEd = (180 - 20) /2.
(Teorema della somma degli angoli interni di un triangolo).
Dato bEd = 80°, dEc = 100° (bEc è piatto, dEc = 180 – 80) ed eDc = 40 (180 - 100 - 40).
Dato che eDc = 40° e eCd = 40°, EDC è isoscele e DE ≅ EC.



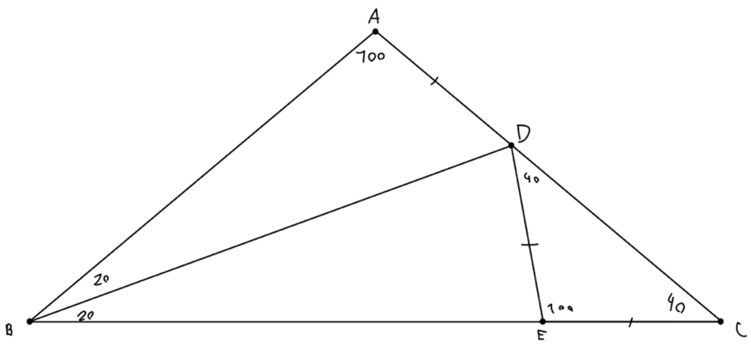
Prolungo BA dalla parte di A di un segmento AF tale che BF ≅ BD ≅ BE.
Tracciato FD, BFD ≅ BDE (Primo criterio di congruenza dei triangoli), quindi FD ≅ DE e bFd ≅ bDf ≅ bDe ≅ bEd = 80°.
Dato che AF è un prolungamento di BA, fAd = 180 – 100 = 80° (bAf = 180, fAd = bAf – bAd).
Essendo quindi aFd ≅ fAd = 80°, AFD è isoscele e FD ≅ DA ≅ DE ≅ EC.
Quindi BC = BE + EC, ma BE ≅ BD ed EC ≅ DA, quindi BC = BD + DA



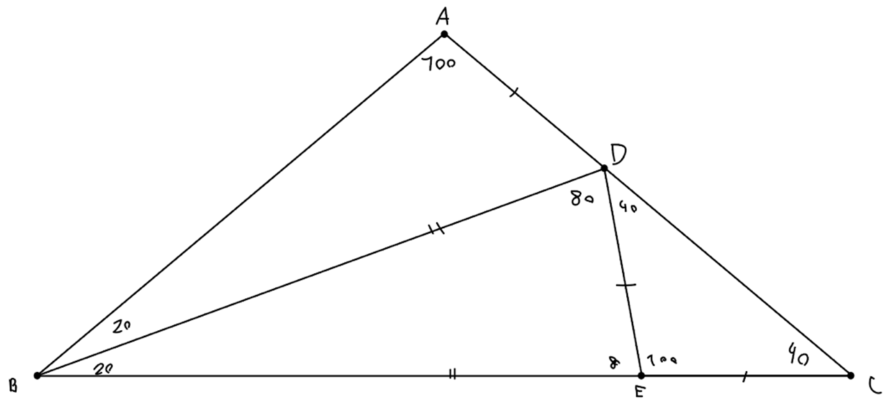
Dimostrazione 2:
aBc ≅ aCb = 40° perché ABC è isoscele e bAc = 100°, quindi aBc = (180 – 100) /2. (Teorema della somma degli angoli interni di un triangolo).
aBd ≅ dBc = 40/2 = 20°.



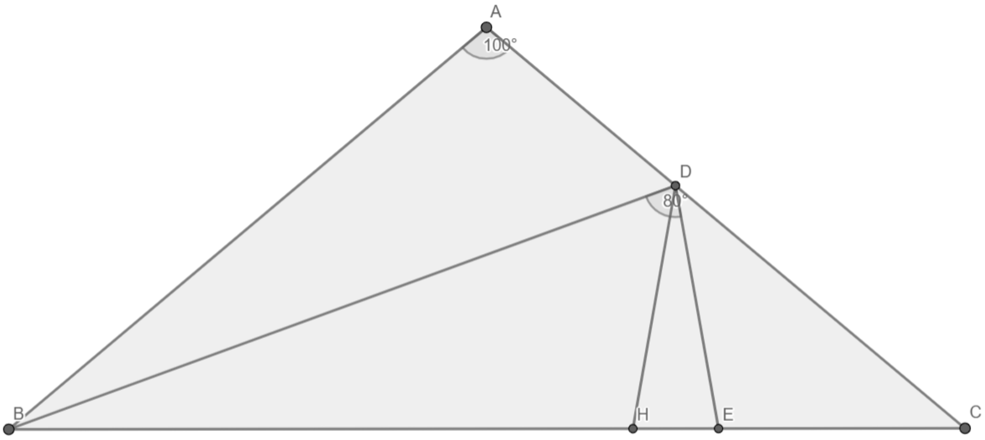
Determino un punto E ∈ BC tale che EC ≅ DA.
Per il teorema della bisettrice AB : AD = BC : DC.
Tracciato DE, ABC è simile ad EDC (secondo criterio di similitudine), quindi
eDc ≅ eCd = 40°, dEc = 100° ed ED ≅ EC ≅ DA.



Dato dEc = 100°, dEb = 80° (bEc = 180°, dEb = bEc – dEc).
Dato dEb = 80°, bDe = 180 – 20 – 80 = 80°, quindi BDE è isoscele e BD ≅ BE.
BC = BE + EC, ma BE ≅ BD ed EC ≅ DA, quindi BC = BD + DA.



9) Soluzione inviata da Edoardo Di Manno, 2°E, Liceo Scientifico Barsanti e Matteucci, Viareggio (LU)



Dimostrazione:
Considero un punto H su BC, tale che risulti BH congruente ad AB, questo è possibile perché in un triangolo ad angoli maggiori sono opposti lati maggiori
Considero un punto E su BC, tale che $\widehat{BDE} = 80°$, questo è possibile perché l'angolo $\widehat{BDE}$ è minore dell'angolo $\widehat{BDC}$ e quindi DE è una semiretta interna
Considero i triangoli BAD e BHD, essi hanno:

- BH ≅ BA per costruzione
- $\widehat{ABD} \cong \widehat{DBH}$ poiché BD è la bisettrice dell'angolo $\widehat{ABC}$ per ipotesi
- BD in comune

Di conseguenza BAD ≅ BHD per il primo criterio di congruenza.
Di conseguenza AD ≅ DH e $\widehat{BAD} \cong \widehat{BHD}$, perché elementi corrispondenti di triangoli congruenti.
Poiché $\widehat{BAD} \cong \widehat{BHD}$ e $\widehat{BAD} = 100°$, allora $\widehat{BHD} = 100°$
Di conseguenza $\widehat{DHC} = 80°$ poiché supplementare di $\widehat{BHD}$.
L'angolo $\widehat{DEB} = 80°$ per differenza di angoli nel triangolo BDE ([[$\widehat{BDH}$]] [$\widehat{BDE}$]= 80° e $\widehat{DBH}$=20°).
Dato che $\widehat{BDE}$ e $\widehat{DEB}$ sono congruenti allora il triangolo BDE è isoscele sulla base DE per il teorema inverso del triangolo isoscele
Dato che $\widehat{DHC}$ e $\widehat{DEB}$ sono congruenti allora il triangolo DHE è isoscele sulla base HE per il teorema inverso del triangolo isoscele
Poiché BDE e DHE sono isosceli allora BD ≅ BE e DH ≅ DE in quanto lati obliqui dei triangoli.
Essendo l'angolo $\widehat{BDC} = 120°$ per differenza di angoli nel triangolo BCD ($\widehat{DBC} = 20°$ e $\widehat{DCB} = 40°$) e l'angolo $\widehat{BDE} = 80°$ allora la loro differenza $\widehat{EDC}$ sarà 40°.
Dato che $\widehat{ECD}$ e $\widehat{EDC}$ sono congruenti allora il triangolo DCE è isoscele sulla base DC per il teorema inverso del triangolo isoscele.
Poiché DCE è isoscele allora i suoi lati obliqui DE e EC sono congruenti.
Dato che AD≅DH e DH≅DE e DE≅EC allora per la proprietà transitiva AD ≅ EC.
Essendo BC = BE + EC possiamo sostituire BE ed EC rispettivamente con BD e AD ed abbiamo in modo che:
BC = BD + AD