quaderni di CABRIRRSAE

Presentazione a cura di
Franca Noè
e
Aurelia Orlandoni

FLAT*landia*

anno VII

geometria on-line
nella scuola secondaria

n°
28

Franca Noè, insegnante di matematica, collaboratore di IRRE-ER, fa parte della redazione di **FLAT*landia*** e coordina le attività.

Aurelia Orlandoni, insegnante di matematica, ricercatore IRRE-ER, è responsabile del sito FARDICONTO e delle attività collegate.

Il gruppo che gestisce FLAT*landia* e' composto da:

- *Giuliana BETTINI - Insegnante di matematica*
- *Giuliano MAZZANTI - Docente di geometria, Univ. di Ferrara*
- *Franca NOE' - Insegnante di matematica*
- *Valter ROSELLI - Ricercatore, Univ. di Ferrara*
- *Luigi TOMASI - Insegnante di Matematica*

Indice

FLAT*landia*

E' un'attività dell'IRRE Emilia-Romagna rivolta principalmente agli alunni del terzo anno della Scuola Media Inferiore e del biennio della Scuola Secondaria Superiore.
La partecipazione all'attività è stata allargata agli studenti del terzo anno di scuola superiore per permettere ai "fedelissimi" di misurarsi ancora con quesiti di geometria sintetica e di approfondire le conoscenze acquisite nel biennio
Ogni mese viene chiesto ai ragazzi di risolvere un problema di geometria. Entro lo stesso mese vengono valutate le risposte pervenute e vengono segnalate quelle ritenute meritevoli.
Testo e soluzioni sono inviati usando esclusivamente collegamenti telematici.

Un po' di storia

I problemi raccolti in questo quaderno testimoniano il settimo anno di attività dell'iniziativa. FLATlandia, nata come supporto alla lista di discussione Cabrinews, gode ormai di una sua vita autonoma ed ha un piccolo pubblico di affezionati.
Le scuole partecipanti sono passate da ventuno, nel primo anno, alle attuali venti con un picco di trentotto nell'anno 2000/2001.

Il progetto

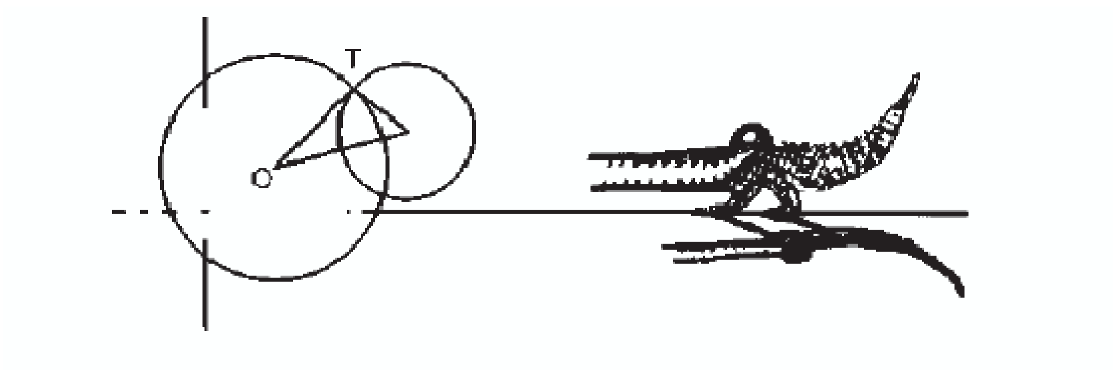
E' gestito da un comitato composto da due insegnanti di scuola secondaria, da due docenti universitari e da un tecnico informatico. Come negli anni passati, il problema proposto mensilmente richiede di solito una costruzione ed una dimostrazione.
L'intento è quello di coinvolgere gli alunni in una attività che richiede sì conoscenze, ma anche fantasia, creatività, immaginazione.
In questo momento di forte auspicio di utilizzo di nuove tecnologie nell'insegnamento/apprendi-mento di varie discipline, FLATlandia si propone come attività al passo coi tempi, senza nulla concedere all'improvvisazione e al pressapochismo.
I problemi proposti richiedono, per essere risolti, sicure competenze e conoscenze matematiche; sollecitano, come già detto, fantasia e creatività, che sono gli aspetti forse più caratteristici di questa disciplina. Qualora vengano utilizzati software, è necessario averne una conoscenza abbastanza approfondita. Per spedire i materiali in forma adeguata (testo e figure) bisogna padroneggiare discretamente le tecnologie informatiche.
La partecipazione a FLATlandia può essere inoltre anche un incentivo, per i ragazzi, a migliorare le loro capacità di argomentazione e di esposizione.

Come partecipare

I problemi sono inviati alla lista di discussione Cabrinews (cabrinews@www.scuolan.it) il primo lunedì di ogni mese, da ottobre a maggio, oppure sono consultabili in rete negli archivi del progetto all'indirizzo: http://www.fardiconto.it/flatlandia.
Gli alunni possono partecipare singolarmente, per gruppi, o inviando un'unica soluzione a nome di tutta la classe. Le soluzioni dovranno pervenire entro il terzo lunedì del mese, al seguente indirizzo di posta elettronica: flatlandia@fardiconto.it, inserendo nel mail il nome, la classe e il nominativo dell'Istituto.

Ulteriori informazioni

Le soluzioni possono essere scritte o direttamente nel messaggio di posta elettronica o in un file in formato Word, inviato in allegato. Se si vuole allegare un disegno deve essere inviato o in formato Cabri-géomètre per MS-DOS o per Windows, altrimenti in formato Word.

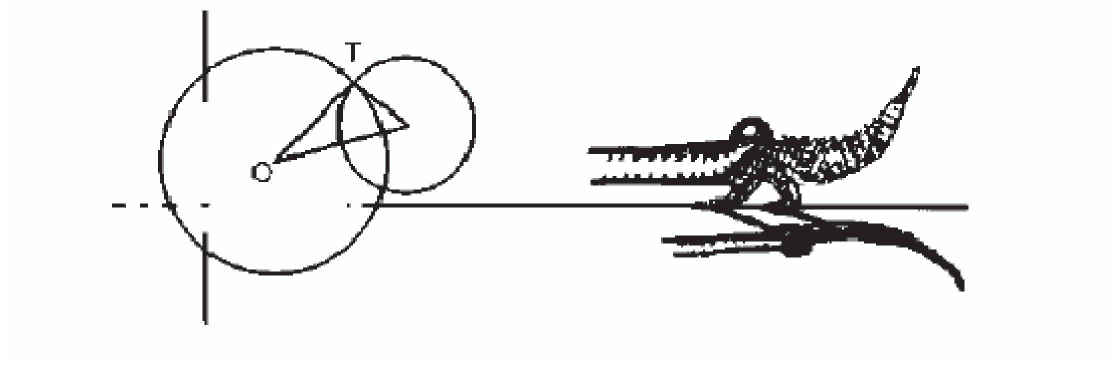


FLAT*landia*

Attività 2003-2004

Tabella riassuntiva delle scuole che hanno inviato soluzioni nel 2003-2004

		Scuola	Frequenza							
			O	N	D	G	F	M	A	M
MEDIE INFERIORI	1	SM “C.A.DallaChiesa”, S.Genesio ed Uniti(PV)	♦	♦	♦	♦	♦	♦	♦	♦
	2	SM “A. Ferrari”, Maranello (MO)	♦							
	3	SM “.Bergamaschi”, Torrevecchia Pia (PV)	♦	♦	♦	♦	♦	♦	♦	♦
	4	SM “L.Da Vinci!”, Rufina (FI)	♦	♦	♦					
	5	SM “Zanella”, Roveredo in Piano(PN)	♦				♦			
	6	SM “Tiepolo”, (MI)		♦		♦				
	7	SM “Settembrini”, Nova Siri (CS)		♦	♦	♦	♦			
	8	SM, Istituto Comprensivo di Venasca (CN)	♦	♦		♦	♦	♦		♦
	9	SM “I. Nievo”, Cordignano (TV)					♦	♦		
	10	SM di Bellinzona (C.T., Svizzera)						♦		
ISTITUTI TECNICI	11	IPSAR “P. Artusi”, Forlimpopoli (FC)	♦							
	12	ITI, LST “F.Berenini”, Fidenza(PR)				♦				♦
	13	ITI “Feltrinelli”, Milano (MI)				♦				
	14	ITI “G. Ferraris”, San Giovanni Valdarno (AR)							♦	
LICEI SCIENTIFICI e GINNASI	15	LS “B. Varchi Montevarchi (AR) – due risposte	♦	♦	♦	♦	♦	♦	♦	
	16	LS “L. da Vinci”, Treviso (TV)	♦	♦						
	17	LS “G. Labonia”, Rossano (CS)		♦						
	18	LS “Aselli”, Cremona (CR)		♦		♦	♦	♦	♦	♦
	19	LS “Farinato”, Enna (EN)		♦	♦	♦	♦			
	20	LS “G. Verdi”, Valdobbiadene (TV)						♦		



FLAT*landia*

Problemi e soluzioni

Ottobre 2003

Il testo del problema
Sia dato un triangolo ABC.
a) Come deve essere fissato un segmento PQ affinché esista un triangolo PQR avente lo stesso perimetro di ABC?
b) Qualora un triangolo PQR del punto a) esista, descriverne almeno un metodo di costruzione.

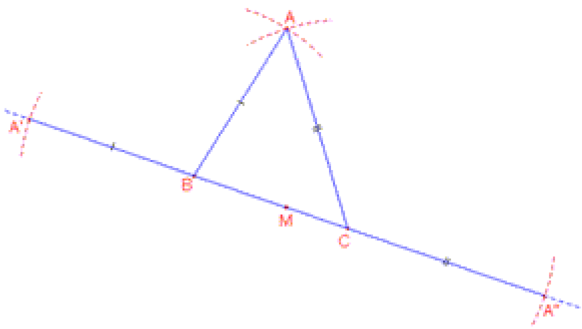


Figura 1

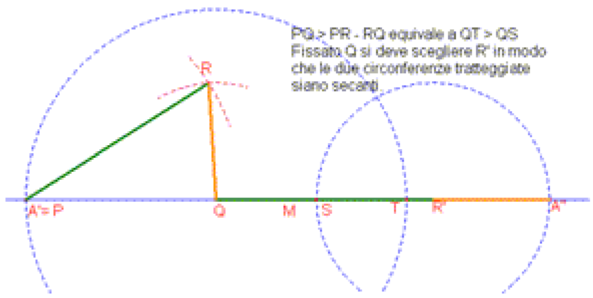


Figura 2

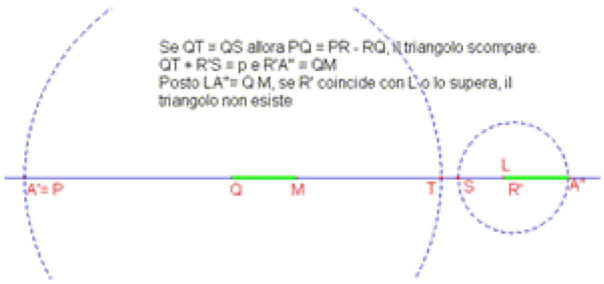


Figura 3

COMMENTO

Ci sono pervenute nove risposte con una partecipazione leggermente superiore da parte della scuola media inferiore rispetto a quella delle superiori. Diamo alle scuole partecipanti il benvenuto o il bentornato alla attività di *FLATlandia*, invitando i ragazzi che non hanno visto pubblicato il loro lavoro a non demordere, ma a cercare di migliorare di volta in volta le loro risposte.

Queste le scuole che hanno partecipato:

- *SM "C. A. Dalla Chiesa", San Genesio ed Uniti (PV)*
- *SM "A. Ferrari", Maranello (MO)*
- *SM "Bergamaschi" Torrevecchia Pia (PV)*
- *SM "L. da Vinci" Rufina (FI)*
- *SM "Zanella", Roveredo in Piano (PN)*
- *LS "Benedetto Varchi" Montevarchi (AR) – due risposte*
- *IPSAR "P. Artusi", Forlimpopoli (FC)*
- *LS "L. da Vinci" Treviso*

Nel problema di questo mese abbiamo proposto una costruzione che apparentemente non presentava difficoltà, costruire un triangolo di lato assegnato isoperimetrico ad un triangolo dato. Si chiedeva prima di analizzare le condizioni che rendessero possibile tale costruzione.
Tale richiesta aveva lo scopo di evitare che venissero presentate soluzioni trovate in modo sperimentale, senza soffermarsi a riflettere sulla corretta scelta dei segmenti in gioco.
Le risposte che abbiamo ricevuto sono piuttosto carenti sotto questo aspetto; si è trascurato di approfondire la ricerca delle condizioni, dilungandosi piuttosto in elaborate costruzioni.
Qualcuno ha invece semplificato eccessivamente il problema, fornendo la costruzione richiesta solo in un caso particolare. Le situazioni particolari vanno eventualmente esaminate dopo aver prodotto una risposta di carattere generale.

Facendo riferimento alle figure che precedono questo commento, riteniamo opportuno fare le seguenti precisazioni:

- la "disuguaglianza triangolare" afferma che ogni lato è minore della somma degli altri due e da ciò si deduce che PQ deve essere minore del semiperimetro;
- dalla "disuguaglianza triangolare" si deduce anche che ogni lato deve essere maggiore della differenza degli altri due quindi, una volta fissato PQ, si deve scegliere R in modo opportuno come illustrato nelle figure;

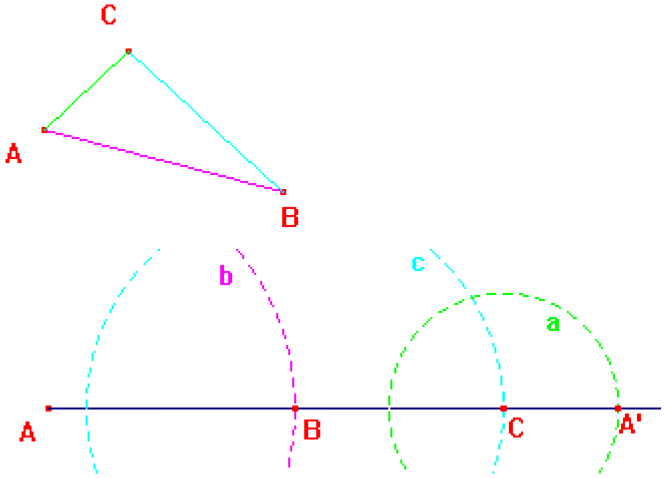
Precisiamo inoltre che le costruzioni si intendono fatte con riga e compasso, quindi, anche nel caso che si utilizzi il sw Cabri, non è corretto trasportare le misure.
Abbiamo riscontrato una più accurata e completa esposizione in alcune risposte di scuola media rispetto a quelle dei ragazzi di scuola superiore; inoltre, nelle risoluzioni inviate dalla SM "Bergamaschi" e dalla SM "L. da Vinci", naturalmente sotto la guida degli insegnanti, i ragazzi hanno completato la loro ricerca di costruzione scoprendo il collegamento fra i triangoli isoperimetrici e l'ellisse.
Vengono presentate le seguenti risposte:

- SM "Zanella", nella quale, anche se non giustificate in modo esauriente, vengono analizzate tutte le condizioni che permettono di costruire il triangolo richiesto.
- SM "Bergamaschi", la cui risposta è stata ritenuta esauriente nella prima parte, ma che richiede qualche nostra precisazione nella seconda.
- SM "L. da Vinci", Rufina, di cui, omettendo la descrizione delle operazioni di costruzione già contenute nelle precedenti risposte, riportiamo la premessa con la traccia della soluzione, a testimonianza del metodo di lavoro di quella classe.

NOTA: Le nostre correzioni od osservazioni sono contenute in parentesi quadra. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni

Classe 2ª A - Scuola Media "Zanella" - Roveredo in Piano (PN)

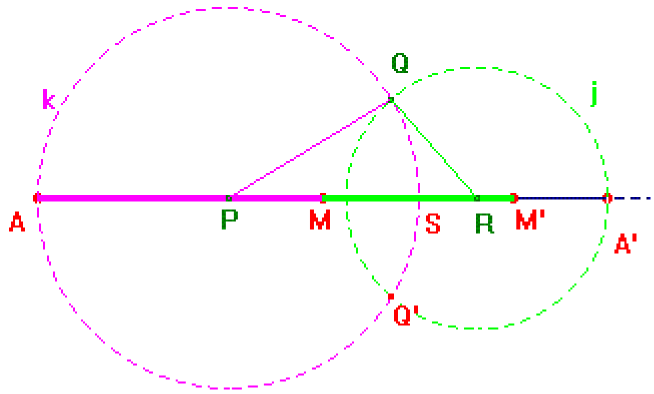


- Riportiamo il perimetro del triangolo ABC su di una semiretta.

[[…]]

Il segmento AA' [costruito col compasso] è uguale al perimetro del triangolo dato.

- Ogni lato di un triangolo è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza.
- Disegniamo un triangolo PQR di perimetro AA': il lato PQ dovrà essere minore di metà perimetro [affermazione da giustificare].

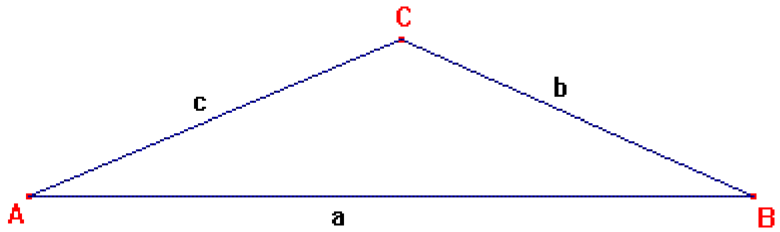


1. Punto medio M di AA';
2. Punto P sul segmento AM;
3. Circonferenza k di centro P per A (il suo raggio è il lato PQ);
4. S, punto d'intersezione di k con AA'; M', punto medio tra S ed A';
5. Punto R sul tratto MM';
6. Circonferenza j di centro R per A' (il suo raggio è il lato RQ);
7. Intersezione di k e j: Q, Q'.

Non si può prendere a caso il punto R sul tratto PA': escludiamo sicuramente il tratto PM, in questo caso il lato RQ sarebbe maggiore della somma degli altri due lati; rimane il segmento MA', non nel tratto M'A', il lato PR sarebbe maggiore della somma degli altri due [quando k e j sono tangenti, R è punto medio di SA' e PR = PQ + QR].

Concludendo: punto P sul segmento AM (estremi esclusi); punto R sul segmento MM' (estremi esclusi).

Brambilla Marta, Pirola Selene, Zotti Luca, Ricca Giuseppe, Gasti Eva, Gambatese Luana, Verdiana Lala Classe III^a M - Scuola Media Statale "Bergamaschi" - Torrevecchia Pia (PV)



Considerato un triangolo ABC, costruiamo [con il compasso] il segmento A'A"= AB+BC+CA

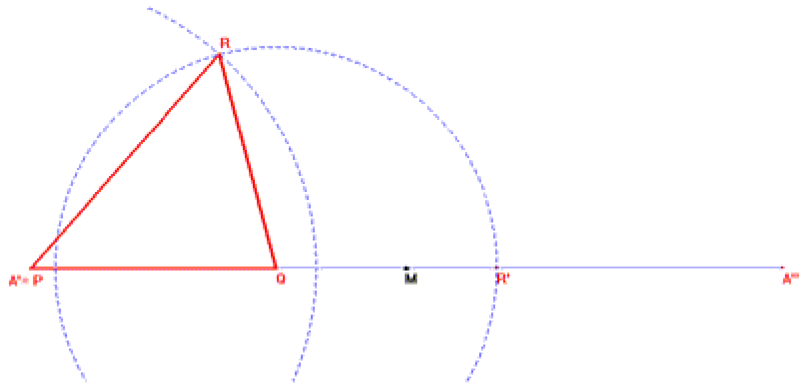
Dobbiamo costruire un triangolo PQR tale che $2p$ = PQ+QR+RP = A'A"
Poiché, per la "disuguaglianza triangolare", in un triangolo un lato è minore della somma degli altri duie e quindi un lato è maggiore della differenza tra gli altri due, deve essere:

- PQ < QR+RP → PQ < A'A"-PQ → 2PQ < A'A" → $\boxed{\mathbf{PQ} < p}$
- Se QR < PR,
  PQ > QR – PR → PQ > $2p$ – PQ – PR – PR → $2p$ – 2PR → $\boxed{\mathbf{PQ} > p - \mathbf{PR}}$
- Se PR > PQ
  PQ > PR – QR → PQ > $2p$ –PQ – QR – QR → $2p$ – 2QR → $\boxed{\mathbf{PQ} > p - \mathbf{QR}}$

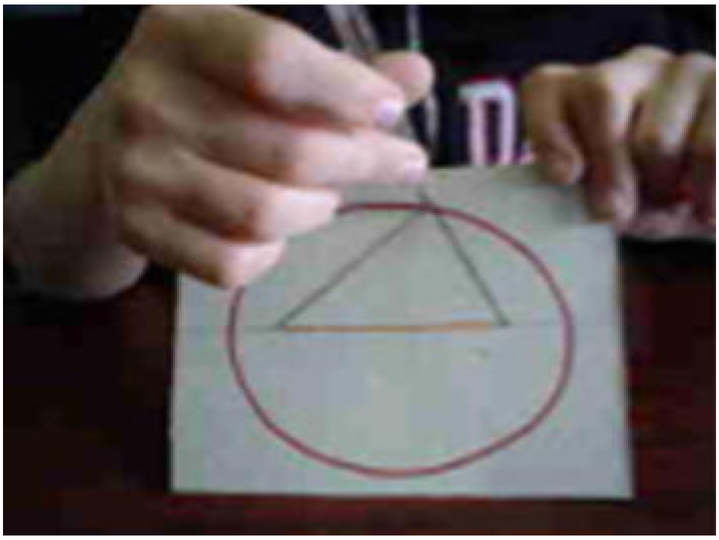
Indicato con M il punto medio del segmanto A'A", preso un segmento PQ con P ≡ A' e Q interno ad A'M e fissato un [opportuno] punto R' interno a MA", otteniamo i segmenti PQ, QR' e R'A", con i quali possiamo costruire il triangolo PQR richiesto. Infatti è:

- PQ < A'M = p
- QR'> A'M – PQ → PQ > p - QR

Quindi la circonferenza di centro P e raggio congruente a R'A" e la circonferenza di centro Q e raggio QR' si intersecano in un punto R, terzo vertice del triangolo PQR.



Facendo variare [una volta fissato] Q sul segmento PM, esclusi gli estremi, e [facendo variare] R' sul segmento MA", esclusi gli estremi [affermazione non esatta come si può vedere dalla figura allegata al commento], si ottengono infiniti triangoli con lo stesso perimetro di PQR.
Se, mediante due spilli, fissiamo nei punti P e Q le estremità di un filo lungo $2p$ – PQ e, tenendo il filo ben teso con una penna, facciamo scorrere la punta della penna sul foglio, otteniamo l'ellisse che ha per fuochi P e Q e tale che per ogni suo punto la somma delle distanze dai fuochi è uguale a $2p$ – PQ



Disegniamo l'ellisse in un piano cartesiano [con il SW Cabri]
[[…]]

Classe 3ªB - Scuola Media - "L. da Vinci" - Rufina (FI)

In classe abbiamo discusso il problema servendoci di cordicella e aste di meccano. Abbiamo affrontato l'argomento seguendo le seguenti fasi:

1. Abbiamo stabilito che la cordicella rappresenti il perimetro P di un triangolo qualsiasi ABC.
2. Immediatamente ci siamo accorti che prendendo PQ > P/2 non riusciamo più a chiudere gli estremi della cordicella medesima. Questo vuol dire che per poter costruire il triangolo necessariamente dovremo avere PQ<P/2 [per cui PQ deve essere minore delle somma degli altri due lati].
3. A questo punto abbiamo legato i capi del cordino e considerato una porzione di questo che rispettasse la condizione del punto 2.

   Abbiamo poi fissato ad un piano la cordicella con due puntine: la prima puntina rappresenta il punto P, la seconda il punto Q. Con un lapis abbiamo messo la cordicella in tensione in modo che rimanesse descritto un triangolo di vertici P, Q ed R, quest'ultimo rappresentato dal lapis medesimo. Ci siamo quindi accorti che il vertice R è mobile. Nel suo movimento esso assume infinite posizioni a ciascuna delle quali corrisponde un triangolo isoperimetrico a quello di partenza.
   Infatti
   PQ = costante. Poiché QR + PR = P – PQ, ne consegue che anche QR + PR è costante
4. Ci siamo però accorti che nel movimento del vertice R si verificano due situazioni opposte in cui il triangolo PQR scompare.

   Osservando meglio con le aste del meccano questa situazione, ci siamo accorti che il triangolo esiste se un lato è maggiore della differenza degli altri due.
   Perciò diremo che se PQ < PR – RQ (o RQ – PR) il triangolo non si chiude.

Muovendo il vertice R sul nostro modellino, sia nel semipiano superiore che su quello inferiore abbiamo notato che esso descrive una figura particolare: è l'ellisse.
Casi particolari: se i punti P e Q coincidono, il triangolo non esiste, ma si disegna comunque una linea curva, una circonferenza, il cui raggio sarà uguale al semiperimetro del triangolo ABC.
Gli infiniti triangoli PQR ottenuti con questa costruzione hanno tutti uguale base ma altezza variabile con continuità da un valore nullo ad un valore massimo che si ottiene quando il vertice R si trova sull'asse del segmento PQ, per tornare poi a zero. Per questo motivo tra tutti i triangoli isoperimetrici quello di area massima è il triangolo isoscele.
Elenco dei comandi per realizzare la costruzione:
[[…]]

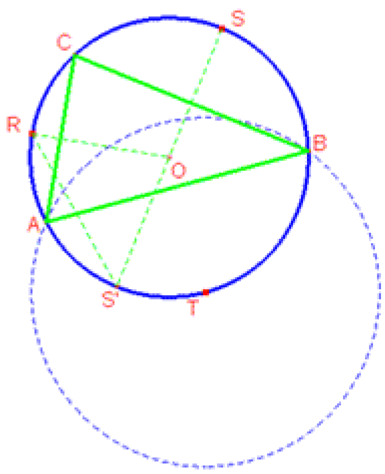
Novembre 2003

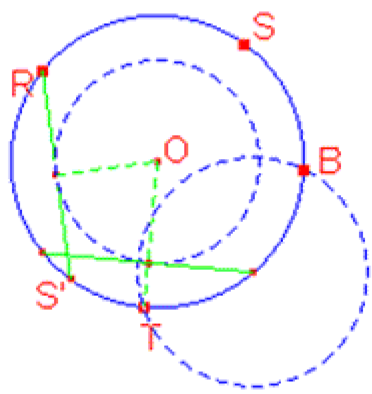
Il testo del problema
Costruire un triangolo inscritto in una circonferenza essendo dati i punti medi degli archi sottesi dai lati.

Costruzione proposta dalla classe 3B - Scuola Media "L. da Vinci - Rufina (FI)

Premessa:

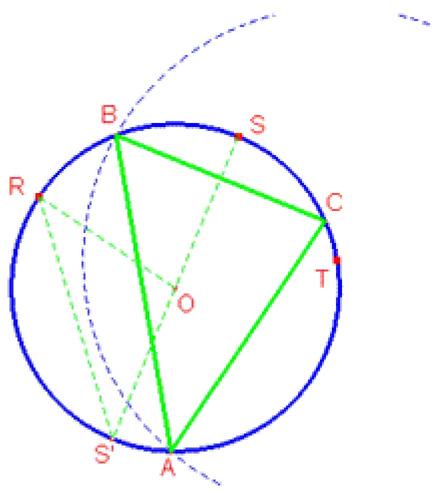
ROS(angolo) = A + B(angoli)   ROS'(angolo) = C(angolo)





***Costruzione**: Fissati R,S,T si punta il compasso in T con apertura RS'. La circonferenza ottenuta incontra quella di centro O in A e B. Simmetria assiale di A rispetto OR si trova C.*

[Sarebbe più corretto non usare il trasporto di segmento mediante compasso; si può, ad esempio, tracciare la circonferenza di centro O con raggio la distanza di O da RS'e procedere come illustrato nella figura.]



La costruzione è valida anche se R,S,T appartengono alla stessa semicirconferenza.
Risultano congruenti gli archi:
AT, TB
CS, SB
CR, RA
Il triangolo si riduce ad un segmento se T=S'

COMMENTO

Abbiamo ricevuto quattordici risposte provenienti dalle seguenti scuole:

- *LS "Giovanni Labonia" Rossano (??)*
- *SM "C.A. Dalla Chiesa" San Genesio ed Uniti (PV)*
- *LS "Aselli" Cremona (CR)*
- *SM "G.B. Tiepolo" Milano – tre risposte*
- *SM "Settembrini" Nova Siri (CS)*
- *LS "B. Varchi" Montevarchi (AR)*
- *SM "Bergamaschi" Torrevecchia Pia (PV)*
- *LS "L. da Vinci" Treviso (TV)*
- *LS "Farinato", Enna (EN)*
- *SM, Istituto Comprensivo di Venasca (CN)*
- *SM "L. da Vinci" Rufina (FI) – due risposte*

In alcune risposte, in maggior parte di scuole medie inferiori, il testo del problema non è stato interpretato in modo corretto: si trattava di prendere (a piacere) tre punti su una circonferenza e di costruire POI il triangolo inscritto che avesse quei punti come punti medi degli archi sottesi dai lati.
Qualcuno ha affermato che, per ottenere il triangolo richiesto, i tre punti non possono appartenere ad una stessa semicirconferenza. Questo è vero solo se si aggiunge la condizione che gli archi che contengono i punti medi non si sovrappongano.
Alleghiamo al testo del problema la costruzione proposta dalla SM "L. da Vinci" (prima figura) con una breve traccia della loro risposta. Nella seconda figura proponiamo una costruzione alternativa basata sulla stessa premessa. Nella terza, da noi ottenuta modificando per trascinamento la prima, si può vedere che la costruzione si applica anche nel caso che i tre punti fissati si trovino in una stessa semicirconferenza. Il triangolo degenera in un segmento quando due dei punti fissati sono estremi di uno stesso diametro.
Gli studenti che hanno affrontato con successo la costruzione hanno dato prova di grande fantasia: varie sono le vie seguite, alcune di notevole efficacia, altre un po' laboriose, ma tutte testimoniano un apprezzabile interesse per le questioni di geometria.
Facciamo una sintetica esposizione delle varie risoluzioni, in quanto non saranno riportate tutte per motivi di imprecisione o incompletezza nella esposizione o nella presentazione della figura.

- Qualcuno ha "scoperto" il legame fra l'ortocentro del triangolo con vertici nei tre punti medi e l'incentro del triangolo da costruire (SM "Dalla Chiesa").
- Alcuni hanno cercato il legame fra gli angoli del triangolo da costruire (angoli alla circonferenza)e gli angoli al centro formati dagli assi dei suoi lati (SM "Bergamaschi" e SM "L. da Vinci"(figura allegata al testo))
- Una risoluzione, semplice nella costruzione, ma piuttosto laboriosa nella giustificazione, è basata sulle relazioni fra gli archi dati e quelli da ottenere.(LS "L. da Vinci")
- Altri hanno invece considerato il triangolo circoscritto con i lati tangenti nei punti assegnati, simile a quello da costruire, ricorrendo poi a procedimenti diversi: l'omotetia (SM "Tiepolo), il trasporto dell'angolo (LS Aselli), un "teorema" sui triangoli isosceli simili (LS "Farinato").

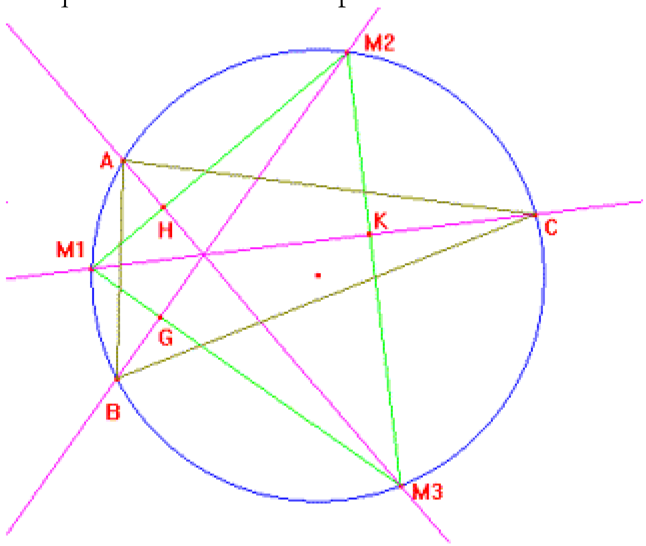
NOTA: Le nostre correzioni od osservazioni sono contenute in parentesi quadra. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni

Omar Barbieri, Stefano Braschi, Mattia Carioti, Simone Carini, Alessio Mezzadra, Lucilla Zoppi,Classe 3P Scuola Media "C.A. Dalla Chiesa " - San Genesio ed Uniti (Pavia)

Premessa:
Inizialmente abbiamo cercato un legame tra il triangolo ABC inscritto in una circonferenza ed il triangolo M1M2M3 che si formava unendo i punti medi degli archi sottesi dai lati. Abbiamo trovato due relazioni:
- le bisettrici degli angoli interni di ABC passavano per i punti M1,M2,M3;
- i prolungamenti delle altezze del triangolo M1M2M3 intersecano la circonferenza nei punti A,B,C.

Abbiamo pensato di utilizzare quest' ultima relazione per la dimostrazione.

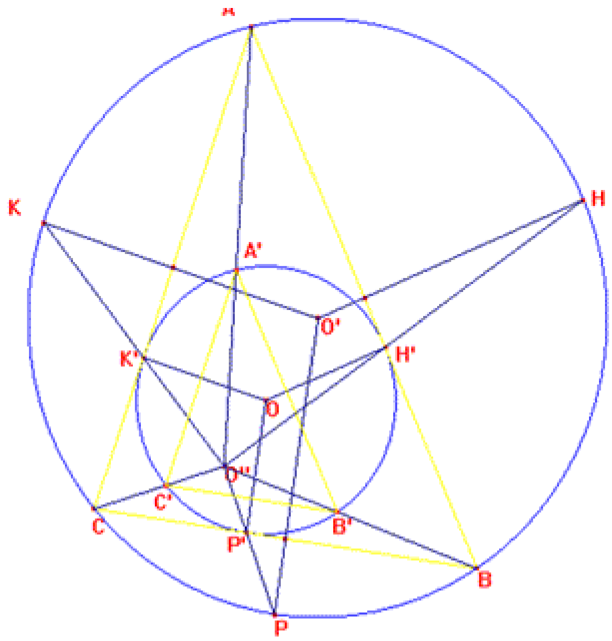


Dimostrazione:
Presi tre punti non allineati M1 ,M2, M3; costruiamo il triangolo M1M2M3, tracciamo gli assi dei lati, troviamo il circocentro che è il centro della circonferenza circoscritta al triangolo.
Tracciamo le altezze del triangolo M1M2M3 e chiamiamo H,G,K le intersezioni con i lati del triangolo; prolunghiamo le altezze e chiamiamo rispettivamente A,B,C le intersezioni con la circonferenza. Vogliamo dimostrare che i punti A, B e C sono i vertici del triangolo che ha come punti medi degli archi sottesi dai lati i punti M1, M2, M3.
– Dimostriamo che M1 è il punto medio dell' arco AB:
consideriamo gli angoli alla circonferenza M1M3A ed M1M2B; essi sono uguali perché angoli complementari dell' angolo M2M1M3 nei triangoli rettangoli M1M2G ed M1M3H.
Siccome sono angoli alla circonferenza della stessa ampiezza, gli archi ad essi sottesi (M1B ed M1A) sono della stessa lunghezza.
Per questo motivo M1 è punto medio dell' arco AB.
[[…]] [Non occorre ripetere la dimostrazione anche per i punti M2 e M3]

Classe 3F - Scuola Media "Tiepolo" (Milano)

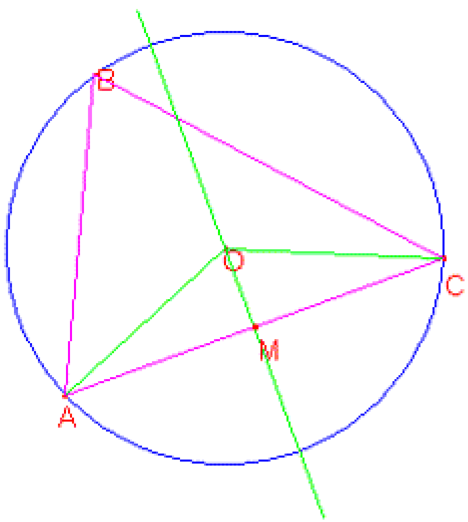
Dimostrazione
Sulla circonferenza C di centro O ho individuato tre punti: H', K', P'; ed ho disegnato i raggi OH', OK', OP', che saranno gli assi del triangolo inscritto.
Ho tracciato tre rette perpendicolari agli assi per i punti prima nominati (H', K', P'), ottenendo così il triangolo ABC circoscritto alla circonferenza di centro O. Ho disegnato gli assi di questo triangolo, ot-

tenendo quindi il suo circocentro O', e ho tracciato la circonferenza circoscritta ad ABC, ottenendo i punti K, H, P, che sono l'intersezione tra [gli assi di ABC] e la circonferenza stessa.
Grazie alle considerazioni precedenti, sappiamo che il triangolo da ricavare è omotetico al triangolo ABC [i lati corrispondenti sono perpendicolari allo stesso segmento].
Per ottenere una omotetia, si deve individuarne il centro; per fare ciò, ho tracciato delle rette passanti per le coppie di punti corrispondenti, quali K e K', P e P', H e H' [sono sufficienti due coppie]; nel punto della loro intersezione O" ho ricavato il centro di omotetia. Ho congiunto O" con i vertici del triangolo [ABC], e nel punto in cui i segmenti intersecano la circonferenza [di centro O], ho ricavato i vertici del triangolo omotetico richiesto A'B'C'.
[[…]].

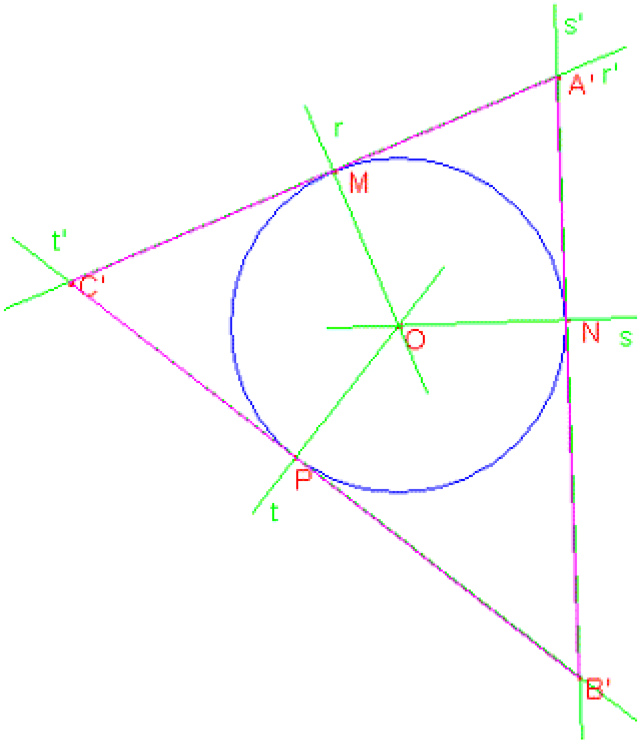


Giacomo Canevari - Classe 2C - Liceo Scientifico "G. Aselli" Cremona

Questa costruzione si basa su una proprietà generale, valida per qualsiasi triangolo ABC di circocentro O.
[[…]]
L'angolo ABC è 1/2 di AOC, che è il suo angolo al centro corrispondente, ed è perciò congruente [nella figura allegata] ad AOM e COM.



Disegniamo la circonferenza di centro O e prendiamo su di essa tre punti, che chiameremo M, N e P. Essi sono i tre punti medi degli archi sottesi dai lati; sono quindi per definizione equidistanti dagli estremi di ogni lato, cioè appartengono al loro asse. Tracciamo le rette passanti per questi punti e per O, che è anche il circocentro del triangolo cercato, che chiameremo rispettivamente r, s e t: sono gli assi del triangolo. Dovremo perciò fare in modo che i lati del triangolo siano perpendicolari ad essi.
Disegniamo quindi le rette perpendicolari a r, s e t passanti rispettivamente per M, N e P, chiamate r', s' e t', che si intersecheranno nei punti A', B' e C'. Il triangolo A'B'C' è simile a quello cercato ABC.

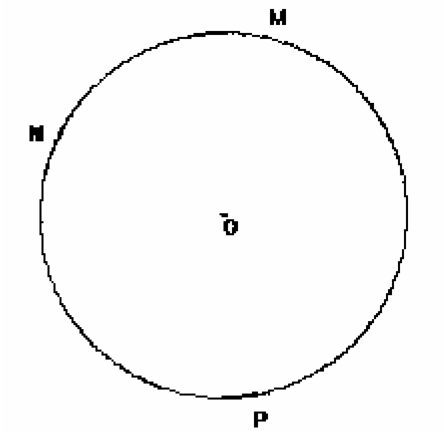


Quindi l'angolo C'A'B' = CAB (perché corrispondenti di triangoli simili) = POB (per la proprietà prima enunciata). Tracciamo le parallele a s' e a r' passanti per O, che intersecheranno la circonferenza in D e in E, poi costruiamo l'asse di PE, che intersecherà la circonferenza in F, e la circonferenza di centro F e raggio FD. L'intersezione tra le due circonferenze è il punto B. Così facendo, infatti, abbiamo riportato l'angolo C'A'B' tenendo come vertice O e come lato OP [essendo l'arco PB=PF+FB congruente all'arco DE=DF+FE].
Conduciamo da B la perpendicolare a s, trovando sulla circonferenza il punto A, e da A la perpendicolare a r, trovando il punto C. il triangolo ABC è quello cercato.

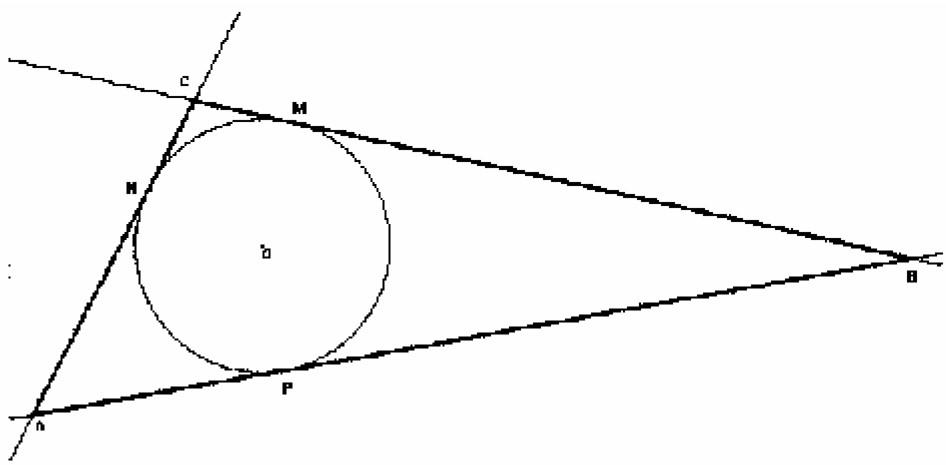
Alunni del gruppo "Giochi Matematici" - Liceo Scientifico "P, Farinato" ENNA

Premessa:
E' facilmente dimostrabile la seguente proprietà: "Dati due triangoli isosceli, se i lati congruenti di uno sono paralleli ai lati congruenti dell'altro, i due triangoli sono simili e i terzi lati dei due triangoli risultano paralleli tra di loro".
Soluzione del problema:
Siano M, N e P i tre punti dati e c la circonferenza, di centro O, passante per essi. Consideriamo la tangente alla circonferenza nel punto M e il diametro passante per esso. Tale diametro risulta perpendicolare alla tangente in M e a tutte le corde aventi questo diametro per asse e aventi quindi gli estremi equidistanti da M. Una di queste corde è uno dei lati del triangolo da costruire e la tangente in M è parallela a tale lato.
Considerando le tangenti alla circonferenza c nei tre punti M, N e P si ottiene il triangolo ABC i cui lati, per quanto sopra detto, sono paralleli ai lati del triangolo richiesto.

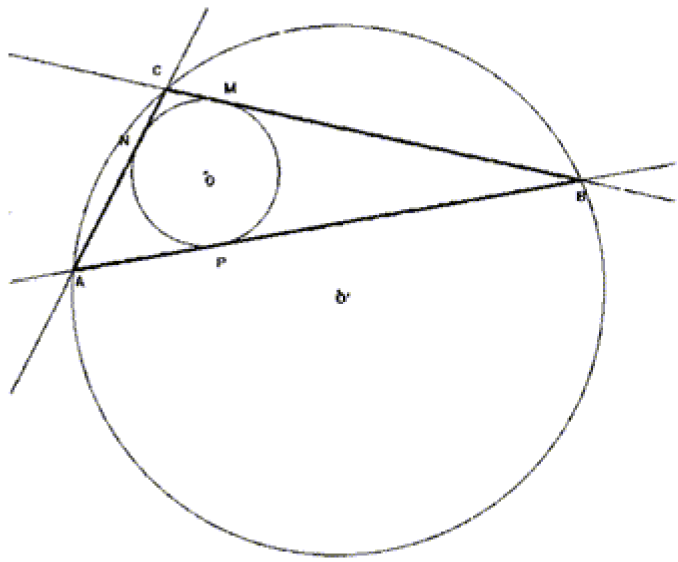
Consideriamo la circonferenza c1, di centro O', circoscritta al triangolo ABC e tracciamo in essa i raggi: O'A, O'B e O'C. Nella circonferenza c tracciamo i diametri paralleli a O'A, O'B e O'C che secano la circonferenza nei punti D, E, F, G, H, I.
Considerando i triangoli isosceli AO'C e FOD, per la proprietà espressa in premessa, si ha che la corda FD risulta parallela ad AC, tangente in N alla circonferenza c. Allo stesso modo si ha che la corda DH risulta parallela alla tangente in M e la corda FH risulta parallela alla tangente in P.
Il triangolo DFH è il triangolo cercato [anche il triangolo GEI].
Consideriamo una circonferenza di centro O e su di essa si prendano i tre punti M, N, P



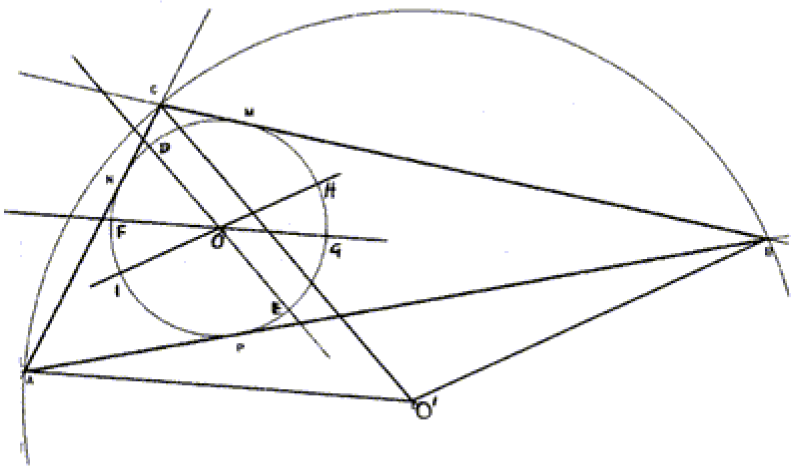
Si tracciano le tangenti alla circonferenza nei punti M, N e P e si considera il triangolo ABC



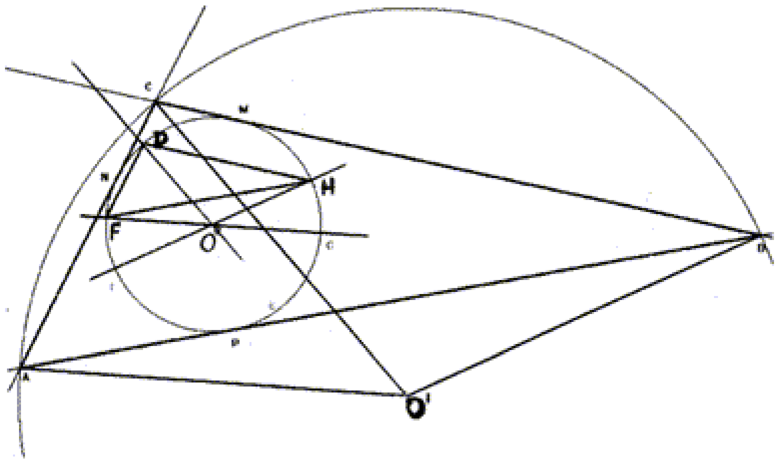
Si costruisce la circonferenza di centro O' circoscritta al triangolo ABC e si tracciano i raggi O'A, O'B, O'C



Si tracciano le rette parallele ai raggi O'A, O'B e O'C passanti per O. Si ottengono i punti D, E, F, G, H, I

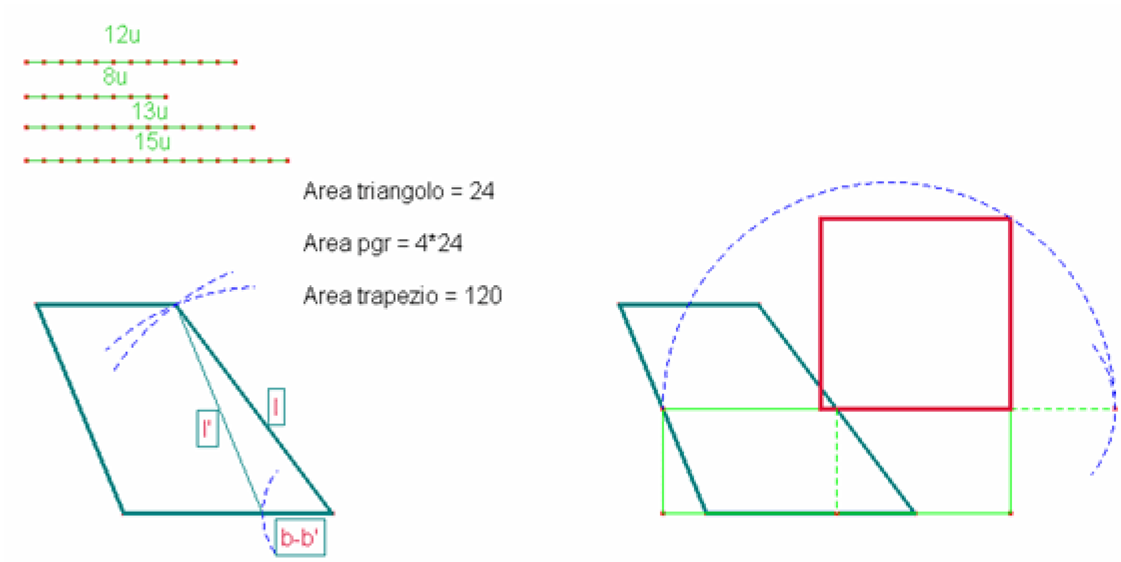


Il triangolo DFH è il triangolo cercato



Dicembre 2003

Il testo del problema:
a) Fissata una unità di misura u, costruire il trapezio le cui basi misurano 12u e 8u ed i lati obliqui 13u e 15u.
b) Calcolare l'area del trapezio.
c) Indicare una costruzione che trasformi il trapezio ottenuto in un quadrato ad esso equivalente.



COMMENTO

Abbiamo ricevuto sei risposte, di cui solo due da scuole secondarie superiori. Forse l'argomento dell'equiscomponibilità non è ancora stato affrontato nelle scuole superiori i cui studenti hanno di tanto in tanto partecipato a *FLATlandia*.

Queste le scuole:

- *SM "C.A. Dalla Chiesa", S.Genesio ed Uniti (PV)*
- *SM "Bergamaschi", Torrevecchia Pia (PV)*
- *SM "Tiepolo" Milano (MI)*
- *SM "Leonardo da Vinci", Rufina (FI)*
- *LS "B. Varchi" Montevarchi (AR)*
- *LS "P. Farinato" Enna (EN)*

Nel problema proposto si chiedeva di costruire un trapezio, date le misure delle basi e dei lati obliqui, di calcolarne l'area e di trasformarlo poi in un quadrato equiesteso. Nelle risposte inviate dalle scuole medie "Tiepolo" e "Leonardo da Vinci" la costruzione iniziale è stata risolta utilizzando direttamente i segmenti assegnati.
In quelle inviate dalle scuole medie "C.A. Dalla Chiesa" e "Bergamaschi" sono state prima analizzate le caratteristiche della figura risultante, prolungandone i lati obliqui e ricorrendo alla similitudine, per dedurne poi una costruzione che, però, viene descritta solo dai ragazzi della SM "Bergamaschi".

Gli studenti di scuola superiore o non hanno affrontato in modo corretto (LS "B. Varchi") questa prima costruzione oppure hanno privilegiato un percorso algebrico (LS" P. Farinato") per individuare condizioni di esistenza del trapezio, senza descriverne poi la costruzione.
Anche il calcolo dell'area del trapezio ottenuto è stato realizzato in modo diverso: applicazione della formula di Erone ad un opportuno triangolo, per i ragazzi di scuola media; determinazione dell'altezza mediante equazioni, per gli studenti di scuola superiore.
La terza parte, cioè la trasformazione del trapezio in quadrato, è stata risolta principalmente trasformando il trapezio in un rettangolo e successivamente nel quadrato richiesto, utilizzando uno dei teoremi di Euclide. Fanno eccezione i ragazzi del LS "P. Farinato", come si può vedere dalla loro risposta.
Di ciascuna delle risposte presenteremo le parti che abbiamo ritenuto più significative.

NOTA : Le nostre correzioni od osservazioni sono contenute in parentesi quadra. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

SOLUZIONI

Giacomo Monzio Compagnoni
Classe 3F - S.M. "Tiepolo" - Milano (MI)

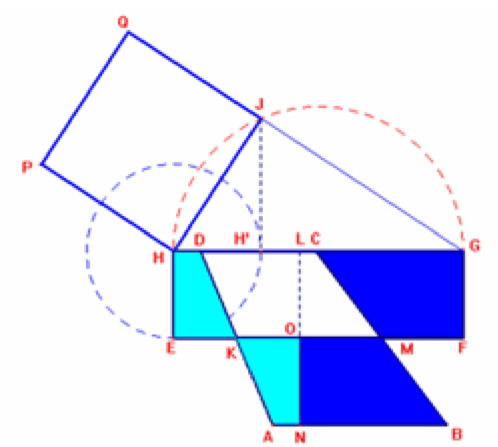
[Si fa riferimento alla prima figura della pagina precedente]

a) Per disegnare il trapezio [ho prima costruito] il triangolo avente come base la differenza tra le basi del trapezio e, come lati [[…]], i lati obliqui del trapezio.
Ho disegnato la sua base e ho tracciato due circonferenze aventi come centri gli estremi della base e ho trovato il punto di intersezione tra loro che insieme ai due estremi della base è un vertice del triangolo.
Ho [prolungato] la base del triangolo fino a che ha misurato 12U [come la] base maggiore del trapezio.
Ho considerato il lato del triangolo avente un estremo in comune con un estremo della base di 12 U uno dei lati del trapezio e per tracciare l'altro lato ho tracciato la parallela all'altro lato del triangolo passante per l'altro estremo della base di 12 U. Ho tracciato la parallela alla base maggiore passante per l'estremo del primo lato obliquo [[…]], e ho trovato il punto di intersezione tra questa retta e l'altro lato obliquo che è l'ultimo vertice del trapezio.
b) [[…]]
c) [[…]]

Classe 3B - Scuola Media "L. da Vinci" - Rufina (FI)

a) Non avendo tra i dati di partenza alcun angolo, abbiamo considerato il trapezio ABCD richiesto come costituito da un triangolo (avente come base la differenza delle basi del trapezio (AB-CD) e gli altri due lati congruenti a quelli del trapezio), e da un parallelogramma avente la base congruente alla base minore assegnata e il lato obliquo coincidente con uno dei lati del triangolo. E' quindi evidente che i trapezi che si possono così disegnare sono 2, a seconda del lato obliquo scelto per individuare la parallela.
Elenco dei comandi per la costruzione
Abbiamo costruito 4 segmenti AB, CD, BC e AD, che sono misurano 12u, 8u, 15u e 13u, stabilito un segmento unitario (u) che abbiamo utilizzato con unità di misura.
1) Retta r
2) Punto A su di essa
3) Compasso, apertura congruente alla differenza delle basi e centro in A, si individua A' all'intersezione della retta con la circonferenza.
4) Compasso, apertura lato obliquo1 e centro in A.
5) Compasso, apertura lato obliquo2 e centro in A'.
6) Punto D all'intersezione delle due circonferenze.

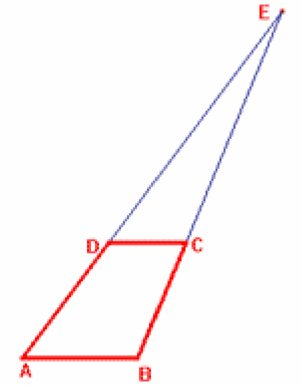
7) Parallela ad r passante per D.
8) Compasso, apertura congruente alla base minore, centro in D, si individua il punto C.
9) Parallela al lato obliquo2 passante per C, individuo il punto B all'intersezione della parallela con la retta r.
10) Poligono ABCD
b) [[…]]
c) Per trasformare il trapezio ABCD nel quadrato ad esso equivalente siamo passati attraverso una figura intermedia, il rettangolo equivalente a cui potremo applicare il 1° teorema di Euclide.
Da trapezio scaleno a rettangolo
Per realizzare questa trasformazione abbiamo operato alcuni passaggi fondamentali:
1) Individuare su uno dei lati obliqui, CB, il punto medio M e tracciare la parallela alla base AB passante per M individuando così il punto K all'intersezione della parallela con il lato obliquo AD.
2) Tracciare la perpendicolare alla base minore CD passante per un punto L appartenente ad essa in modo tale che la sua proiezione, N, appartenga alla base maggiore AB; punto O intersezione di LN con la retta MK.
Il trapezio rimane diviso così in due coppie di trapezi rettangoli, NBMO e MCLO, ANOK e DKOL aventi a due a due il lato obliquo congruente e gli angoli uguali perché corrispondenti in quanto descritti da rette parallele (AB, CD, MK) tagliate da una stessa trasversale (rispettivamente CB e AD):
DAB = DKM; AKM = ADC; ABC = KMC; KMB = DCB,
e supplementari perché coniugati interni:
KMC + KMB = 180°; BCD + ABC = 180°; DKM + AKM = 180°; DAB + ADC = 180°
La simmetria centrale dei poligoni NBMO e ANOK intorno ai punti medi M e K, porta:
a) la esatta sovrapposizione dei lati obliqui, MB su MC, AK su KD,
b) gli angoli supplementari, adiacenti (ABC adiacente con BCD, BMK adiacente con KMC ecc.)
c) la perpendicolare a CD, LN, nelle perpendicolari HE e GF, ancora a CD .
Da a) e b) consegue l'allineamento dei punti H e G, simmetrici di N rispetto ad i punti M e K, sulla retta CD, e in modo analogo dei punti E ed F, simmetrici di O, sulla retta MK.
La figura che se ne ottiene è il rettangolo EFGH (punto c), equivalente, con il trapezio di partenza perché equicomposto con esso.
Nota: nel problema abbiamo scelto di posizionare il punto L in modo che la sua proiezione ortogonale appartenga alla base maggiore per semplificare la dimostrazione che ne consegue.
Infatti se il punto N cade esternamente alla base maggiore il rettangolo EFGH si forma comunque ma i trapezi ANOK, KOLD, NBMO e OMCL degenerano in poligoni intrecciati e non per cui diventa laborioso giustificare l'equivalenza del trapezio ABCD e del rettangolo EFGH.



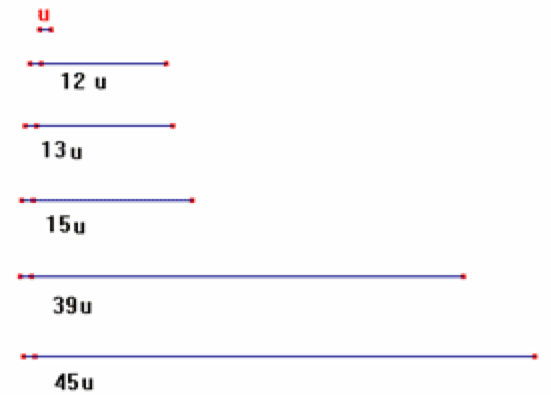
Da Rettangolo a quadrato
Per operare questa trasformazione ci siamo avvalsi del I° Teorema di Euclide.
Sia la dimensione maggiore del rettangolo, HG, ipotenusa del triangolo rettangolo HGJ inscritto nella semicirconferenza di uguale diametro.
Sia inoltre H'il punto ottenuto su HG facendo centro in H con apertura HE. Il segmento HH' così individuato è la proiezione del cateto HJ.
Si procede alla costruzione di quest'ultimo tramite la perpendicolare ad HG, per H'che individua sulla semicirconferenza il punto J.
Il quadrato HJQP costruito sul cateto HJ è la figura richiesta dal problema.

Marta Brambilla e Selene Pirola
Classe 3M - S.M.“Bergamaschi” - Torrevecchia Pia (PV)

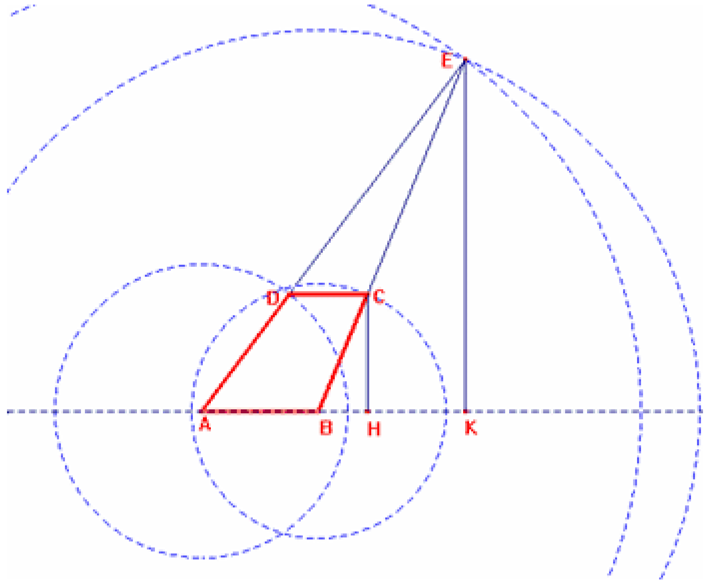
a) Prima di eseguire la costruzione richiesta, osserviamo che, prolungando i lati obliqui del tra-pezio, otteniamo due triangoli simili. Chiamiamo E l’intersezione dei prolungamenti dei lati obliqui AD e BC.
I triangoli ABE e DCE sono simili per il primo criterio di similitudine perché hanno:
l’angolo AEB in comune.
angolo EDC = angolo EAB perché angoli corrispondenti formati dalle parallele AB e DC tagliate dal-la trasversale EA
angolo ECD = angolo ABE perché se due triangoli hanno rispettivamente congruenti due angoli, hanno congruente anche il terzo, essendo la somma degli angoli interni di un triango-lo 180°
quindi possiamo scrivere AE : DE = BE : CE = AB : DC e, per la proprietà dello scomporre,
(AE - DE) : AE = (BE – CE) : BE = (AB – DC) : AB ossia per il nostro trapezio sarà
15 : AE = 13 : BE = 4 : 12 da cui ricaviamo AE=45u e BE=39u



Per costruire il trapezio fissiamo una unità di misura u e [[…]] disegniamo i seguenti segmenti:



Costruiamo quindi il triangolo ABE i cui lati misurano 45u, 39u, 12u.
Otteniamo il punto D come intersezione di AE con la circonferenza di centro A e raggio 15u.
In modo analogo otteniamo il punto C, intersezione di BE con la circonferenza di centro B e raggio 13u.
[[...]]
DC inoltre, per il rapporto di similitudine, misura 8u.



b) Per calcolare l'altezza CH del trapezio, calcoliamo prima l'altezza EK del triangolo ABE, che ricaviamo dopo aver calcolato l'area mediante la formula di Erone.

$$Area(ABE) = \sqrt{\frac{45+39+12}{2} \cdot \left(\frac{45+39+12}{2} - 45\right) \cdot \left(\frac{45+39+12}{2} - 39\right)\left(\frac{45+39+12}{2} - 12\right)} = 216u^2$$

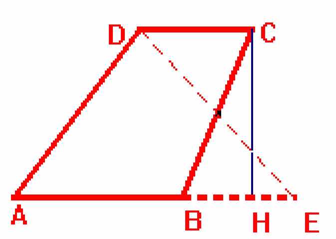
EK = 216.2:12 = 36u

Poiché i triangoli CBH e EBK sono simili per il primo criterio di similitudine, essendo CHB = EKB=90° e l'angolo CBH in comune, possiamo scrivere EK : CH = BE . BC e quindi

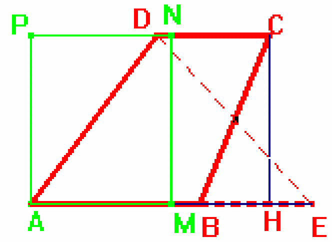
36 : CH = 39 : 13 da cui CH = 12u

Area(ABCD) = (12 + 8) * 12 : 2u^2

c) Costruiamo il corrispondente del segmento DC nella simmetria centrale di centro il punto medio di BC. Il trapezio è equivalente al triangolo ADE avente per base la somma delle basi del trapezio e per altezza l'altezza del trapezio.



Costruiamo ora il rettangolo AMNP dove M è il punto medio di AE. Tale rettangolo è equivalente al triangolo AED e, per la proprietà transitiva della relazione "equivalenza", è equivalente al trapezio ABCD

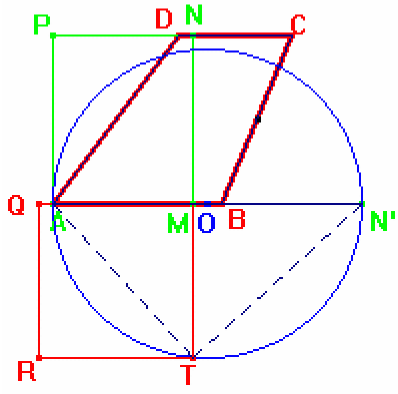


Indichiamo con N' il punto di intersezione della circonferenza di centro M e raggio MN con la retta AB e con O il punto medio di AN'.

Disegniamo la circonferenza di centro O e raggio ON' e, tracciata la perpendicolare ad AN' passante per M, indichiamo con T una delle due intersezione con la circonferenza.

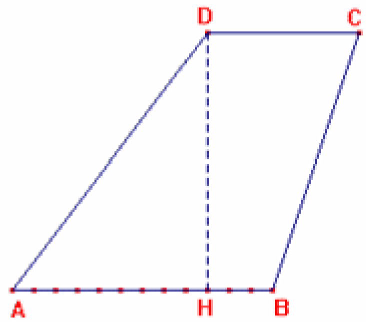
Nel triangolo ATN', rettangolo perché inscritto in una semicirconferenza, TM è l'altezza re-lativa all'ipotenusa.

Per il secondo teorema di Euclide, il quadrato costruito su TM è equivalente al rettangolo avente per dimensioni le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa, ma essendo MN'=MN è an-che equivalente al rettangolo AMNP, che a sua volta è equivalente al trapezio ABCD.

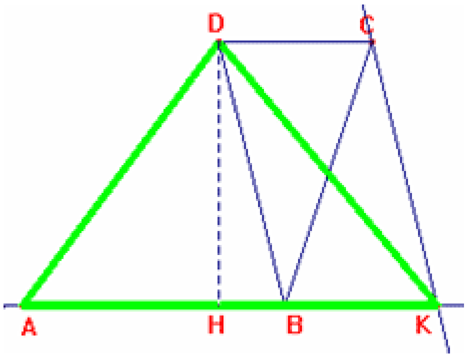


Classe 3P - S.M. "C.A. Dalla Chiesa" - San Genesio ed Uniti (PV)

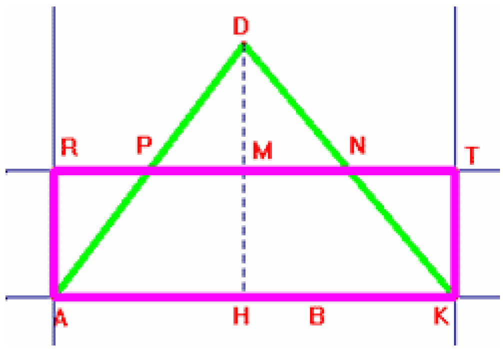
a) [[…]] [simile a SM "Bergamaschi"; costruzione non descritta]



b) [manca il calcolo dell'area]
c) Ora trasformiamo il trapezio in un triangolo equiesteso:

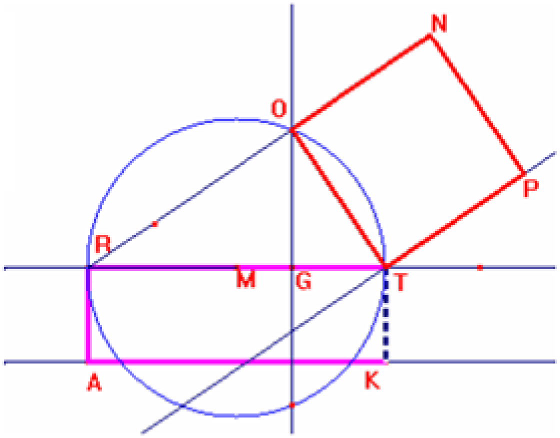


tracciamo la diagonale DB e la parallela ad essa passante per C; prolunghiamo il lato AB e chiamiamo K il punto di intersezione tra il prolungamento e la retta. Uniamo D con K.
Il triangolo AKD è equiesteso al trapezio per somma di superfici [equiestese in quanto] congruenti (DCB=DBK; il trapezio ABCD=ADB+DBC, il triangolo ADK=ADB+DBK)



Ora trasformiamo il triangolo ADK in un rettangolo ad esso equiesteso:
troviamo il punto M (il punto medio di DH), tracciamo la retta parallela ad AK passante per M e poi mandiamo le perpendicolari a questa retta passanti per A e K. Chiamiamo R e T le loro intersezioni.
Il rettangolo AKTR è equiesteso al triangolo ADK per somma di [superfici] equiestese:
il rettangolo AKTR=AKNP+ARP+NTK, il triangolo AKD=AKNP+PMD+DMN, i triangoli RPA e PMD

[congruenti] poiché AP=PD e gli angoli APR=DPM poiché angoli opposti al vertice(la stessa cosa avviene per i triangoli KTN e MND).



Ora trasformiamo il rettangolo in un quadrato ad esso equiesteso sfruttando [il primo] teorema di Euclide:
[con centro nel punto medio del lato RT] (M) tracciamo una circonferenza passante per R e T. Ora riportiamo l' altezza TK del rettangolo sul lato RT utilizzando il compasso, e per il punto G ottenuto mandiamo la perpendicolare al lato RT. Il punto di intersezione di questa con la circonferenza lo chiamiamo O.
Disegniamo il triangolo ROT che sappiamo essere rettangolo poiché inscritto in una semicirconferenza. Costruiamo il quadrato sul cateto OT che è equiesteso, per il primo teorema di Euclide, al rettangolo avente come dimensioni l' ipotenusa RT e la proiezione del cateto sull' ipotenusa.
Questo quadrato è equiesteso al trapezio iniziale per la proprietà transitiva dell' equiestensione.
[[...]]

Luca Visani
Classe 2E - L.S. "B. Varchi" - Montevarchi (AR)

a) [[…]]

b) Dal punto C [CD base minore del trapezio, AB base maggiore, CB lato obliquo maggiore] si conduce l'altezza CH, che è il dato che manca per calcolare l'area del trapezio.
Si dichiara l'incognita AH = x; di conseguenza è BH = AB – AH = 12 – x.
Dato che è noto che BC = 15u, con il teorema di Pitagora si ricava CH:
$\mathrm{CH} = \sqrt{15^2 - (12-x)^2} = \sqrt{225 - 144 - x^2 + 24x)} = \sqrt{81 - x^2 + 24x}$ Da D si conduce quindi l'altezza DK e risulta che AK = KH – AH = 8 – x, e dunque
$\mathrm{DK} = \sqrt{13^2 - (8-x)^2} = \sqrt{169 - 64 - x^2 + 16x} = \sqrt{105 - x^2 + 16x}$
A questo punto possiamo calcolare la x:
$\sqrt{105 - x^2 + 16x} = \sqrt{81 - x^2 + 24x}$
$105 - x^2 + 16x = 81 - x^2 + 24x$
$16x - 24x = 81 - 105$
$- 8x = - 24$
$x = 3$ AH = 3u
AK = 8 – x = 8 – 3 = 5u
$\mathrm{DH} = \mathrm{CH} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12u$ Adesso è possibile calcolare la superficie del trapezio:
A(ABCD) = (12 + 8) * 12 / 2 = 120 u^2
c) [[…]]
[la costruzione, simile a quella della SM Dalla Chiesa, presenta alcune imprecisioni]

Pierluigi Cameli, Giuseppe Cacciato e Giuseppe Petraia (classe 2E)
Pietro Di Giangi e Gaetano Di Venti, (classe 1C)
Liceo Scientifico "Farinato" - Enna (EN)

a) [[…]] [Calcoli corretti, non descritta la costruzione]
b) [[…]]

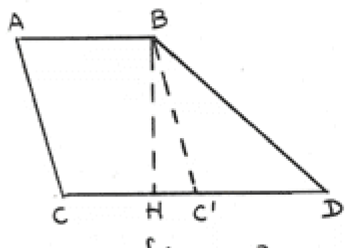


figura 2

L'area del trapezio risulta essere allora:
(CD + AB) * AH / 2 = (12 *u* + 8 *u*) * 12 *u* / 2 = 120 u^2

c) Il quadrato di area $120u^2$ deve avere lato = $u \cdot \sqrt{120}$. [[….]]

Il segmento di lato $u \cdot \sqrt{120}$ si può ottenere come secondo cateto di un triangolo rettangolo avente l'ipotenusa = 13*u* e un cateto = 7*u*.
Per tracciare il segmento:
Consideriamo la circonferenza di centro O e diametro ST = 13*u* (figura 3).
Sul diametro ST prendiamo il punto Z tale che SZ = 7*u*. Con apertura di compasso SZ e centro in S, tracciamo l'arco VZ. Il segmento VS è lungo 7*u*, l'angolo SVT è retto perché inscritto in una semicirconferenza; VT è il lato del triangolo cercato.
Per costruire il quadrato si prolunga il lato SV oltre V, puntando il compasso in V si riporta su questo prolungamento un segmento VP = VT; mantenendo invariata l'apertura del compasso e centrando nei punti P e T si tracciano i due archi che si intersecano in Q; il quadrato PQTV è il quadrato richiesto.

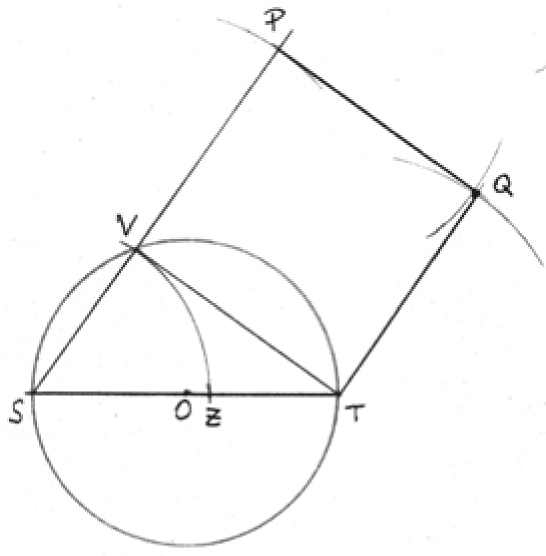
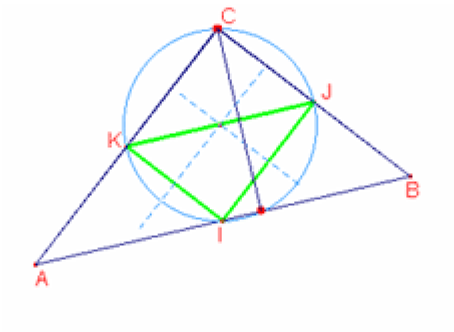
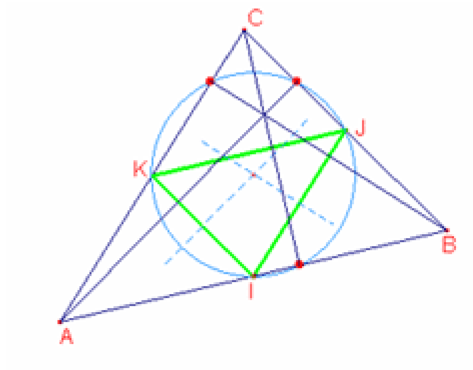


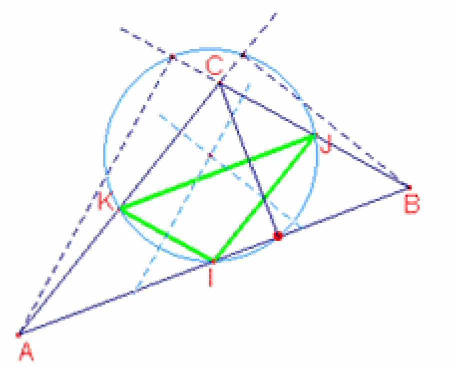
figura 3

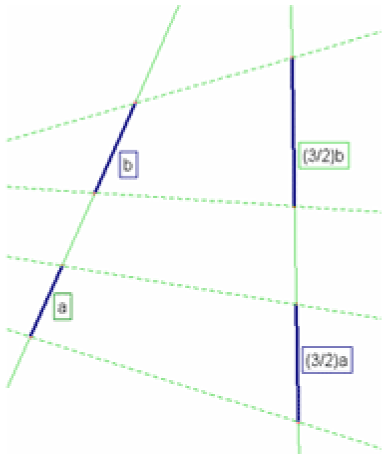
Gennaio 2004

In un triangolo rettangolo scaleno ABC, di ipotenusa BC, siano I, K, J i punti medi di ciascun lato.
a) Costruire la circonferenza circoscritta al triangolo IKJ e verificare che essa passa per cinque punti che appartengono ai lati del triangolo ABC. Caratterizzare quelli diversi da I, J, K.
b) Se il triangolo è scaleno, ma non rettangolo quanti sono, in generale, i punti di intersezione dei suoi lati con la circonferenza? Caratterizzare quelli diversi da I, J, K.









COMMENTO

Sono giunte in tutto undici risposte provenienti da cinque scuole secondarie superiori e da quattro scuole medie inferiori:

- *LS "G. Aselli", Cremona (CR)*
- *Scuola Media di Venasca, Cuneo (CN)*
- *ITI, LST "Berenini" Fidenza (PR) – tre risposte*
- *SM "C.A. Dalla Chiesa", S.Genesio ed Uniti (PV)*
- *SM "Bergamaschi", Torrevecchia Pia (PV)*
- *ITI "Feltrinelli", Milano (MI)*
- *LS "P. Farinato" Enna (EN)*
- *LS "B. Varchi" Montevarchi (AR)*

- *SM "Tiepolo" Milano (MI)* (questa risposta è giunta con notevole ritardo, quando il comitato si era già riunito per il lavoro di valutazione e commento; ci limitiamo quindi alla sua citazione in elenco)

Nel problema proposto si chiedeva di determinare le ulteriori intersezioni, con i lati di un triangolo, della circonferenza passante per i punti medi dei lati del triangolo dato. Si proponeva prima il caso particolare del triangolo rettangolo con lo scopo di facilitare poi la risposta per il caso generale di un qualunque triangolo scaleno.
Nella risoluzione dei quesiti proposti si poteva utilizzare una "nota" proprietà dei triangoli che afferma: "il segmento che congiunge i punti medi di due lati …" (vedi risposta del LS "Farinato") oppure dedurre la stessa dal Teorema di Talete nella sua formulazione più generale, applicato però direttamente (vedi risposta di Giacomo Canevari, LS "Aselli", seconda parte).
Poiché gli studenti cambiano, ripetiamo ancora ***(vedi FLATlandia Marzo 2001)*** che **NON ESISTE** in generale L'INVERSO del teorema di Talete come si può dedurre dalla figura che alleghiamo a questo commento.
Alcune delle risposte pervenute non sono accettabili o per incompletezza o per assenza di motivazioni; in altre invece si riscontra una eccessiva complessità nelle giustificazioni.
Le risposte ritenute valide, anche se presentano qualche imprecisione di esposizione e/o di procedimento, offrono una esauriente risoluzione del problema; in esse infatti si considerano entrambe le situazioni che possono presentarsi nella generalizzazione proposta nella seconda parte.
Abbiamo scelto le seguenti soluzioni:

- Scuola Media di Venasca, in cui dopo una prima affermazione non corretta sul teorema di Talete, seguita da una nostra nota, si fornisce una semplice ed esauriente risoluzione del primo quesito proposto; più elaborata quella del secondo.
- LS "P. Farinato", in cui si utilizza la proprietà dei punti medi, con una nostra nota nella prima parte.
- LS "G. Aselli", in cui si risolve prima il caso generale, per dedurre poi da questo la risposta al primo quesito.

NOTA: Le nostre correzioni od osservazioni sono contenute in parentesi quadra. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni

Classe 3° B - Scuola Media di Venasca (CN)

Punto A) Costruita la figura assegnata, [per una maggior completezza si doveva precisare come si costruisce la circonferenza] il triangolo IKJ risulta simile al triangolo ABC (figura 1)

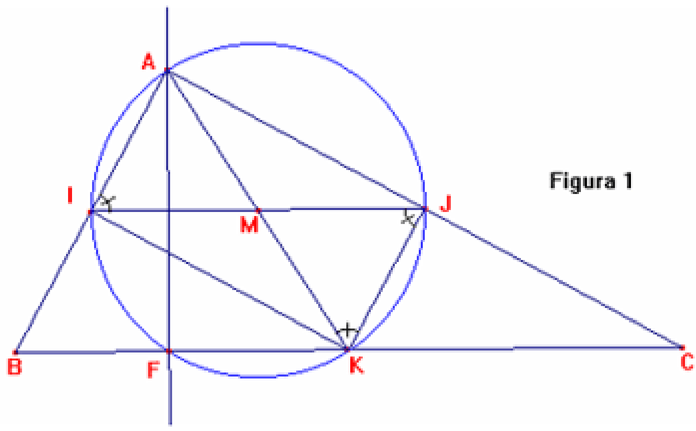


Figura 1

(applicazione inversa del teorema di Talete: se due rette trasversali individuano su di un fascio di rette segmenti proporzionali, allora il fascio di rette è formato da rette parallele) [Affermazione NON CORRETTA - vedi commento – anche se in questo caso la retta per i punti medi è parallela al lato] e congruente agli altri tre triangoli individuati AIJ, BIK e JKC. Pertanto poiché il triangolo IAJ è un triangolo rettangolo con l'ipotenusa coincidente con il diametro della circonferenza, il punto A appartiene alla circonferenza ed è il primo dei punti richiesti. In conseguenza di quanto sopra, il quadrilatero AIKJ risulta essere un rettangolo e la sua diagonale AK coincide anch'essa con il diametro della circonferenza, per cui, disegnata la retta AF (essendo F il quinto punto d'intersezione della circonferenza con il triangolo ABC), l'angolo AFK è anch'esso un angolo retto, per cui l' ulteriore punto d'intersezione della circonferenza con il triangolo ABC risulta essere il piede dell'altezza del triangolo assegnato.
Questo vale anche nel caso di triangoli scaleni qualsiasi **(punto B)** (figura 2); se il triangolo è acutangolo si hanno altri tre punti d'intersezione (D, E, F), mentre se è ottusangolo si ha solo un quarto punto, dato che in questo caso solo un'altezza risulta interna al triangolo.

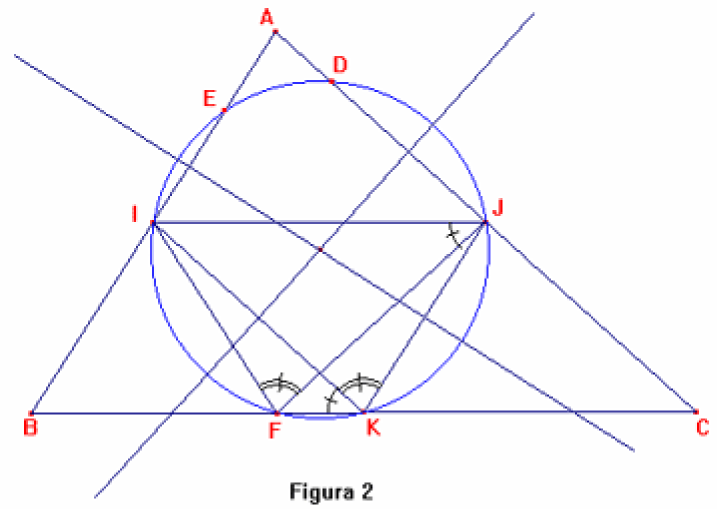


Figura 2

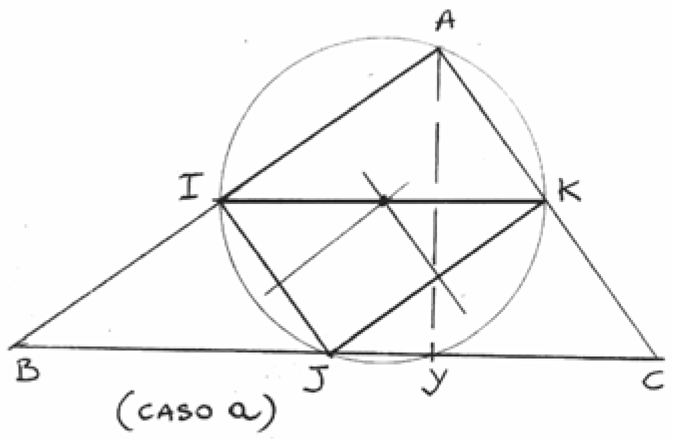
Preso ad esempio di nuovo il punto F [intersezione della circonferenza col] lato BC , il triangolo IFJ risulta anch'esso congruente ai quattro triangoli AIJ, IBK, IKJ e JKC perché ha il lato IJ in comune con i triangoli AIJ e IKJ ed ha i due angoli IFJ ed IJF congruenti rispettivamente con gli angoli IKJ e IKB (congruente sia a KIJ ed a IJA) perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco (AJ per i primi due angoli, IF per i secondi).
Di conseguenza il triangolo IFJ risulta essere il simmetrico del triangolo AIJ con asse di simmetria il lato IJ ; l'altezza condotta da A sulla base IJ avrà lo stesso piede dell'altezza del triangolo IFJ condotta da F [essendo A ed F simmetrici] e pertanto F risulta essere il piede dell'altezza relativa al lato BC del triangolo ABC, come volevasi dimostrare.
Discorso identico si può fare per gli altri due punti D ed E, e risulta anche dimostrato che se il triangolo è rettangolo due punti coincideranno con il vertice dell'angolo retto, mentre se il triangolo è ottusangolo si ha solo un quarto punto.

Classe I C, Liceo Scientifico "P. Farinato" - Enna (EN)

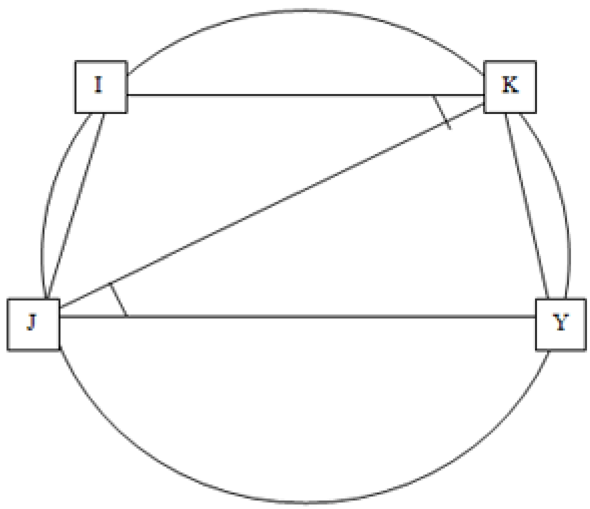
Premesse:

- Il segmento che congiunge i punti medi dei lati di un triangolo è parallelo al terzo lato ed è la metà di esso.
- Per costruire la circonferenza circoscritta ad un triangolo si tracciano gli assi di due lati; il loro punto di intersezione è equidistante dai tre vertici. Si centra il compasso nel punto di intersezione degli assi e si traccia il cerchio passante per i tre vertici del triangolo.

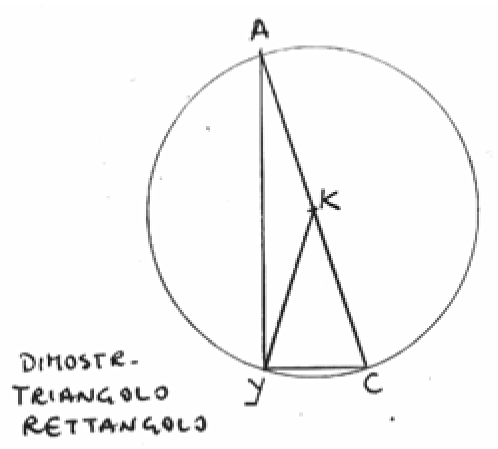
Caso a)
Siano I e K i punti medi dei cateti AB e AC. La circonferenza richiesta passante per I, J e K passerà anche per A perché l'angolo IAK è retto, [l'affermazione è valida se prima si fa notare che, essendo IJ perpendicolare a JK, la circonferenza ha diametro IK] passerà per un quarto punto Y ed avrà come diametro IK [vedi precedente nota].



La corda JY appartiene all'ipotenusa BC, parallela al diametro IK e individua il trapezio IKYJ isoscele (vedi dimostrazione "Trapezio Isoscele").

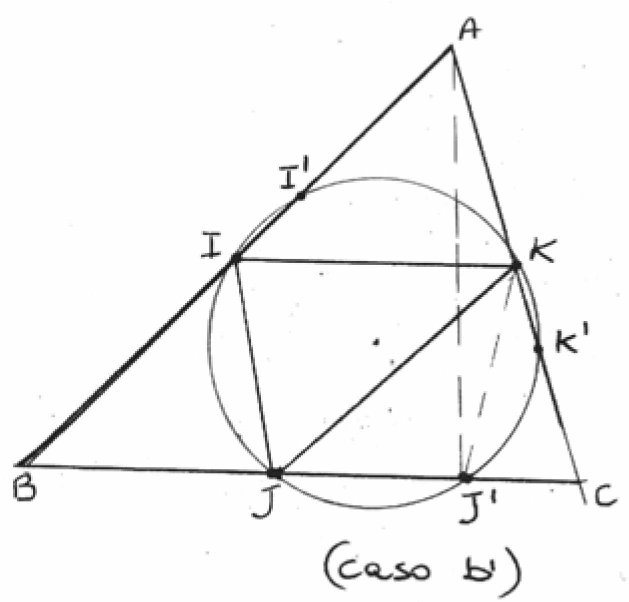


Dimostrazione "Trapezio Isoscele"
Date le due corde parallele IK e JY consideriamo la diagonale JK; gli angoli IKJ e YJK sono congruenti perché alterni interni di due parallele tagliate da una trasversale, di conseguenza sono congruenti gli archi IJ e KY che essi staccano sulla circonferenza e le corde IJ e KY che sono i lati obliqui del trapezio IKYJ.
Segue che KY = IJ = KC = KA, quindi il triangolo ACY, avendo la mediana YK = 1/2 AC, è rettangolo (vedi dimostrazione "Triangolo Rettangolo") e il quinto punto Y è il piede della perpendicolare condotta da A all'ipotenusa BC.

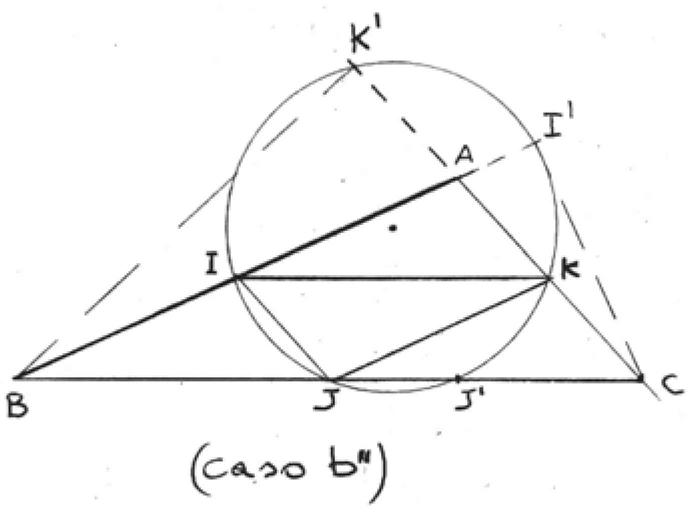


Dimostrazione “Triangolo Rettangolo”
I punti A, Y e C sono equidistanti dal punto K, esisterà quindi una circonferenza di centro K e raggio la distanza comune passante per A, Y e C; ma i punti A,K e C appartengono alla stessa retta e la distanza AC è il doppio del raggio, per cui AC è un diametro. L’angolo AYC che insiste sul diametro AC è retto; il triangolo AYC è rettangolo.
Notiamo che il punto A è allo stesso tempo il piede della perpendicolare condotta da C ad AB e il piede della perpendicolare condotta da B ad AC.

Caso b)
Non esiste un caso generale, ma due casi.

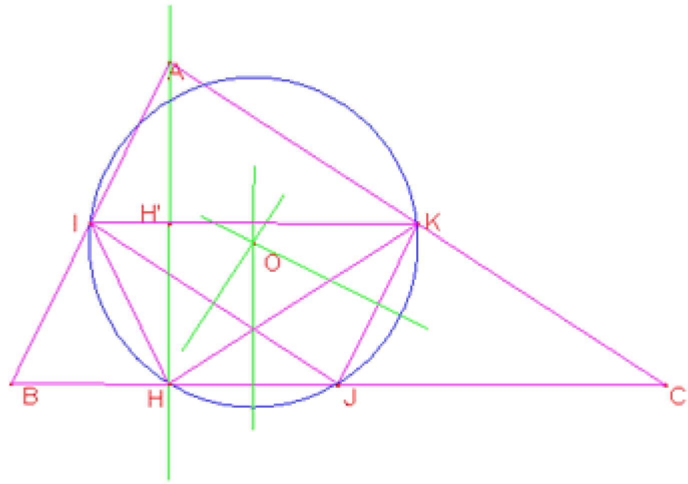


b1) Se il triangolo ABC è scaleno-acutangolo, i tre vertici A,B e C risultano tutti esterni alla circonferenza e ripetendo il ragionamento del caso a) si ottiene che ciascuno dei tre lati risulta intersecato dalla circonferenza in due punti di cui uno è il suo punto medio e l’altro il piede dell’altezza condotta ad esso dal vertice opposto. Totale sei punti di intersezione.



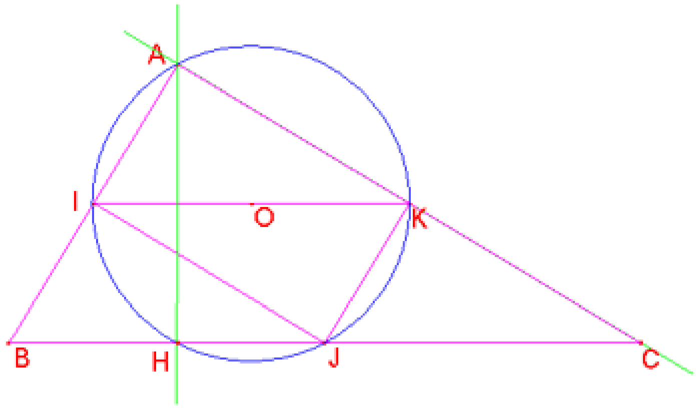
b2) Se il triangolo è scaleno-ottusangolo, sia A il vertice dell'angolo ottuso. In questo caso il punto A risulta interno alla circonferenza. Il lato BC è intersecato dalla circonferenza in due punti di cui uno è il suo punto medio e l'altro il piede dell'altezza condotta ad esso dal vertice opposto, mentre i lati AB e AC sono intersecati solo nel punto medio. Totale quattro punti di intersezione.
Considerando però i prolungamenti dei lati AB e AC, questi vengono ulteriormente intersecati dalla circonferenza in due punti ciascuno dei quali è il piede dell'altezza relativa a ciascun lato.

Giacomo Canevari - Classe 2° C
Liceo scientifico "G. Aselli" - Cremona (CR)

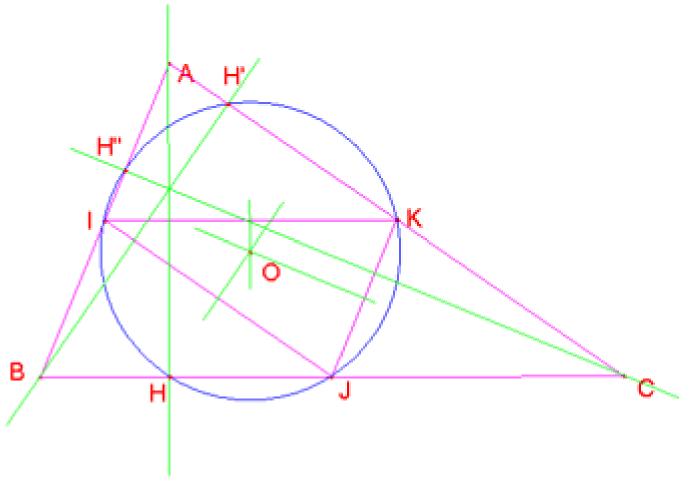


La costruzione si basa sul principio che, dato un triangolo, quello determinato dai punti medi dei tre lati è ad esso simile. Sappiamo infatti che il triangolo ABC e AIK sono simili, perché hanno un angolo (BAC) in comune e due lati rispettivamente proporzionali (AB e AI, AC e AK). Dunque l'angolo AIK è congruente a ABC, e poiché sono angoli corrispondenti, IK è parallelo a BC. La stessa dimostrazione si può ripetere per gli altri lati; da ciò, [[…]], si deduce che i due triangoli ABC e IJK sono simili, che ogni lato del primo è il doppio del corrispondente, e che i triangoli AIK e IJK sono congruenti.
Dimostriamo che, se O è il circocentro del triangolo IJK e H il piede dell'altezza relativa a BC, allora OH = OJ. Per prima cosa, notiamo che AH = HH', dove H' è l'intersezione tra AH e IK: per il teorema di Talete, AB/AI = AH/AH', ma essendo AB = 2 AI, [segue che] AH = 2 AH'. Allora i due triangoli AH'I e HH'I sono congruenti per il [primo] criterio: H'I è in comune, AH = HH', gli angoli AH'I e HH'I sono congruenti perché retti.
Se ne ricava che IH = AI = KJ; ma, poiché IK // BC, anche le proiezioni di IH e di KJ su KI devono essere congruenti. Si deduce che, per differenza di segmenti congruenti, l'asse del segmento IK coincide

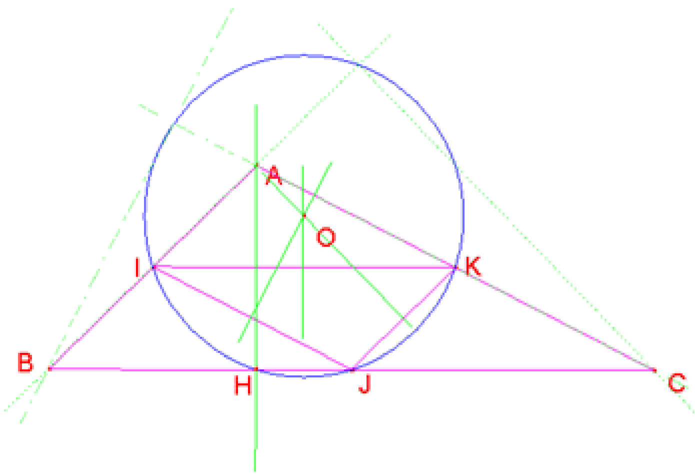
con quello di HJ e, appartenendo O al primo, deve appartenere anche al secondo. È dunque dimostrata la proprietà precedente; H appartiene alla circonferenza circoscritta ad IJK.



a. I punti di intersezione tra il triangolo ABC e la circonferenza circoscritta ad IJK sono, per la proprietà sopra dimostrata, i piedi delle altezze. Se ABC è rettangolo scaleno, essi sono H, piede dell'altezza relativa all'ipotenusa, e A, piede delle altezze relative ai cateti, che coincidono con i cateti stessi.



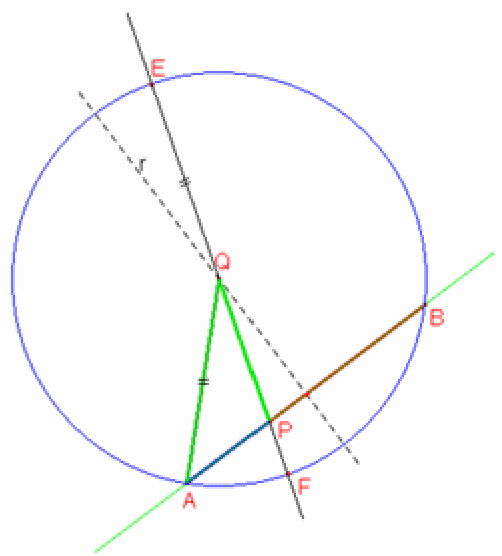
b. Se ABC è scaleno acutangolo, i punti di intersezione con la circonferenza sono tre, i tre piedi delle perpendicolari: H, H' e H". Ma se ABC è scaleno ottusangolo, il punto è uno solo: infatti le altre due altezze sono esterne al triangolo.



Febbraio 2004

E' dato un segmento AB e l'asse r di esso.
Si prenda un qualunque punto P su AB ed un qualunque punto Q su r.

1. **Dimostrare che: AP*PB = QA2 – QP2**
2. **Nel caso che sia P sul prolungamento di AB, come deve essere modificata la relazione data?**



AP : PF = PE : PB (Teorema delle corde)

AP*PF = PF*PE = (QA–QP)*(QA+QP) =

= (QA^2 – QP^2)

COMMENTO
Abbiamo ricevuto nove risposte da studenti di cinque scuole secondarie inferiori e due superiori:

- *LS "G. Aselli", Cremona (CR) – due risposte*
- *SM "G.B.Tiepolo", Milano (MI) – due risposte*
- *SM "Bergamaschi", Pavia (PV)*
- *SM "G. Zanella", Roveredo in Piano (PN)*
- *SM "I. Nievo", Cordignano (TV)*
- *SM "C.A. Dalla Chiesa", S. Genesio ed Uniti (PV)*
- *LS "B. Varchi", Montevarchi (AR)*

Nel problema, dato un segmento AB e il suo asse, preso un punto P sulla retta AB ed un punto Q sull'asse, si chiedeva di dimostrare l'uguaglianza fra il prodotto delle misure di due segmenti (con un estremo in P e l'atro in A o B) e la differenza fra le misure dei quadrati di altri due (con un estremo in Q e l'atro in A o P). Si chiedeva inoltre di distinguere i due casi in cui P fosse all'interno o sul prolungamento di AB.
Il modo in cui è stato posto il quesito ha indotto, in alcune risposte, il ricorso a un metodo di risoluzione algebrico, basato sulla applicazione del teorema di Pitagora o del secondo teorema di Euclide.
In altre invece dopo l'uso del teorema di Pitagora si è utilizzata l'equivalenza di superfici, interpretando geometricamente sia il prodotto dei segmenti sia la differenza dei quadrati.
Una simpatica interpretazione è stata fatta dai ragazzi della Scuola Media di Roveredo in Piano, classe 2A, che hanno immaginato di ritagliare i quadrati su cartoncino e di porli sui piatti di una bilancia per verificare che differenze di superfici equivalenti sono ancora equivalenti.
Nella prima parte qualcuno ha considerato il punto P sulla prima metà di AB, qualcuno sulla seconda; pochi si sono chiesti se la relazione rimanesse invariata modificando la posizione di P.
Questa situazione viene risolta (inconsciamente) nella risposta della Scuola Media di Cordignano che verrà di seguito presentata.

Una interpretazione geometrica, del caso in cui P sia interno ad AB, diversa da quelle proposte, viene da noi illustrata nella figura allegata al testo del problema. Per il caso in cui P sia esterno ad AB vedere la NOTA 1.
Per fornire un quadro completo delle risoluzioni giunte, abbiamo stabilito di presentare le seguenti risposte:

- LS "B. Varchi", come esempio di risoluzione algebrica. Risposte simili, ma contenenti imprecisioni, sono quelle inviate dagli studenti del LS "G. Aselli", dalla SM "Bergamaschi", dalla SM "G.B. Tiepolo" (Velia Cavallini).
- SM "C.A. Dalla Chiesa", la prima parte, in cui si fa ricorso al II teorema di Euclide.
- SM "I. Nievo", come esempio di interpretazione geometrica della prima parte; in essa, mediante una simmetria, vengono implicitamente contemplate entrambe le possibilità (vedi commento).
- SM "G.B. Tiepolo" (Giacomo Compagnoni), come esempio di risoluzione geometrica della seconda parte.

NOTA 1: Una interessante interpretazione geometrica della seconda parte è stata fornita da uno studente del LS "P. Farinato" di Enna (che riportiamo come ultima soluzione proposta). Tale studente frequenta il quinto anno, quindi la sua risposta non viene menzionata nel commento in rispetto al regolamento di FLATlandia

NOTA 2: Le nostre correzioni od osservazioni sono contenute in parentesi quadra. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

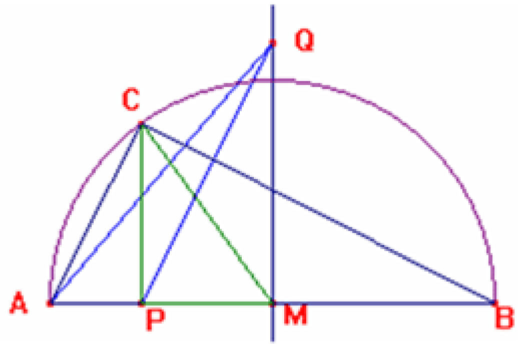
Soluzioni

Luca Visani - Classe 2C, Liceo scientifico "B. Varchi" - Montevarchi (AR)

1) Prendo il punto P ad esempio compreso tra A ed M, il punto medio di AB.
Si nota che AP = AM-PM e PB = PM+MB, ed essendo, per ipotesi, MB congruente ad AM, risulta che PB = AM+PM.
Quindi AP*PB = (AM-PM)(AM+PM) = AM^2-PM^2.
Si considera poi il triangolo rettangolo AMQ [essendo MQ sull'asse di AB]; per il teorema di Pitagora, si ha:
$QA^2 = AM^2+QM^2$.
Sempre dal teorema di Pitagora, però nel triangolo PMQ, si ha: $QP^2 = PM^2+QM^2$; dunque risulta che $QA^2-QP^2 = AM^2+QM^2-(PM^2+QM^2) = AM^2+QM^2-PM^2-QM^2 = AM^2-PM^2$.
Siccome AP*PB = AM^2-PM^2 e $QA^2-QP^2 = AM^2-PM^2$, si ha che AP*PB = QA^2-QP^2.

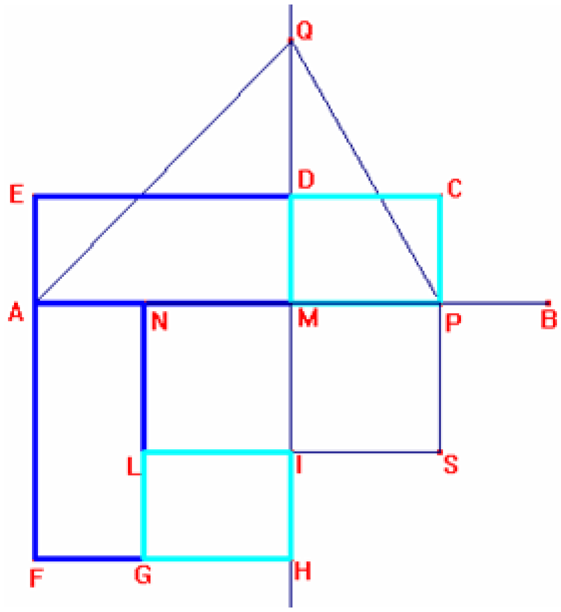
2) Prendo il punto P sul prolungamento di AB dalla parte di B.
AP = AB+PB, quindi AP*PB = (AB+PB)*PB = AB*PB+PB^2.
Sapendo che
$QA^2 = AM^2+QM^2$ e $QP^2 = PM^2+QM^2 = (MB+PB)^2+QM^2 = MB^2+PB^2+2MB*PB+QM^2$,
risulta che
$QP^2-QA^2 = MB^2+PB^2+2MB*PB+QM^2-(AM^2+QM^2) = MB^2+PB^2+2MB*PB+QM^2-AM^2-QM^2 =$ PB2+2MB*PB = PB^2+AB*PB.
La relazione data diventa quindi
AP*PB = $QP^2 – QA^2$

Braschi Stefano, Carioti Mattia, Zoppi Lucilla
Classe 3P, Scuola media "C.A. Dalla Chiesa" - S. Genesio ed Uniti (PV)



PRIMO CASO [[…]]
Poiché
$QA^2=QM^2+AM^2$ e $QP^2=QM^2+PM^2$
si ha che:
$QA^2-QP^2=QM^2+AM^2-(QM^2+PM^2)=QM^2+AM^2-QM^2-PM^2=AM^2-PM^2$
Ora si tratta di dimostrare che $AP*PB=AM^2-PM^2$
Abbiamo considerato il cerchio avente come diametro AB. Chiamiamo C il punto della circonferenza la cui proiezione sul diametro AB sia P.
ABC è rettangolo [in C], poiché inscritto in una semicirconferenza.
Per il teorema di Euclide possiamo scrivere:
$AP*PB=CP^2$
Applicando il teorema di Pitagora al triangolo [CPM], si ha che:
$AP*PB=CP^2=CM^2-PM^2$
Siccome CM è raggio e quindi uguale ad AM, possiamo scrivere:
$AP*PB=CP^2=AM^2-PM^2$, che è quello che volevamo dimostrare.
SECONDO CASO
[…]

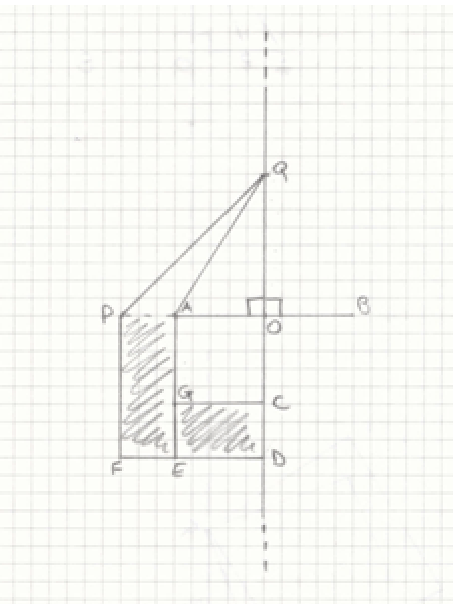
Christian Rosolen, Silvia Grillo, William Zancan.
Classe II C - Scuola media di Cordignano (TV)



Si consideri il triangolo AQM rettangolo in M per costruzione (definizione di asse)
$AQ^2=AM^2+QM^2$ per il teorema di Pitagora.

Si consideri il triangolo rettangolo (per costruzione) MPQ, per il teorema di Pitagora
$PQ^2=MP^2+QM^2$ per cui
$AQ^2-PQ^2=AM^2+QM^2-(MP^2+QM^2)$ quindi $AQ^2-PQ^2=AM^2-MP^2$
Si costruisca sul segmento AP il rettangolo APCE di superficie AP*PB, con PC=PB per costruzione. Tale rettangolo è equivalente, per il principio di equiscomponibilità , alla somma dei rettangoli EDMA e MPCD.
Si costruisca [il quadrato MPSI e si consideri il suo] simmetrico [[…]] rispetto all'asse r.
La superficie del rettangolo APCE deve essere uguale alla differenza delle superfici dei quadrati AFHM e NLIM .
Per dimostrare questo si prolunghi il lato NL fino ad incontrare il lato FH in G.
Poiché MB=MA=MH e MP=MN=MI per costruzione, risulta che AN=PB=IH per differenza di segmenti congruenti.
Il rettangolo EDMA risulta equivalente al rettangolo ANGF perché hanno congruenti i segmenti.
AF=NG=ED=AM, AN=FG=EA=DM.
Il rettangolo LGHI risulta equivalente al rettangolo DCPM perché DM=CP=IH=GL,DC=MP=GH=LI.
Come volevasi dimostrare.

Giacomo Monzio Compagnoni
Classe 3F, Scuola Media "G.B. Tiepolo" - Milano



Prima parte
[[…]]

Seconda parte
Nel caso che P sia sul prolungamento di AB la relazione diventa $AP * PB = QP^2 – QA^2$.
Questo per lo stesso ragionamento esposto precedentemente.
$PQ^2 = QO^2 + OP^2$
$AQ^2 = AO^2 + QO^2$
Quindi:
$QP^2 – QA^2 = OP^2 – AO^2$
CDEG e EFPA sono due rettangoli con stessa [congruente] altezza che possono formare un rettangolo unico con altezza AP e con base PF + ED.
PF = PO
ED = AO = OB (essendo r asse di AB, come già detto nella prima parte)
PO + OB = PB
Conseguentemente alle tre affermazioni precedenti il rettangolo formato ha dimensioni uguali a AP e PB.
Poiché $QP^2 – QA^2 = OP^2 – AO^2$ e $OP^2 – AO^2 = AP * PB$, $QP^2 – QA^2 = AP * PB$

Ivano Lodato, Classe V A
Liceo Scientifico "P.Farinato" - ENNA

Consideriamo la fig. 1.
Il prodotto AP*PB induce a considerare il "secondo teorema di Euclide".
Tracciamo la circonferenza avente centro in O, punto medio del segmento AB, e raggio AO. Per il punto P tracciamo la perpendicolare al segmento AB che incontra la circonferenza in L. Il triangolo ALB, essendo iscritto in una semi circonferenza è rettangolo e per il secondo teorema di Euclide

$$AP*PB = PL^2$$

Considerando i triangoli rettangoli QAO e QPO, per il teorema di Pitagora si ha:

$$QA^2 - AO^2 = QO^2 \quad \text{e} \quad QP^2 - PO^2 = QO^2$$

sottraendo membro a membro:

$$QA^2 - QP^2 = AO^2 - PO^2$$

Ma:

$$AO = LO$$

perché raggi della circonferenza, e per il teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo LPO

$$LO^2 - PO^2 = PL^2$$

Riepilogando si ha:

$$AP*PB = PL^2 = LO^2 - PO^2 = AO^2 - PO^2 = QA^2 - QP^2$$

Se il punto P è sul prolungamento del segmento AB, come nella fig.2, tracciamo da P la tangente alla circonferenza e sia T il punto di tangenza.
Le rette PT e PB sono rispettivamente la tangente e la secante alla circonferenza condotte da un punto esterno P e per esse vale il "teorema della tangente e della secante" secondo il quale il segmento tangente, PT, è medio proporzionale tra l'intera secante, PB, e la sua parte esterna, PA, per cui si ha:

$$PB*PA = PT^2$$

Considerando i triangoli rettangoli QAO e QPO, per il teorema di Pitagora si ha:

$$QP^2 - PO^2 = QO^2 \quad \text{e} \quad QA^2 - AO^2 = QO^2$$

sottraendo membro a membro:

$$QP^2 - QA^2 = PO^2 - AO^2$$

ma:

$$AO = TO$$

perché raggi della circonferenza, poiché la tangente ad una circonferenza è perpendicolare al raggio condotto nel punto di tangenza, il triangolo PTO è rettangolo e applicando il teorema di Pitagora si ha:

$$PO^2 - TO^2 = PT^2$$

Riepilogando si ha:

$$AP*PB = PB*PA = PT^2 = PO^2 - TO^2 = PO^2 - AO^2 = QP^2 - QA^2$$

La relazione: $\mathbf{AP*PB = QA^2 - QP^2}$ deve essere modificata nella relazione:

$$\mathbf{AP*PB = QP^2 - QA^2}$$

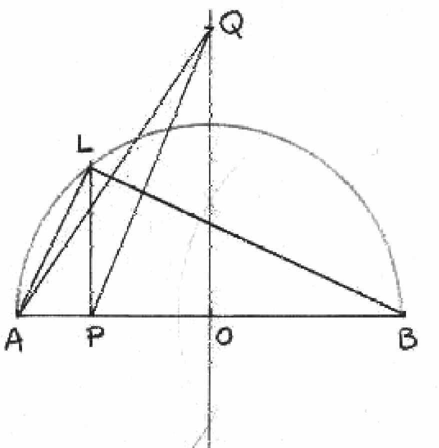


fig. 1

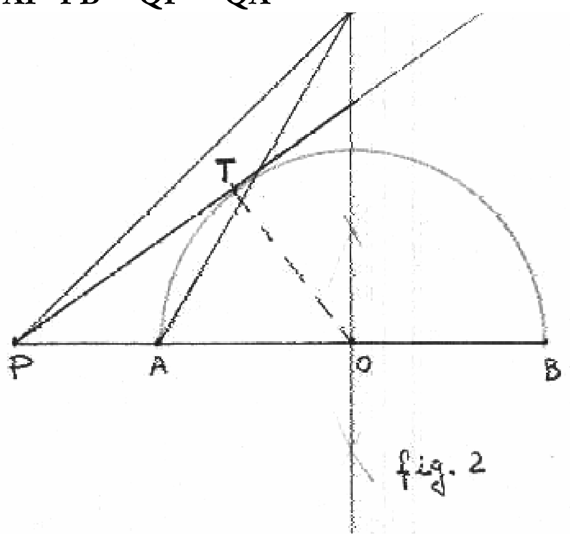
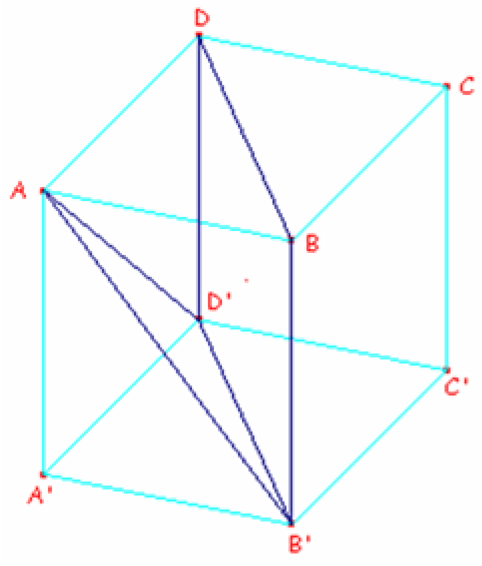


fig. 2

Marzo 2004

E' dato un cubo in cui ABCD e A'B'C'D' sono due facce opposte e AA', BB', CC', DD' sono gli spigoli ad esse perpendicolari.
Sezionare il cubo prima con il piano passante per i vertici AB'D', poi con il piano per BDD'B'.

1. **Di che tipo sono i tre solidi che si ottengono?**
2. **In quale rapporto stanno i loro volumi con quello del cubo?**



La nostra figura

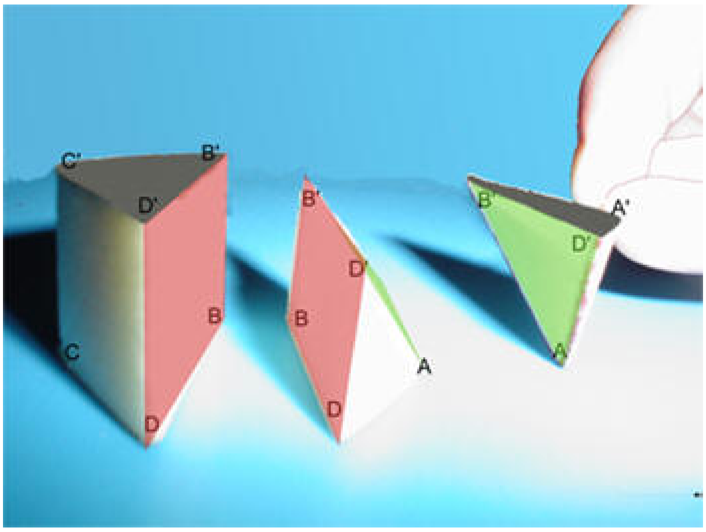


Immagine inviata da:
Marta Brambilla, Selene Pirola, Giuseppe Ricca, Luca Zotti
Cl 3M, SM "Bergamaschi", Torrevecchia Pia (PV)

COMMENTO

Ci sono pervenute sette risposte, tre da scuole superiori e quattro da scuole medie inferiori. Questo mese *FLATlandia* ha varcato il confine: diamo il benvenuto ai ragazzi della scuola media di Bellinzona.
Come negli anni precedenti, un problema del mese riguarda la geometria solida e non sempre incontra l'interesse dei partecipanti. Il numero delle risposte ricevute è quindi superiore alle nostre aspettative.
Queste le scuole che hanno partecipato:

- *LS "G. Aselli", Cremona (CR)*
- *Scuola Media di Bellinzona, (C.T. Svizzera)*
- *LS "G. Verdi", Valdobbiadene (TV)*
- *SM "Bergamaschi", Torrevecchia Pia (PV)*
- *SM "I. Nievo" Cordignano (TV)*
- *LS "Varchi", Montevarchi (AR)*
- *SM "C. A. dalla Chiesa" S. Genesio (PV)*

Nel problema si proponeva di sezionare un cubo con due piani assegnati in modo da ottenere tre solidi dei quali si chiedevano il tipo e il rapporto dei loro volumi con quello del cubo iniziale.
In una delle risposte il testo non è stato interpretato correttamente: i tagli dovevano essere fatti in successione nello stesso cubo e non in due cubi distinti.
Le altre risoluzioni sono tutte corrette anche se alcune presentano imprecisioni nella esposizione.
Ricordiamo che quando si descrivono solidi come prismi e piramidi è opportuno precisare se sono retti e, eventualmente, regolari oppure no.

Per determinare i rapporti richiesti si è fatto ricorso, in maggior parte, al calcolo dei volumi; in due risposte invece i rapporti sono stati dedotti dalle caratteristiche dei solidi ottenuti.
Abbiamo stabilito di presentare una risposta di ciascun tipo, e, in caso di imbarazzo nella scelta, di optare per le scuole "nuove" nel piccolo mondo di *FLATlandia*.
Per illustrare il problema alleghiamo al testo, accanto alla nostra figura, una immagine della SM "Bergamaschi", che mostra il risultato ottenuto sezionando un cubo di polistirolo.
Presentiamo inoltre le risposte:

- *Scuola Media di Bellinzona***,** in cui si fa una completa descrizione dei tre solidi e si calcolano i loro volumi.
- *LS "Verdi"***,** solo la seconda parte, in cui si ricavano i rapporti senza calcolare i volumi.

Per la scuola media inferiore abbiamo scelto la risposta di

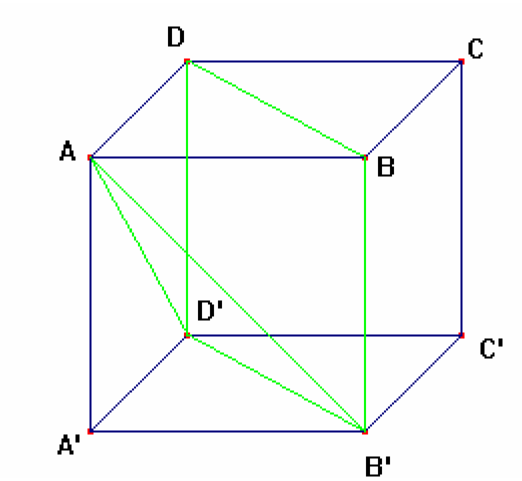
- *SM "I. Nievo"***,** in cui si valutano i rapporti con un breve e semplice ragionamento.

NOTA: Le nostre correzioni od osservazioni sono contenute in parentesi quadra. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

Soluzioni

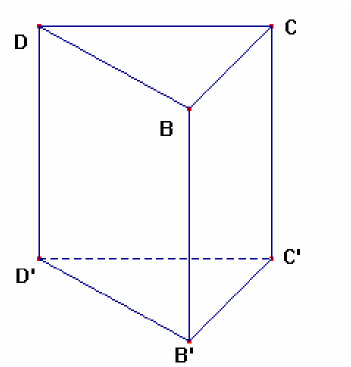
Lukas Nannini, Classe 4A (corrisponde alla classe 1ª della nostra scuola secondaria superiore)
Scuola media 1 Bellinzona (Svizzera)

1) Sezionamento del cubo:

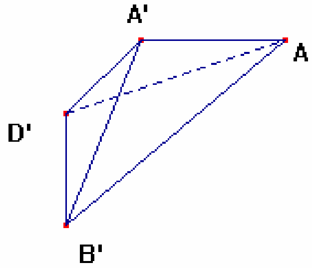


Da cui ricaviamo i seguenti solidi:

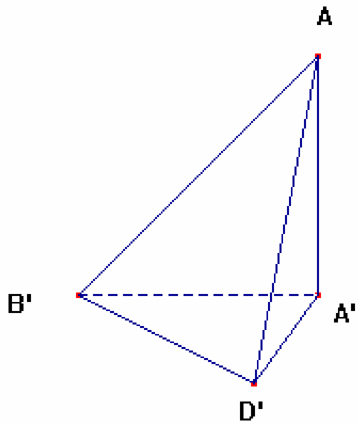
1.1) Un prisma [[…]] retto a base triangolare la cui base è congruente alla metà di una faccia del cubo.



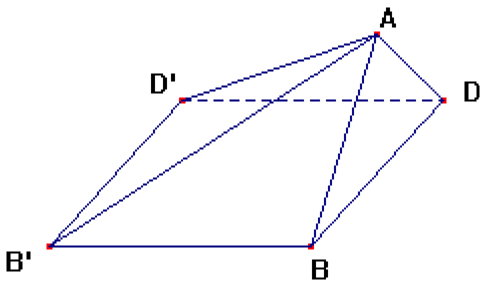
1.2) Una piramide triangolare retta che ha come base il triangolo equilatero AB’D’ (poiché AB’, AD’ e B’D’ sono le diagonali delle facce del cubo) e avente come facce laterali dei triangoli rettangoli congruenti fra loro e congruenti alla metà di una faccia del cubo.



La piramide può anche essere considerata una piramide triangolare non retta se prendiamo come base uno qualsiasi dei triangoli rettangoli e avrà come altezza lo spigolo del cubo.



1.3) Una piramide non retta a base rettangolare, difatti il triangolo ADB è perpendicolare al rettangolo DBB’D’ e il piede dell’altezza del triangolo è il punto medio del segmento BD.



2) Rapporti

2.1) Il rapporto tra il volume del prisma e quello del cubo è, ovviamente, di $\frac{1}{2}$.

2.2) Considerando la prima piramide come una piramide triangolare non retta il suo volume sarà:

$$V = \frac{\frac{l^2}{2} \cdot l}{3} = \frac{l^3}{6}$$

quindi il rapporto tra il volume della prima piramide e quello del cubo è $\frac{1}{6}$

2.3) Per calcolare il volume della seconda piramide si può (in modo semplice) tener conto della metà del volume del cubo (togliendo quello del prisma) cioè $\frac{l^3}{2}$

Per trovare il volume della piramide, basta sottrarre da metà del volume del cubo il volume della piramide precedente:

$$V = \frac{l^3}{2} - \frac{l^3}{6} = \frac{l^3}{3}$$

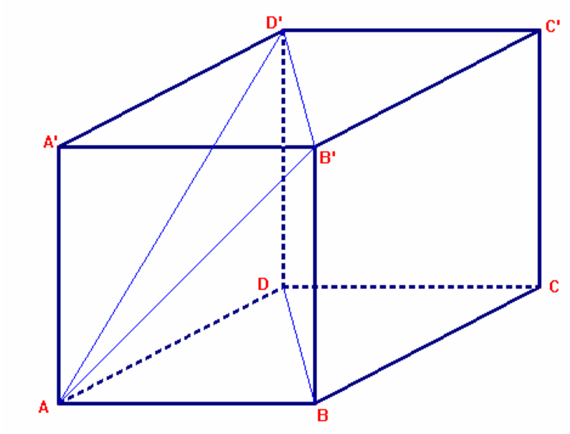
quindi il rapporto tra il volume della seconda piramide e quello del cubo è $\frac{1}{3}$

Oppure, in un modo un po' più complicato, si può osservare che l'altezza della seconda piramide è $\frac{l}{2}\sqrt{2}$, infatti la diagonale BD (sulla quale si trova il piede dell'altezza) interseca l'altra diagonale AC nel suo punto medio.
Quindi il volume della seconda piramide è :

$$V = \frac{l\sqrt{2} \cdot l \cdot \frac{l}{2}\sqrt{2}}{3} = \frac{l^3}{3}$$

Il rapporto tra il volume della seconda piramide e quello del cubo è $\frac{1}{3}$

Flavia Germana Agostinetto, classe 2ª A
Liceo Scientifico "G. Verdi " Valdobbiadene (TV)



1) **[[…]]** [descrizioni incomplete; vedere le risposte precedenti]

2)
Rapporto fra prisma e cubo: Ciascuno dei prismi BCDB'C'D' e ABDA'B'D' ha per base metà della base del cubo e la stessa altezza e perciò si ha: $\frac{Volume(prisma)}{Volume(cubo)} = \frac{1}{2}$

Rapporto fra piramide A'B'D'A e cubo:
La piramide A'B'D'A e il prisma ABDA'B'D' hanno la stessa base (metà faccia del cubo) e la stessa altezza (spigolo del cubo) e perciò si ottiene: $\frac{Volume(A'B'D'A)}{Volume(ABDA'B'D')} = \frac{1}{3}$
Poiché il prisma è equivalente a metà cubo si avrà:

$$\frac{Volume(A'B'D'A)}{Volume(cubo)} = \frac{Volume(A'B'D'A)}{Volume(ABDA'B'D')} \times \frac{Volume(ABDA'B'D')}{Volume(cubo)} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

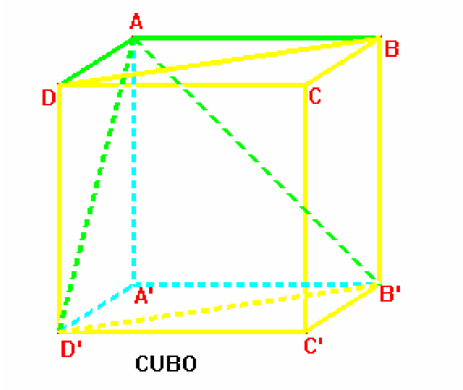
Rapporto fra piramide BDD'B'A e cubo:

La piramide BDD'B'A è la differenza fra il prisma ABDA'B'D' e la piramide A'B'D'A e perciò si avrà:

$$\frac{Volume(BDD'B'A)}{Volume(ABDA'B'D')}=\frac{Volume(ABDA'B'D')-Volume(A'D'B'A)}{Volume(ABDA'B'D')}=\frac{2}{3}$$

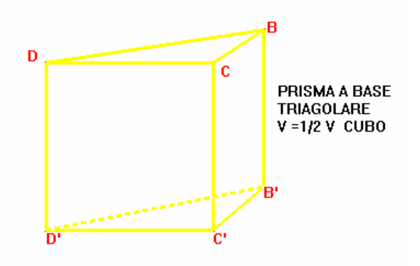
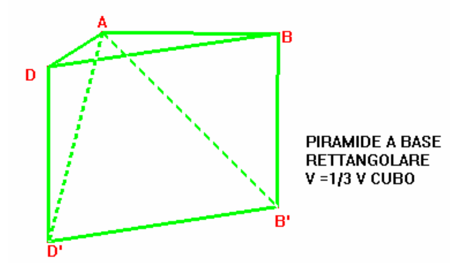
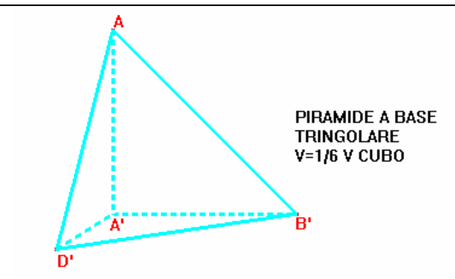
Di conseguenza : $\dfrac{Volume(BDD'B'A)}{Volume(cubo)}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}$

Rosolen Christian, Poletto Paolo, Carlet Daniela e Ardengo Valentina
Classe 2C e 3C, Scuola Media "I. Nievo"
Cordignano (TV)



1)
Sezionando il cubo dato con i piani AD'B' e DBB'D' si ottengono tre solidi che sono:
il prisma retto che ha per base il triangolo isoscele D'C'B', D'C'=B'C' (spigoli del cubo);
la piramide che ha per base il rettangolo DBB'D' e per vertice il punto A;
la piramide che ha per base il triangolo A'B'D' e per vertice il punto A.

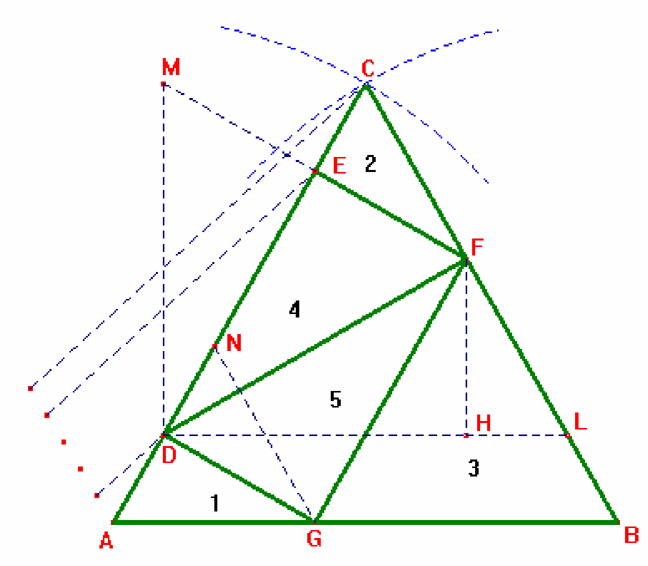
[descrizioni incomplete; si veda la prima risposta]

2)
Il volume del prisma è 1/2 rispetto al volume del cubo perché il piano di DBB'D' lo divide a metà.
Il volume della piramide a base triangolare è 1/3 del volume del prisma che ha [ugual] base A'B'D' e [uguale] altezza AA'"; quindi è 1/6 del volume del cubo.
Sottraendo al volume del cubo il volume del prisma e della piramide si ottiene 1-(1/2+1/6)=1-4/6=1/3. Il volume della piramide a base rettangolare risulta essere 1/3 del volume del cubo.

Aprile 2004

Disegnare su un cartoncino un triangolo equilatero (con riga e compasso).
1) Ritagliarlo e scomporlo in cinque parti con le quali si possano ricomporre:
  a) **due triangoli equilateri**
  b) **tre triangoli equilateri.**
2) Detto *l* (elle) il lato del triangolo iniziale, determinare in funzione di *l* i lati dei triangoli equilateri ottenuti.



La ricostruzione dei triangoli richiesti, ottenuta mediante opportune simmetrie assiali, è tratta dalla pubblicazione Angolo acuto (anno 1973, n.3), dedicata ai giovani appassionati di matematica, pubblicata negli anni 1970 - 1979.

Si formano i triangoli equilateri: LCD, FGB

Oppure:

FMD. FGB, AGN

COMMENTO

Abbiamo ricevuto tre risposte dalle scuole:

- *LS "G. Aselli", Cremona (CR)*
- *SM "C. A. Dalla Chiesa", San Genesio ed Uniti (PV)*
- *ITI "G. Ferraris", San Giovanni Valdarno (AR)*

Era difficile il quesito proposto oppure i nostri abituali interlocutori sono stati distratti dalle vacanze? Abbiamo proposto di costruire prima un triangolo equilatero, di dividerlo poi in cinque parti in modo che, sempre con le stesse cinque parti, si potessero formare sia due sia tre triangoli equilateri. Si chiedeva inoltre di calcolare il lato di ciascun triangolo ottenuto.

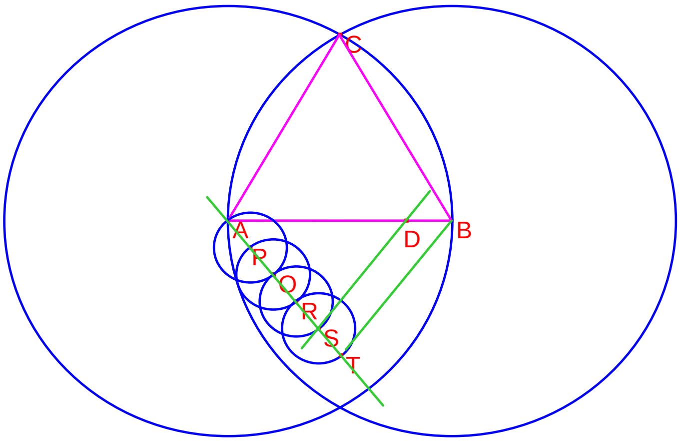
Essendo poche le risposte pervenute possiamo descrivere pregi ed eventuali difetti di ciascuna di esse.
LS "G. Aselli": Giacomo Canevari fornisce una completa descrizione delle sue costruzioni, ma non dice come e perché sia giunto alla scoperta della scomposizione da lui operata.
SM "C.A. Dalla Chiesa": i ragazzi della 3ªP non descrivono né la costruzione del triangolo iniziale, né come ottenere la suddivisione del lato in parti congruenti. Motivano però in modo esauriente il percorso che li ha portati alla scomposizione del triangolo.
Nella due risposte citate è stata individuata la medesima scomposizione del triangolo equilatero in cinque parti e sono stati ricomposti in modo corretto i cinque pezzi per ottenere i triangoli richiesti. Verranno presentate entrambe all'attenzione di coloro che seguono FLATlandia, perché nella prima parte le due risposte si completano a vicenda.
ITI "G. Ferraris": gli studenti della 2ªE forniscono due diverse scomposizioni con cui ottenere tre triangoli equilateri, ed una terza scomposizione con la quale si ricompongono due triangoli equilateri.

Con nessuna delle cinque parti ottenute costruiscono sia due sia tre triangoli equilateri, come invece era richiesto.

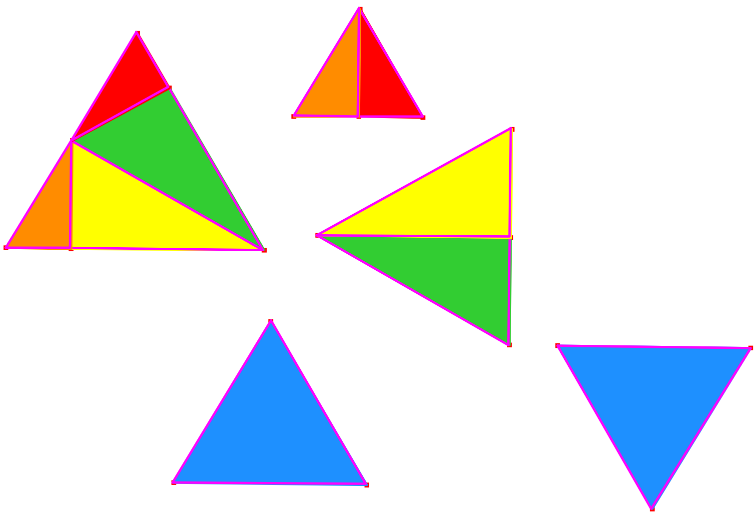
NOTA: Le nostre correzioni od osservazioni sono contenute in parentesi quadra. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

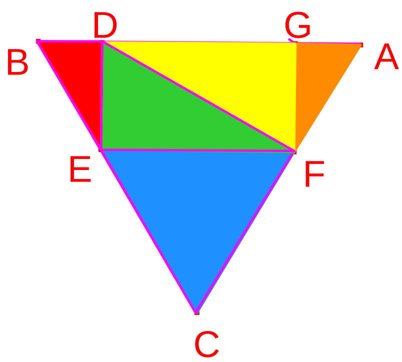
Soluzioni

Giacomo Canevari
Classe 2C, Liceo scientifico "G. Aselli" Cremona (CR)

1. 

Disegniamo un triangolo equilatero ABC. Per fare ciò, dopo aver tracciato il lato AB, disegniamo le due circonferenze aventi per centri gli estremi del segmento e per raggio il lato stesso; chiamiamo C il punto di intersezione, cioè il terzo vertice del triangolo.
Ora dividiamo il lato AB in cinque parti congruenti: tracciamo una retta qualsiasi passante per A e prendiamo su di essa un punto P a piacere. Con il compasso, riportiamo la misura del segmento AP sulla retta per altre quattro volte, sempre nello stesso verso, trovando i punti Q, R, S, T. Congiungiamo T con B, poi tracciamo la parallela al segmento BT passante per S, che intersecherà il segmento AB nel punto D. Per il teorema di Talete, AB : BD = AT : ST = 5 ST : ST = 5.
Tracciamo la perpendicolare ad AB per D, trovando su BC il punto E, la parallela ad AB per E, trovando su AC il punto F, la perpendicolare ad EF per F, trovando su AB il punto G. I triangoli AGF, FGD, DEF, DEB e CEF sono le cinque parti cercate.





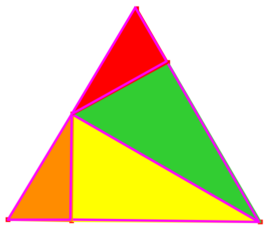
Sappiamo che ECF è un triangolo equilatero, perché l'angolo ACB è di 60°, così come CEF = CBA = 60° (perché questi due angoli sono corrispondenti). I triangoli AGF e BDE sono congruenti per il secondo criterio e corrispondono a due metà di un triangolo equilatero: infatti DE = FG (lati opposti di un rettangolo), gli angoli EBD = FAG = 60° e BDE = FGA = 90°.

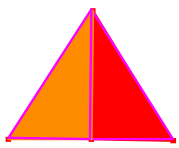
Indicando AB con l, abbiamo che BD = $\frac{l}{5}$, DE = $\frac{\sqrt{3}}{5}l$, EF = $\frac{3}{5}l$; perciò, applicando il teorema di Pitagora, si ricava $DF = \sqrt{EF^2 + DE^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{5}l\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{5}l\right)^2} = \sqrt{\frac{12}{25}l^2} = \frac{2}{5}\sqrt{3}\,l = 2\,ED$.

Perciò i due triangoli rettangoli DEF e FGD sono congruenti, perché creati dalla diagonale DF che taglia il rettangolo DEFG, e corrispondono a due metà di un triangolo equilatero, in quanto la loro ipotenusa è il doppio di uno dei loro cateti.
Infine, possiede questa proprietà anche il triangolo ADF, perché l'angolo FAD = 60° e quello DFA = DFG + GFA = 60° + 30° = 90°; inoltre, questo triangolo è scomponibile in altri due, e cioè in AGF = BDE e in FDG = DEF.
Dalla scomposizione e ricomposizione di questi triangoli nel modo indicato, dunque, si ottengono tutti triangoli equilateri.

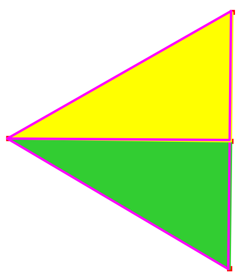
2. Calcoliamo la misura dei lati dei vari triangoli ottenuti sfruttando le proprietà di questi particolari tipi di triangoli (quelli, cioè, con gli angoli di 30°, 60° e 90°):

AD = AB – BD = $l - \frac{l}{5} = \frac{4}{5}l$

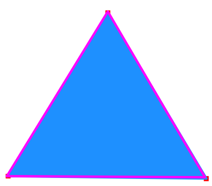




BE = BC – EC = $l - \frac{3}{5}l = \frac{2}{5}l$



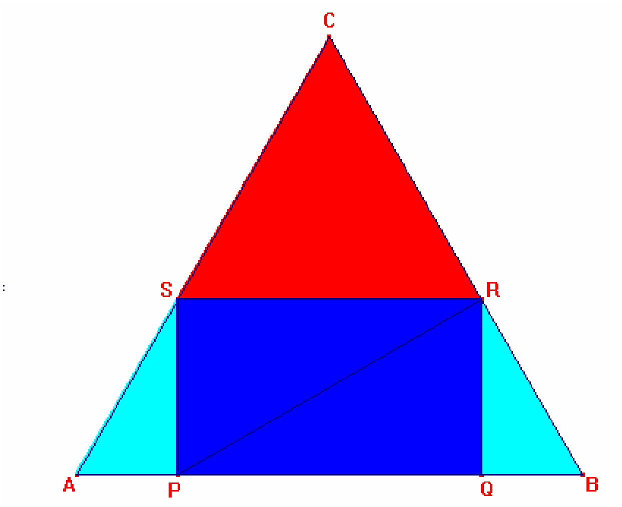
DF = $\frac{2}{5}\sqrt{3}\,l$ vedi n°1



CE = AB – 2BD = $l - \frac{2}{5}l = \frac{3}{5}l$

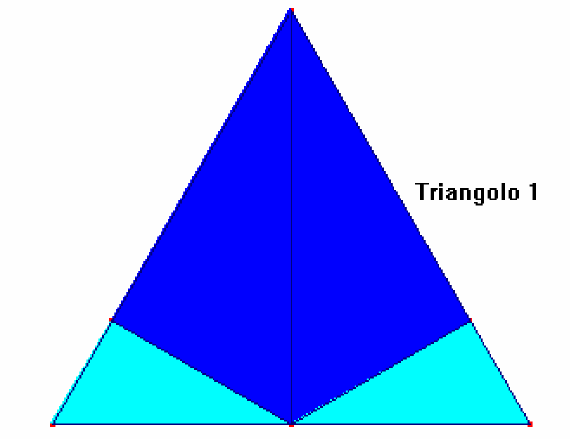
Le figure dei quattro triangoli non sono in scala tra loro.

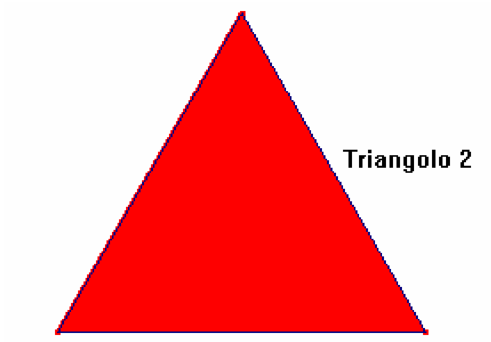
Classe 3P, Scuola media "C.A. Dalla Chiesa"
San Genesio ed Uniti (PV)



Dopo alcuni tentativi abbiamo diviso il triangolo equilatero ABC in un triangolo equilatero CSR (per il teorema di Talete, tracciando una parallela al lato AB), in un rettangolo SPQR (mandando da S e da R le perpendicolari al lato AB); si formano in questo modo anche due triangoli rettangoli congruenti ASP = RQB (essendo SP = RQ perché distanza tra due rette parallele, gli angoli
CAB = CBA = 60°.
Poiché volevamo che la diagonale del rettangolo dividesse l'angolo interno in due parti di 30° e 60° abbiamo cercato con una equazione a che distanza dal vertice A dovevamo prendere il punto P.
Indicato $AP = x$, $AS = 2x$, applicando il Teorema di Pitagora si ottiene $SP=x\sqrt{3}$; ipotizzando che l'angolo SRP=30° allora RP sarà uguale a $2x\sqrt{3}$; possiamo quindi trovare con il Teorema di Pitagora PQ che sarà $PQ=3x$; essendo $x+3x+x=l$ (dove l indica il lato del triangolo ABC) si ottiene che $x = (1/5)l$
Abbiamo quindi suddiviso il lato AB in cinque parti uguali ed abbiamo costruito le figure prima descritte in modo da scomporre il triangolo di partenza in quattro triangoli rettangoli scaleni ASP, RQB, SPR e PRQ e in un triangolo equilatero SCR.
Poi abbiamo riassemblato i pezzi costruendo le seguenti figure:

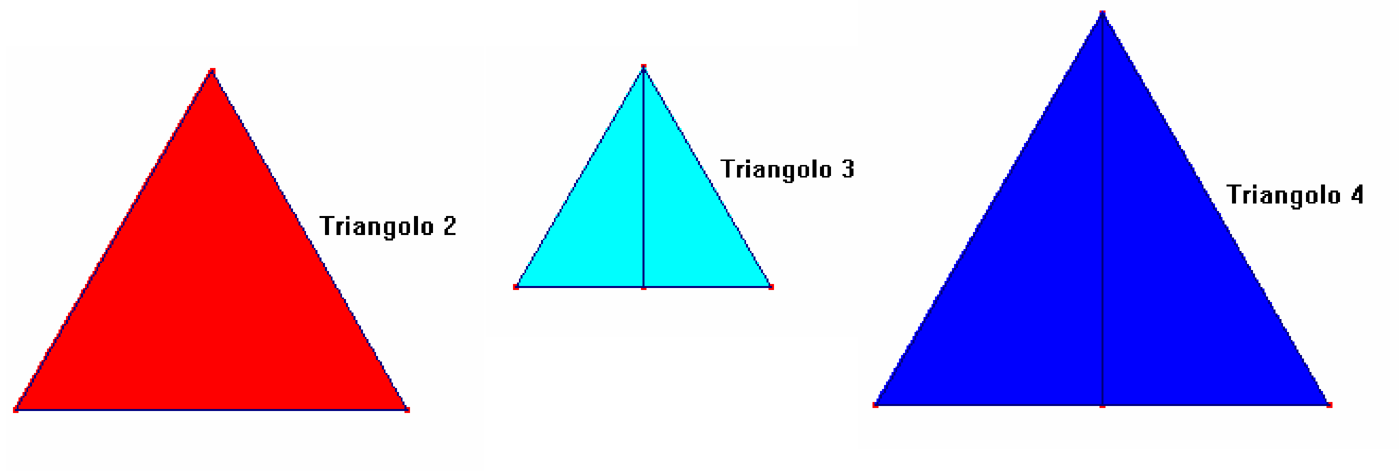
a) il triangolo equilatero SCR e un triangolo equilatero con i quattro triangoli rettangoli come in figura:





Lato triangolo equilatero 1 = (4/5)l
Lato triangolo equilatero 2 = (3/5)l

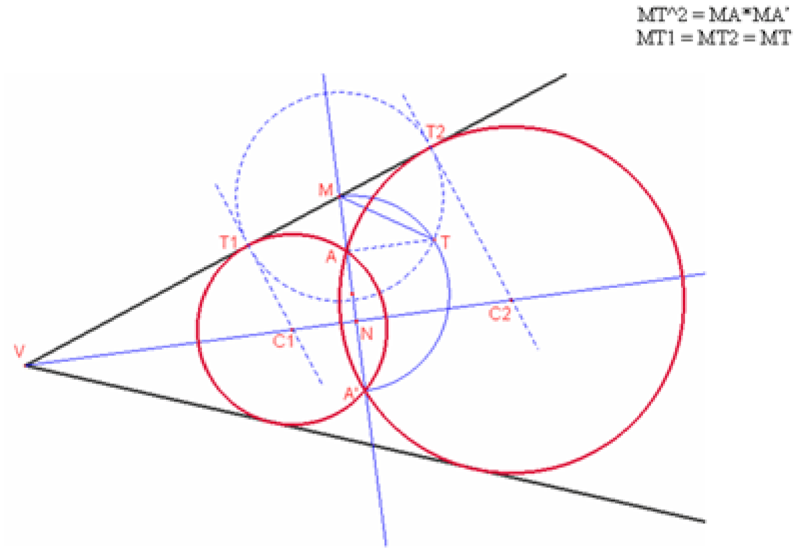
b) il triangolo equilatero SCR e due triangoli equilateri formati dai 4 triangoli rettangoli congruenti due a due come in figura:



Lato triangolo equilatero 3 = (2/5)l
Lato triangolo equilatero 4 = (2/5)l√3

Maggio 2004

Dato un angolo convesso di vertice V, sia A un qualunque punto di tale angolo.
***a)* Costruire le circonferenze (la circonferenza) passanti per A e tangenti ai lati dell'angolo.**
***b)* Giustificare la costruzione effettuata.**



COMMENTO

Sono giunte tre risposte da studenti delle seguenti scuole:

- *LS "G. Aselli", Cremona (CR)*
- *SM "C. A. Dalla Chiesa", San Genesio ed Uniti (PV)*
- *ITI "Berenini", Fidenza (PR)*

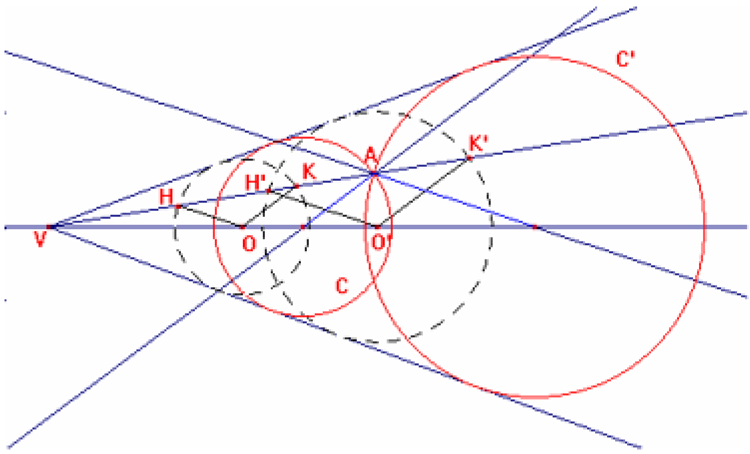
Nel problema si chiedeva di costruire le circonferenze tangenti ai lati di un angolo convesso, di vertice V, passanti per un punto A appartenente all'angolo. La genericità del punto assegnato doveva portare i solutori ad esaminare tutte le sue possibili posizioni.
Si chiedeva poi di giustificare la costruzione eseguita.
Nessuna delle risposte pervenute è completa. Esaminiamole una per volta.
- *SM "C. A. Dalla Chiesa"*: alcuni ragazzi della classe 3P hanno fornito una bella costruzione del caso generale nel senso classico del termine, cioè eseguibile con "riga e compasso". Hanno osservato che la retta VA interseca le circonferenze tangenti ai lati di un angolo in punti che, congiunti con i rispettivi centri, formano triangoli simili.
Hanno poi preso in esame solo il caso particolare che A sia sulla bisettrice, senza però darne la costruzione.
Non hanno giustificato la loro costruzione, come richiesto nel punto (b), ma questo non è obbligatorio per gli studenti della scuola media inferiore.
- *LS "G. Aselli"*: Giacomo Canevari ha invece eseguito una Cabri-costruzione. Egli ha osservato che, se una circonferenza per A è tangente ai lati di un angolo, il suo centro è equidistante da A e da ciascun lato. Deve quindi appartenere, oltre che alla bisettrice dell'angolo, alla parabola con fuoco in A e direttrice uno dei lati dell'angolo.
Ha giustificato la sua costruzione; non ha considerato il caso particolare in cui A appartiene alla bisettrice.
Non essendo possibile costruire per punti una curva continua, solo con un software, come ad esempio Cabri, si possono (apparentemente) visualizzare le intersezioni della parabola con la bisettrice dell'angolo.

- *ITI "Berenini"*: gli studenti della classe 2B hanno prima preso in esame il caso particolare in cui A appartiene alla bisettrice, proponendone una corretta costruzione.
Hanno poi considerato il caso in cui A non sia sulla bisettrice (e neppure su un lato); hanno valutato le condizioni che caratterizzano le circonferenze richieste, ma la costruzione allegata non è corretta.
Ricordiamo a questi ragazzi che una costruzione eseguita con Cabri è valida solo se non perde le sue proprietà per trascinamento dei suoi punti liberi; inoltre deve essere giustificata.
Altre eventuali osservazioni saranno riportate in parentesi quadra nel testo delle risposte.
Nella figura allegata al testo del problema viene illustrata una costruzione del tipo "riga e compasso" in cui si fa ricorso al teorema detto "della tangente e della secante".

NOTA: Le nostre correzioni od osservazioni sono contenute in parentesi quadra. Con doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse.

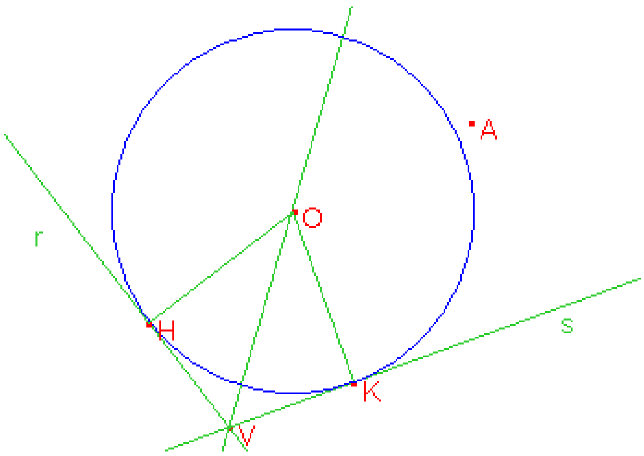
Soluzioni

Stefano Braschi, Fabio Fischetti, Mattia Carioti, Lucilla Zoppi
Classe 3P, Scuola media "C.A. Dalla Chiesa" - San Genesio ed Uniti (PV)

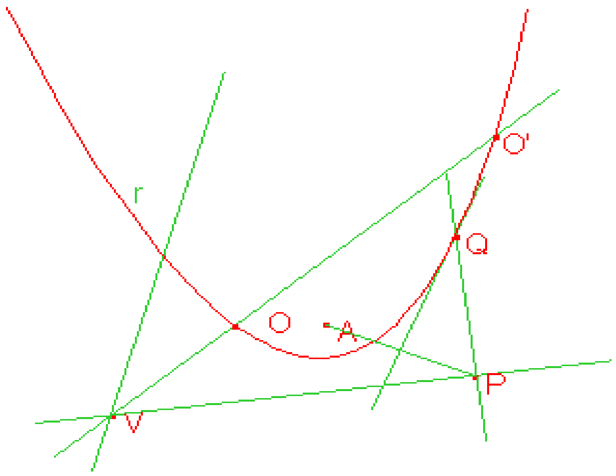


Dopo aver costruito l'angolo convesso di vertice V prendiamo un punto A qualunque di questo. Tracciamo la bisettrice dell'angolo. [Si poteva eventualmente costruire].
Dato che la circonferenza passante per A deve essere tangente ai lati dell'angolo, il suo centro deve trovarsi sulla bisettrice, perché luogo dei punti equidistanti dai lati dell'angolo. Tutte le circonferenze tangenti ai lati dell'angolo hanno i centri sulla bisettrice e sono omotetiche tra loro (in una omotetia di centro V) [Solo se considerate a due a due, non esiste un unico rapporto di omotetie per tutte le circonferenze]. Tra queste ci sono quelle tangenti ai lati e passanti per A.
Costruiamo due circonferenze tangenti ai lati dell'angolo, mandando da due punti qualsiasi del lato dell'angolo la perpendicolare al lato stesso, le intersezioni di queste perpendicolari con la bisettrice sono i centri delle due circonferenze (una di centro O e una di centro O'). Tracciamo la semiretta di origine V e passante per A. Questa semiretta interseca le circonferenze in quattro punti (H e K ed H' e K'). Notiamo che i raggi HO e H'O', KO e K'O' sono paralleli tra loro. Allora per trovare i centri delle circonferenze passanti per A e tangenti ai lati dell'angolo, costruiamo le rette passanti per A e parallele ai raggi OK e OH. Le intersezioni di queste due rette con la bisettrice dell'angolo di vertice V saranno i centri delle circonferenze che cerchiamo. Queste sono secanti nel punto A.
Se il punto A si trovasse sulla bisettrice, le due circonferenze sarebbero tangenti tra loro in questo punto. [Perché? Come si costruiscono?]

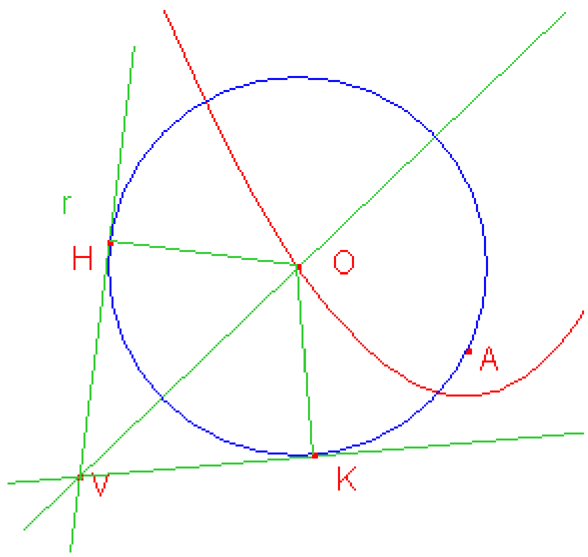
Giacomo Canevari
Classe 2C, Liceo scientifico "G. Aselli" Cremona (CR)



Disegniamo due rette r e s incidenti in un punto V, poi prendiamo un punto qualsiasi A appartenente ad uno degli angoli convessi così creati. Consideriamo una circonferenza di centro O tangente alle due rette e indichiamo i due punti di tangenza con H e K. Sappiamo che OH = OK perché raggi, l'angolo VKO = VHO = 90°, OV è in comune: perciò i triangoli rettangoli VHO e VKO sono congruenti per il quarto criterio. Allora gli angoli OVH e OVK sono congruenti, dunque O appartiene alla bisettrice di HVK.



Costruiamo quindi la bisettrice dell'angolo [si poteva indicare come costruirla].
Su di essa dobbiamo considerare un punto O tale che, chiamata K la sua proiezione su s, OK = OA: dobbiamo cioè trovare un punto equidistante dalla retta s e da A. Tale punto apparterrà dunque alla parabola di fuoco A e direttrice s.
Possiamo costruire la parabola come luogo di punti: consideriamo su s un punto P a piacere, poi tracciamo la perpendicolare ad s per P e l'asse del segmento AP. Le due rette si intersecheranno in un punto Q, equidistante da A e da s: il luogo descritto da Q al variare di P è la parabola cercata.
Le intersezioni tra la parabola e la bisettrice dell'angolo, che chiameremo O e O`, sono i centri delle circonferenze cercate. Sappiamo che AO = OK, dove K è la proiezione di O sulla retta s, per costruzione; inoltre, se consideriamo la distanza OH di O dalla retta r, risulta OH = OK perché i triangoli OVH e OVK sono congruenti per il quarto criterio. Infatti gli angoli HVO e KVO sono congruenti per ipotesi, VHO = VKO = 90°, il segmento OV è in comune. Da ciò si ricava che AO = OH = OK, perciò per i tre punti passa una circonferenza di centro O. Analogo ragionamento si può fare per il punto O`.



FLAT*landia*, geometria on-line

L'IRRE dell'Emilia Romagna,
valendosi dell'apporto di operatori interni
e di collaboratori esterni all'Istituto,
ha proposto questo servizio in rete
rivolto a docenti e alunni
che si interessano di matematica.
Il servizio, promosso nell'anno scolastico '97-'98
e giunto al suo settimo anno di attività,
ha visto l'adesione di Istituzioni Scolastiche
di vario tipo

Nel presente volumetto il resoconto
del settimo anno di attività

n° 28