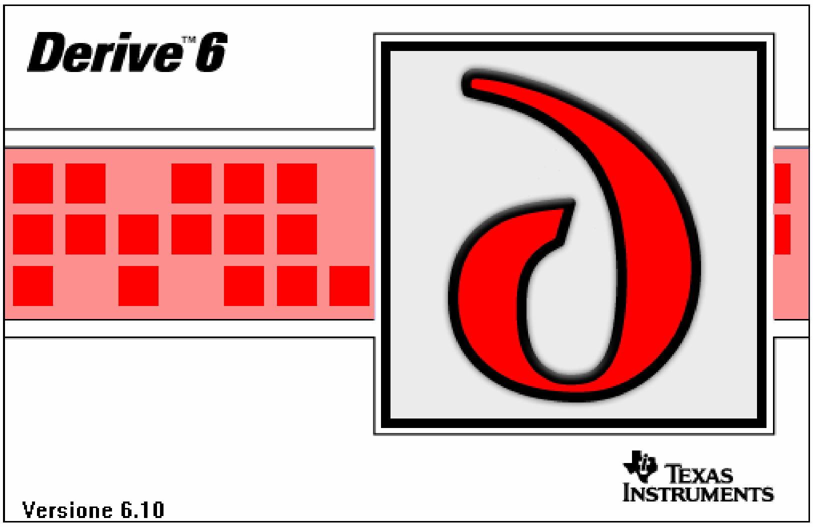
Università degli Studi di Ferrara

Corso di Laurea Specialistica in Matematica
Laboratorio di Didattica della Matematica

Anno accademico 2009-2010

Introduzione a *DERIVE 6*: un software per l'insegnamento della matematica



Ottobre 2009

Indice

Informazioni iniziali

Queste esercitazioni costituiscono una rielaborazione di un opuscolo del prof. Sebastiano Cappuccio (S.S.I.S. di Bologna) e sono state scritte in modo da poter essere usate con *DERIVE* per Windows vers. 6 in italiano. Con altre versioni del software (ad esempio con la versione 5 per Windows), i comandi e le voci di menu potrebbero essere diversi.
Le esercitazioni fanno riferimento a un lettore assolutamente principiante nell'uso di *DERIVE*. Chi già conosce il programma, sia paziente.

IMPORTANTE: Si consiglia sempre di leggere ogni Attività (comprese le righe rientrate) **<u>prima</u>** di realizzarla.

I paragrafi allineati a sinistra indicano le azioni da compiere.

> Quelli rientrati di circa un centimetro verso destra riportano alcune spiegazioni e commenti relativi a tali azioni.

I comandi da impartire, le voci di menu da selezionare sono scritti in **grassetto**, i testi da digitare sono di norma scritti nel font `Courier`.

Le Attività che utilizzano le nuove caratteristiche della versione 6 sono caratterizzate dal relativo simbolo, come questo paragrafo.

Gli argomenti trattati nelle esercitazioni faranno riferimento ai contenuti di una scuola secondaria di II grado "normale": Algebra, Geometria Analitica, un pizzico di Analisi; non si dimentichi che scopo di queste poche pagine è dare una conoscenza di base di *DERIVE* e qualche veloce esempio (elementare ma, mi auguro, non troppo banale) di suoi possibili usi in classe, quindi molti argomenti non saranno trattati: *DERIVE* in questa versione possiede quasi un migliaio tra operatori, funzioni predefinite, funzioni di libreria, opzioni e voci di menu e una conoscenza approfondita di tutte è un obiettivo irraggiungibile in queste pagine (si rinvia al *Manuale*).
Gli insegnanti interessati all'uso di *DERIVE* ricordino comunque che non è necessario conoscere *tutto* il programma (cosa quasi impossibile) per usarlo con profitto in classe.
Spesso la stessa azione può essere ottenuta in vari modi: di norma qui ne sarà indicato uno solo per non complicare inutilmente le cose.

GLOSSARIO DELLE AZIONI
premere: riferito a tasti della tastiera
cliccare su (riferito a icone o scritte in finestre di dialogo): riferito alla pressione del tasto sinistro del mouse con il cursore posizionato sulla posizione indicata.
selezionare: riferito a voci di menu; si possono attivare anche da tastiera, ma è preferibile usare il mouse cliccando sulla corrispondente voce del menu
Ecco le icone che si utilizzano più spesso:

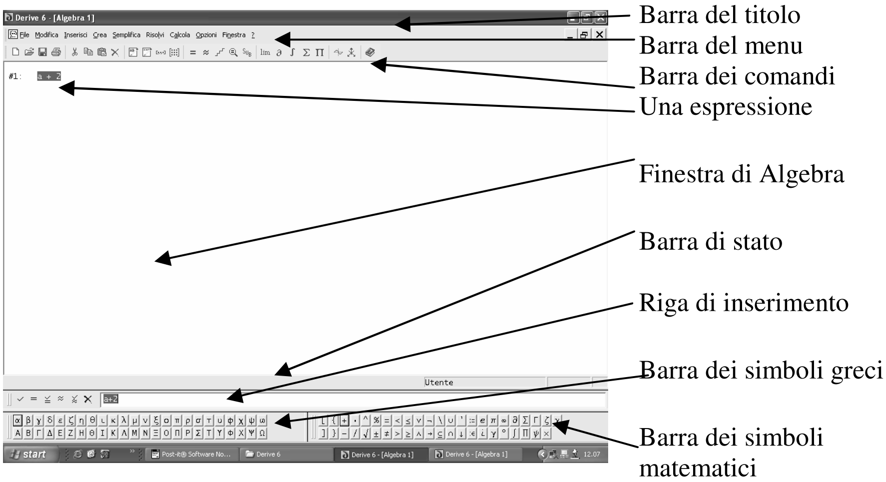
 ....**Semplifica**

 ....**Approssima**

 ....**Risolvi Espressione** (ovvero Equazione)

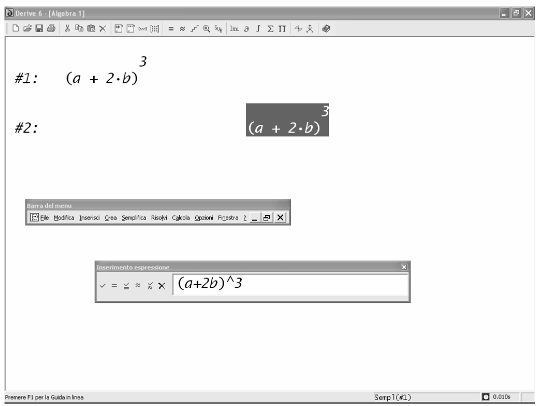
Nella scheda non viene indicato esplicitamente il salvataggio del proprio lavoro. Chi legge può salvare in ogni momento: i comandi da impartire sono comunque gli stessi (menu **File > Salva con nome**) di ogni altro programma che "gira" in ambiente Windows.

Lo schermo iniziale di DERIVE



Nella *Barra del titolo* compare il titolo del foglio di lavoro attivo.
Nella *Barra dei menu* compare il menu. Cliccando sulle varie voci si aprono dei sottomenu.
Nella *Barra dei comandi* compaiono alcune icone relative ai comandi di uso più frequente; cliccando su di esse il comando si attiva immediatamente, senza bisogno di passare attraverso i menu.
Nella *Finestra di Algebra* appaiono, con una numerazione progressiva, le espressioni digitate, le relative risposte, i comandi impartiti.
Nella *Barra di stato* compaiono informazioni.
La *Riga di inserimento* è la riga nelle quale vanno digitate le espressioni.
Le *Barre dei simboli* greci e matematici servono per inserire simboli particolari non presenti direttamente in tastiera: basta cliccare sopra il simbolo desiderato per farlo apparire nella riga di inserimento nel punto in cui è posizionato il cursore.

Cliccando con il bottone di destra del mouse e trascinando è possibile modificare a piacere l'organizzazione dei menu e delle varie barre, la loro presenza e la loro disposizione nello schermo.
È inoltre possibile modificare a piacere il font utilizzato e le sue dimensioni.
Nell'immagine qui a fianco, ad esempio, sono state tolte le barre dei simboli, è stata modificata la posizione della riga di inserimento e infine è stato usato un carattere più grande del normale e corsivo.



Calcolo numerico

Cliccare sulla riga di inserimento, digitare `12 * 23`, premere **INVIO**.

La digitazione delle espressioni avviene nella apposita *riga di inserimento*.

Le espressioni digitate appaiono nella *finestra di Algebra* precedute da un numero naturale progressivo che le identifica. Si noti che l'operazione digitata non viene ancora eseguita e rimane evidenziata nella riga di inserimento.

Cliccare su **Semplifica** .

L'operazione evidenziata viene eseguita. Il risultato appare centrato invece che allineato sulla sinistra. Ciò permette di distinguere facilmente le "domande" dalle "risposte".

L'operazione rimane ancora nella linea di inserimento.

Digitare `68/85`, premere **INVIO**.

La nuova digitazione si sovrappone al precedente contenuto della linea di inserimento, se questo era evidenziato. In caso contrario, si inserisce a partire dalla posizione del cursore.

Cliccare su **Semplifica**.

La frazione appare semplificata. Si noti che di norma il risultato appare in forma frazionaria e non decimale.

Evidenziare (utilizzando i tasti cursore o cliccandovi sopra) nella finestra di *Algebra* la frazione `68/85` prima digitata e cliccare su **Approssima** .

Questa volta il risultato appare in forma decimale.

<u>Si noti che in ogni caso con *DERIVE* tutti i comandi impartiti hanno effetto sulla espressione che in quel momento è evidenziata.</u>

Digitare `100!` (il fattoriale di 100) e premere **INVIO**. Cliccare su **Semplifica**.

Si noti che *DERIVE* opera in aritmetica intera esatta con precisione "illimitata".

Poiché il risultato supera le dimensioni di una linea dello schermo, *DERIVE* va a capo; il simbolo ~ ("tilde") sulla estrema destra della prima riga indica che l'espressione continua nella linea successiva.

Selezionare **Semplifica**, (dalla voce di menu, in alto nello schermo, e non con la corrispondente icona), poi **Fattorizza**. Premere **INVIO**.

Appare la funzione FACTOR avente come argomento il precedente risultato.

Cliccare su **Semplifica**.

Il precedente numero appare scomposto in fattori primi.

Digitare `4/√12`.

Il simbolo di radice quadrata si ottiene cliccando sul corrispondente simbolo nella Barra dei simboli matematici, in basso a destra, oppure scrivendo `4/sqrt(12)`.

Premere **INVIO**. Cliccare su **Semplifica**.

Si noti che *DERIVE* opera con i numeri irrazionali in forma radicale esattamente come si usa in algebra; nel risultato viene anche automaticamente razionalizzato il denominatore.

Evidenziare (utilizzando i tasti cursore o cliccandovi sopra) nella finestra di *Algebra* l'espressione 4/√12. Cliccare sulla riga di inserimento e premere **<F3>**.

L'espressione evidenziata viene così automaticamente inserita nella riga di inserimento; può essere così modificata o inserita in una espressione più complessa.

Questa tecnica di "recupero" di una precedente espressione viene usata molto spesso.

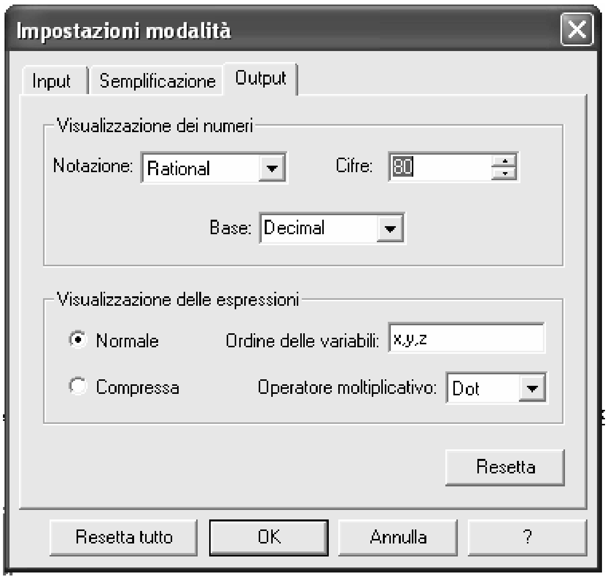
Modificare l'espressione precedente in 4/√13 utilizzando i normali tasti di editing (movimento cursore, tasto di cancellazione…); premere **INVIO**.

Cliccare su **Approssima**.

L'espressione viene trasformata in forma decimale, approssimata alla decima cifra decimale.

Selezionare **Opzioni > Modalità > Output**.

Appare una finestra di dialogo:



Nel campo **Cifre** inserire 80; premere **INVIO** o cliccare su **OK**.
Evidenziare l'espressione 4/√13 e cliccare ancora su **Approssima**.

L'espressione viene trasformata in forma decimale, approssimata alla ottantesima cifra decimale. In *DERIVE* è possibile eseguire calcoli con numeri decimali con una precisione "illimitata".

Selezionare **Opzioni** > **Modalità** > **Output**. Nella finestra di dialogo che appare, nel campo **Cifre** reinserire 10; premere **INVIO**.

Riportiamo così la precisione desiderata al valore di default.

Digitazione di espressioni e calcolo algebrico

Digitare: `a + 2a`, poi premere **INVIO**.
Cliccare su **Semplifica**.

L'espressione viene semplificata eseguendo la somma tra i due monomi. Si noti che la variabile *a* viene manipolata direttamente, senza che ad essa sia stato assegnato alcun valore: *DERIVE* ha capacità di calcolo simbolico, oltre che numerico.

Digitare la seguente espressione:

$$\frac{x^2-1}{x+1}.$$

e premere **INVIO**.

L'editor di linea di *DERIVE* ci costringe a digitarla in forma lineare: il numeratore e il denominatore vanno chiusi tra parentesi tonde, l'operazione di elevamento a potenza deve esplicitamente essere indicata dal carattere **^** (accento circonflesso) ottenibile direttamente da tastiera: si faccia attenzione a non usare il carattere simile presente nella seconda riga della barra dei simboli matematici, che corrisponde all'operatore booleano AND.
Ecco quindi come si dovrà digitare l'espressione:

```
(x^2-1)/(x+1)
```

Si noti infine che, anche se l'espressione viene digitata in formato lineare, viene poi rappresentata nella finestra di *Algebra* secondo l'usuale formato algebrico.

Cliccare su **Semplifica**.

Vediamo un altro esempio un pochino più complicato.
Digitare la seguente espressione, poi premere **INVIO**:

$$\left(a+b-\frac{a^2+b^2}{a+b}\right)\left(\frac{1}{2b^2}-\frac{1}{2a^2}\right).$$

L'editor di linea di *DERIVE* ci costringe a digitarla in forma lineare:

```
(a+b-(a^2+b^2)/(a+b))(1/(2b^2)-1/(2a^2))
```

La traduzione dal linguaggio algebrico "tradizionale" a quello "lineare" costituisce di per sé un utile esercizio per abituare gli allievi a riconoscere la struttura di una espressione.
Si noti che:

1. il simbolo di moltiplicazione non è necessario, ove la sua mancanza non crea ambiguità;
2. si possono usare più livelli di parentesi, ma il simbolo da utilizzare è sempre quello di parentesi tonda; le parentesi quadre e graffe servano per altri scopi (le quadre per delimitare vettori e matrici, le graffe per delimitare *set* ovvero insiemi).

Cliccare su **Semplifica**.

Si ottiene il risultato dell'espressione.

Evidenziare l'espressione prima digitata cliccandoci sopra con il mouse, porre il cursore sul primo numeratore (cioè: $a^2 + b^2$) e cliccare più volte.

Si noti che vengono evidenziate le sotto-espressioni di livello via via sempre più basso, seguendo la struttura "ad albero" dell'espressione data. Ci si può "muovere" nell'albero tenendo premuto il tasto **SHIFT** (quello delle maiuscole) e premendo i tasti cursore: la freccia a destra o a sinistra fa passare da una sottoespressione ad un'altra di pari livello; la freccia in alto o in basso fa passare da una sottoespressione ad un'altra di livello rispettivamente superiore o inferiore. Chi legge non si preoccupi: è più facile a farsi che a dirsi.

Modifica di espressioni

Vogliamo ora scrivere la seguente espressione:

$$\left(a+b-\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2}\right)\left(\frac{1}{2b^2}+\frac{1}{2a^2}\right).$$

Si noti che l'espressione è molto simile alla precedente (cambiano solo gli esponenti della prima frazione algebrica). Vogliamo risparmiarci la noia di riscriverla *ex novo* modificando la precedente.

Cliccare sulla espressione simile digitata in precedenza, ma <u>con il tasto destro del mouse</u>.

Cliccare (con il solito tasto di sinistra, questa volta) su **Modifica**.

L'espressione appare evidenziata in colore blu, incorniciata con una linea grigia e viene automaticamente inserita nella riga di inserimento. È così possibile effettuare le modifiche desiderate.

Premere **INVIO**.

L'espressione viene modificata come desiderato e la cornice grigia scompare; si noti però che il risultato che appare nella linea successiva non si è modificato: infatti esso fa ancora riferimento alla precedente espressione. Se vogliamo ottenere il risultato della nuova espressione dovremo richiederlo esplicitamente.

Cliccare su **Semplifica**.

#1: $$\left(a+b-\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2\cdot b^2}-\frac{1}{2\cdot a^2}\right)$$

#2: $$\frac{a-b}{a\cdot b}$$

#3: $$\frac{(a+b)\cdot(a^2-b^2)}{2\cdot a\cdot b\cdot(a^2+b^2)}$$

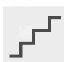
Diverse forme di manipolazione simbolica

Digitare la seguente espressione, poi premere **INVIO**:

```
((x + y)^2 - z^2)^2
```

Selezionare **Semplifica** (nel menu, non l'icona) e selezionare **Base**.

L'espressione viene semplificata; ma sono possibili altre forme di semplificazione. Prima però vediamo una interessante novità di *DERIVE* 6.

Evidenziare l'espressione digitata cliccandovi sopra, poi cliccare su **Visualizza passaggi** cioè l'icona che contiene una scaletta stilizzata: 

Compare la "regola" che è stata utilizzata per ottenere quel risultato. Si noti che la "regola" appare come oggetto di testo, quindi senza il numero progressivo [1].

[1] Questa nuova interessante caratteristica di *DERIVE* non è ancora disponibile per tutte le trasformazioni; in particolare non si può applicare nella risoluzione di equazioni e disequazioni e per la scomposizione in fattori di polinomi. Torneremo in seguito con un altro esempio su questa nuova funzionalità.

```
                  2    2 2
#1:    ((x + y)  - z )

                                        2             2    2 2
#2:                                    (x  + 2·x·y + y  - z )

          2    2             2
(z + w)  ⇒ z  + 2·z·w + w

                                        2             2    2 2
#3:                                    (x  + 2·x·y + y  - z )
```

Evidenziare ancora l'espressione di partenza con un clic del mouse.
Selezionare **Semplifica > Sviluppa** e infine, nella finestra di dialogo che appare, cliccare su **OK**.

Si ricordi: *Selezionare* significa cliccare sulla voce di menu, *Cliccare* significa utilizzare l'icona corrispondente.

Nella Finestra di Algebra appare il comando che realizza lo sviluppo dell'espressione.

Cliccare su **Semplifica** per dar corso al comando.

Si sarebbe anche potuto ottenere il risultato direttamente, ma con questo modo di agire si mantiene traccia del comando che ha generato il risultato ottenuto.

Evidenziare ancora una volta l'espressione di partenza con un clic del mouse.
Selezionare **Semplifica > Fattorizza**, cliccare su **OK** e infine cliccare su **Semplifica**.

Osservare i risultati ottenuti di volta in volta. Come si vede, è possibile selezionare diverse modalità di manipolazione algebrica. Si noti che dopo lo "sviluppo" il polinomio è stato ordinato rispetto alle potenze decrescenti della variabile *x*. Come fare per ottenere il polinomio senza alcuna parentesi?

Basterà ripetere le precedenti azioni (cliccare sull'espressione di partenza, selezionare **Semplifica** > **Sviluppa** e, nel campo **Sviluppa rispetto alle variabili**, cliccare una alla volta su tutte e tre le variabili che compaiono: **x**, **y**, **z**.

Un piccolo approfondimento

I lettori, esaminando il menu **Semplifica > Fattorizza**, potrebbero essere incuriositi dalle diverse voci che compaiono nel campo **Tipo di fattorizzazione**. Il seguente esempio ha lo scopo di chiarire i diversi "gradi di fattorizzazione" che si possono realizzare. Tralasceremo le ultime voci che esulano dal contesto di algebra elementare in cui ci troviamo.

Digitare l'espressione $x^9 - 18\,x^5 + 81x$.
Fattorizzare più volte il precedente polinomio selezionando, l'una dopo l'altra, le voci: **Decomposizione numeri primi**, **Triviale**, **Quadrati**, **Razionale**, **Reale**, **Complessa** del campo **Tipo di fattorizzazione**.

Si notino le diverse fattorizzazioni che così si ottengono, che, ovviamente, dipendono anche dall'insieme numerico nel quale si intende operare.

Il valore di default del campo **Amount** è **Rational**, che corrisponde alla scomposizione "classica" che normalmente si usa nelle classi del primo biennio.

Risoluzione di equazioni algebriche

Digitare la seguente equazione (attenzione alle indispensabili parentesi) poi premere **INVIO**:

$$\frac{x-3}{x-1}=\frac{3x-4}{x-1}.$$

Cliccare su **Risolvi espressione** .

In questo contesto non preoccupiamoci della finestra di dialogo che appare: qui è possibile scegliere l'incognita rispetto alla quale vogliamo risolvere l'equazione digitata (in questo caso, ovviamente, x) e anche il tipo di risoluzione (esatta o approssimata).

Cliccare su **OK**.

L'equazione viene riproposta come argomento della funzione SOLVE, insieme all'incognita prescelta.

Cliccare su **Semplifica**.

Appare il risultato.

Digitare la seguente equazione: $\frac{x-3}{x-1}=\frac{2x-4}{x-1}$.

Si noti che l'equazione differisce dalla precedente solo per il coefficiente della incognita al numeratore del secondo membro: conviene quindi riprendere l'equazione precedente evidenziandola con un clic del mouse e premendo il tasto funzione **F3** per portarla nella Riga di inserimento, invece di digitarla *ex novo*[2].

Cliccare su **Risolvi**, poi su **OK** e infine su **Semplifica**.

Il risultato appare nella finestra di Algebra. Perché questa volta compare la scritta *false*?

Digitare la seguente equazione, poi cliccare su **Risolvi**, poi su **OK** e infine su **Semplifica**:

```
2x^2 - 5x - 3.
```

Si noti che non è necessario digitare "= 0": *DERIVE* sottintende che, se si impartisce il comando **Risolvi** per una espressione (algebrica o anche trascendente), se manca il simbolo di "=" dopo l'espressione, questa sia uguagliata a zero.

NOTA: Si suppone che il Lettore, a questo punto, abbia acquisito una sufficiente manualità nell'uso di *DERIVE*. D'ora in poi i comandi da impartire saranno indicati in modo più sintetico.

Risolvere le seguenti equazioni: $2x^2 - 5x - 8 = 0$, $2x^2 - 5x + 10 = 0$.

Si consiglia, per risparmiare tempo, di portare nella riga di inserimento l'equazione precedente utilizzando il tasto funzione **F3** e di modificare solo l'ultimo termine.

Si noti la forma in cui vengono scritti i risultati.

Risolvere le seguenti disequazioni:

$$2x^2 - 5x - 3 > 0,\ \ 2x^2 - 5x - 3 < 0,\ \ 2x^2 - 5x + 10 > 0,\ \ x^2 - 6x + 9 > 0.$$

Cosa significa la risposta *true*?

***La grafica sul piano* (2D)**

Digitare la seguente equazione: $y = x^2 - x - 1$.

Dopo essersi accertati che nella Finestra di *Algebra* sia evidenziata proprio l'equazione desiderata, cliccare su **Finestra grafica 2D** per accedere all'ambiente di "grafica a due dimensioni".

Cliccare su **Traccia il grafico**, che ha una icona uguale alla precedente:

[2] Non useremo il comando **Modifica** per non perdere l'equazione precedente.

Appare il grafico della funzione $y = x^2 - x - 1$, cioè una parabola.

Non è necessario digitare esplicitamente il primo membro dell'equazione, è sufficiente digitare solo il polinomio $x^2 - x - 1$: se il primo membro non è presente, *DERIVE* assume automaticamente che sia y.

Cliccare su **Algebra** per tornare all'ambiente di *Algebra*.

Digitare la seguente equazione: $x^2 + y^2 - 4 = 0$.

Cliccare su **Finestra grafica 2D** per tornare all'ambiente di grafica

Si noti che il precedente grafico è ancora presente nella finestra di grafica.

Cliccare su **Traccia il grafico** per tracciare il grafico corrispondente.

Appare una circonferenza con centro nell'origine (V. anche NOTA IMPORTANTE poco sotto).

Si noti che *DERIVE* è in grado di tracciare anche grafici corrispondenti ad equazioni implicite nella forma $A(x,y) = B(x, y)$ oppure $F(x, y) = 0$. Il termine "= 0" è però in questo caso obbligatorio.

Si noti anche che più grafici possono coesistere nella stessa finestra. Di norma ogni grafico è tracciato con un colore diverso anche se, come vedremo, è possibile modificare questa opzione.

NOTA IMPORTANTE:

A seconda di come è settato il software, il sistema di riferimento potrebbe essere monometrico oppure no; ovviamente la cosa appare in modo particolarmente evidente quando viene tracciata una circonferenza, come nell'esempio precedente. Se questa appare come tale, chi legge può saltare questo paragrafo. Se invece appare come una ellisse, si dovrà operare un aggiustamento della scala secondo le indicazione che seguono.

Nel menu della finestra di *Grafica 2D* selezionare **Imposta > Intervallo del grafico > Minimo/massimo**. Nella riga **Verticale** inserire –2, 2, 4 rispettivamente nei campi **Minimo**, **Massimo** e **Intervalli**. Ciccare su **OK**.

Questi valori dovrebbero fornire un grafico accettabile, cioè una circonferenza "ragionevolmente tonda". Si usa il condizionale perché la cosa dipende dalle dimensioni della finestra (si ipotizza di operare a schermo intero), dalla risoluzione grafica usata da Windows e anche dal tipo di monitor utilizzato e dalle sue regolazioni. Se necessario si modifichino i valori mantenendo ovviamente la simmetria per poter avere l'origine al centro dello schermo.

Selezionare **Opzioni** e cliccare sulla voce **Annota i nuovi grafici**.

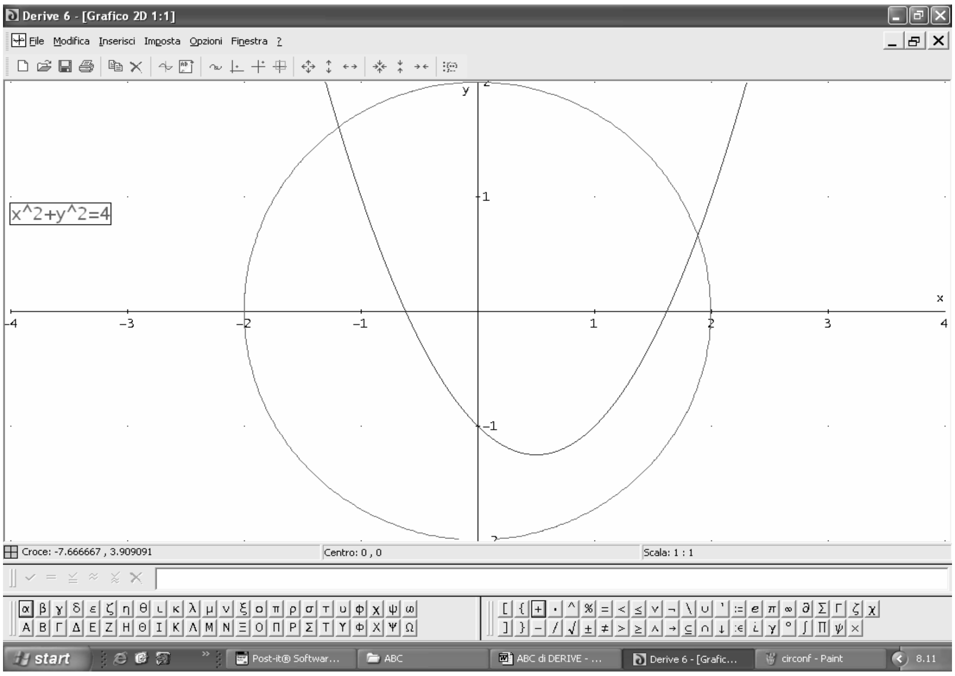
La voce viene marcata con una piccola "v" alla sua sinistra.

Con questa opzione nello schermo di grafica sarà automaticamente inserita l'equazione corrispondente ad ogni nuovo grafico che sarà tracciato, (di solito sulla parte sinistra dello schermo) usando lo stesso colore con il quale viene tracciato il grafico stesso. Questa equazione viene vista come una *annotazione*, cioè come un oggetto di testo.

Cliccare ancora su **Traccia il grafico**.

Poiché nella Finestra di Algebra è ancora evidenziata l'equazione della circonferenza, questa sarà tracciata di nuovo sovrapponendosi alla precedente. In più, avendo attivato la precedente opzione, apparirà anche la sua equazione.

Come tutte le annotazioni, questa equazione può essere spostata dovunque sullo schermo trascinandola con il mouse e, cliccandovi sopra con il pulsante di destra del mouse, può essere modificata e può essere cambiato il font utilizzato e le sue dimensioni.



Tornare all'ambiente di *Algebra*, cliccare sull'equazione della parabola per evidenziarla e cliccare su **Cancella** .

L'equazione viene cancellata.

Cliccare su **Finestra grafica 2D**. Si noti che la parabola è ancora presente!

IMPORTANTE: In *DERIVE* un grafico, una volta creato, assume, per così dire, vita propria, completamente slegata dall'equazione che lo ha generato; quindi se modifichiamo o addirittura cancelliamo l'equazione, il grafico continua a essere presente.

Se vogliamo cancellare anche il grafico, è necessaria una azione esplicita.

Selezionare **Modifica > Cancella grafico**.

Il sottomenu ci offre la scelta tra **Primo**, **Ultimo**, **Tutti tranne l'ultimo**.

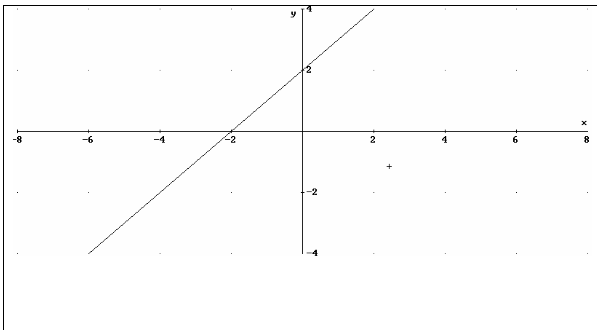
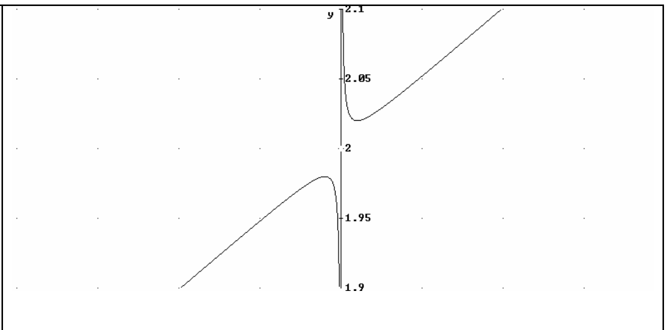
Si faccia attenzione che l'ordine con il quale vengono considerati i grafici non è quello del numero della corrispondente equazione nella Finestra di Algebra, ma proprio quello cronologico di creazione.

Cliccare su **Primo**.

Dato che la parabola è stata la prima curva ad essere tracciata, sarà essa ad essere cancellata mentre la circonferenza rimane sullo schermo.

Ancora sulla modifica della scala

Cliccando su **Riduci**  , su **Ingrandisci**  o su **Centra sulla croce** , possono essere modificate le dimensioni della regione di piano visualizzata sullo schermo e la sua posizione rispetto agli assi. Il cursore grafico (rappresentato da una crocetta) può essere posizionato ovunque cliccando nella posizione voluta.
Qualche prova diretta renderà l'uso di questi comandi molto più chiaro di cento parole.
Come esercizio di modifica della scala, dopo aver cancellato l'intero schermo selezionando **Modifica** > **Cancella tutti i grafici**, tracciare il grafico della funzione $y = \frac{x^2 + 2x + 0.001}{x}$ in modo che appaia chiaramente come una iperbole e non come una retta, come invece appare nella scala standard.
Si ricordi comunque che, selezionando **Imposta > Intervallo del grafico** > **Lunghezza/Centro** e cliccando su **Resetta**, si torna automaticamente alle impostazioni di scala standard.

	
L'iperbole… prima della cura	L'iperbole… dopo la cura

Risoluzione di sistemi

Tornare all'ambiente di *Algebra* cliccando su .
Selezionare **Risolvi** (nel menu, non l'icona) **Sistema**. Nella finestra di dialogo che appare, nel campo **Numero** digitare 2, poi cliccare su **OK**.
Digitare, ciascuna nella corrispondente riga di inserimento, le due equazioni

`2x+3y=1` e `-x+4y=5`.

Dopo aver digitato la prima equazione, premere il tasto di tabulazione per portarsi nella seconda linea. Premere poi ancora il tasto di tabulazione per portarsi nel campo **Variabili della soluzione**. Premere **OK** per confermare le variabili proposte (*x* e *y*).

Appare: `SOLVE([2·x + 3·y = 1, -x + 4·y = 5], [x, y])`.

Selezionare **Semplifica**.

Appare il risultato del sistema lineare.

Tracciare il grafico delle due rette e verificare graficamente il risultato del sistema.

Si consiglia di cliccare sul vettore delle equazioni `[2·x + 3·y = 1, -x + 4·y = 5]` in modo da evidenziarlo: i comandi per tracciare il grafico avranno così effetto contemporaneamente su entrambe le equazioni.

La stessa procedura può essere applicata anche per la risoluzione di sistemi non lineari.

DERIVE è anche perfettamente in grado di rappresentare curve in forma parametrica e in coordinate polari, ma in queste poche pagine non c'è spazio per parlarne.

Accenneremo invece, senza dilungarci troppo, all’ambiente di *Grafica tridimensionale*.

Grafica tridimensionale **(3D)**

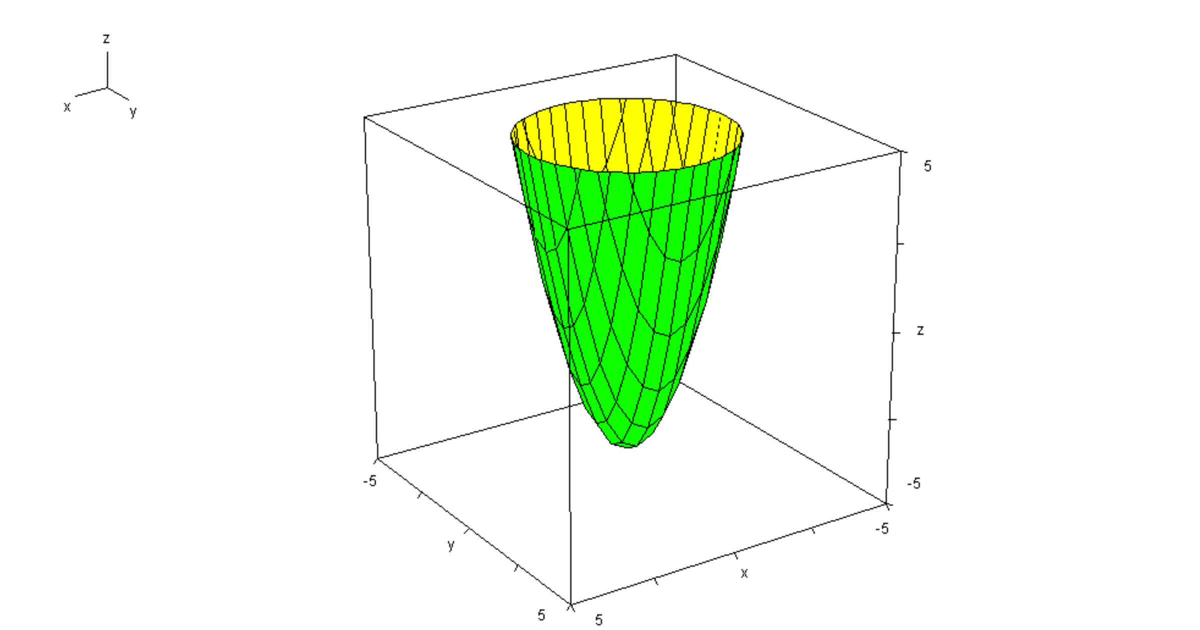
Tornare all'ambiente di *Algebra* e scrivere il polinomio $x^2 + y^2 - 4$. Cliccare su **Finestra > Grafica 3D** .

Questo è un secondo ambiente di grafica, completamente indipendente da quello 2D che abbiamo usato finora.

Cliccare su **Traccia il grafico** .

Appare il grafico del paraboloide di equazione: $z = x^2 + y^2 - 4$.

Anche in questo caso il primo membro (“*z*=”) della funzione in due variabili $z = F(x, y)$ può essere omesso.



Cliccare due volte in rapida successione sul grafico.

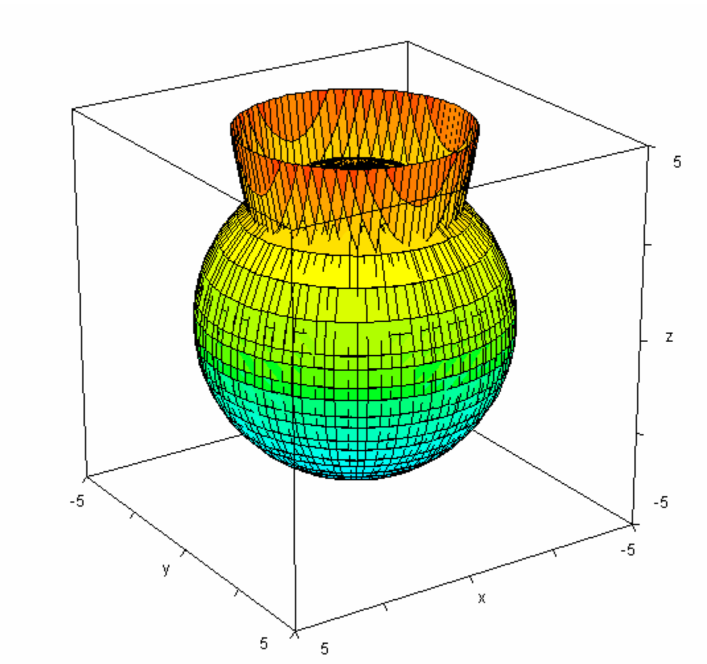
Il grafico viene evidenziato e si apre una finestra di dialogo nella quale è possibile modificare le dimensione della regione di spazio visualizzata, variare la combinazione di colori del grafico e infine cambiare il **Numero di pannelli**, cioè il numero dei punti le cui coordinate vengono calcolate e che determinano la “griglia” di rappresentazione della superficie. Ovviamente raddoppiando i valori sia nel campo *x* che nel campo *y*, il numero dei pannelli (e quindi anche il tempo impiegato nel calcolo delle coordinate) quadruplica. Comunque la velocità di esecuzione è stupefacente, soprattutto se la si confronta con quella della versioni più vecchie di *DERIVE*.

Cliccare su **Finestra algebra** e digitare $\rho = 4$ (si consiglia di utilizzare la Barra dei simboli greci), poi tornare all’ambiente di grafica 3D e selezionare **Imposta > Sistema di coordinate**. Cliccare su **Sferiche**, confermare cliccando su **OK** e infine cliccare su **Traccia grafico**.

Viene tracciato il grafico corrispondente all’equazione evidenziata: si tratta di una sfera con centro nell’origine e raggio 4.

Si noti che è possibile utilizzare diversi sistemi di coordinate (e anche rappresentare superfici e curve sghembe in forma parametrica), anche contemporaneamente.

Questo è il grafico che si ottiene:



È ovviamente possibile modificare, tra le altre cose, la scala e il "punto di vista".
È molto comodo utilizzare l'apposito insieme di icone presente nella Barra dei comandi che permettono di modificare le dimensioni e di ruotare a piacimento il grafico:

Veramente spettacolare, anche se difficile da rendere su un foglio di carta, è la possibilità di ruotare il grafico simultaneamente ai movimenti del mouse: basta tenere premuto contemporaneamente il tasto delle maiuscole (**SHIFT**). È inoltre possibile, anche in questo ambiente, utilizzare le *Slider bar*, delle quali si parlerà più diffusamente più avanti in questo fascicolo.

Analisi matematica

Cliccare sulla riga di inserimento e digitare la seguente funzione: $\frac{x^2+1}{x}$ (attenzione alle parentesi!). Vogliamo calcolare i suoi limiti per x che tende a 0 da destra e da sinistra.

Cliccare su **Calcola limite** lim .

Appare una finestra di dialogo che riporta la variabile indipendente x e, nel campo **Punto limite**, il valore cui far tendere tale variabile; il valore di default è proprio 0, quindi in questo esempio non dobbiamo fare alcuna modifica e basterà cliccare su **OK**.

Appare il simbolo di limite della nostra funzione secondo la normale notazione.

Cliccare su **Semplifica**.

Appare il risultato, in una forma piuttosto ambigua: $\pm\infty$. [3]

Ripetiamo il calcolo del limite con una richiesta più circostanziata.

Evidenziare la funzione e cliccare ancora su **Calcola limite**, portandosi poi sulla parte destra della finestra di dialogo nel campo **Limite da**, cliccare su **Sinistra**, poi su **OK**.

[3] Talvolta il risultato che appare in questi casi può essere diverso, a seconda della versione di *DERIVE* che viene utilizzata.

Ciò equivale a richiedere il limite per x che tende a 0 da sinistra.

Selezionare **Semplifica**.

Compare il risultato del limite richiesto.

Ripetere le precedenti azioni per calcolare il limite per x che tende a 0 da destra.

Vogliamo ora calcolare la derivata della funzione $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+1}{(2x-3)^3}}$.

Digitare la funzione (non è necessario digitare anche "$f(x)$=") e premere **INVIO**.

Cliccare su **Calcola derivata** .

Nella finestra di dialogo che compare è sufficiente cliccare su **OK**, perché la variabile, x, e l'ordine di derivazione, 1, sono proprio ciò che desideriamo.

Compare il noto simbolo di Leibniz per la derivata.

Cliccare su **Semplifica**.

Appare il risultato che desideriamo.

Concludiamo con un esempio di integrazione.

Digitare la funzione $\dfrac{x+2}{2x^2-x-3}$.

Cliccare su **Calcola integrale** .

La finestra di dialogo che compare propone di default il calcolo dell'integrale indefinito. Si noti che nel campo **Costante** compare 0. In questo campo si potrebbe inserire, ad esempio, la consueta costante additiva arbitraria C che comparirà nel risultato. Ma in questa occasione lasciamo tutto come sta e limitiamoci a confermare cliccando su **OK**.

Cliccare su **Semplifica**.

Appare il risultato che desideriamo.

Si noti che viene immediatamente calcolato un integrale che, pur senza essere difficile, dato che si può utilizzare il ben noto procedimento per l'integrazione delle funzioni razionali fratte, è certo piuttosto laborioso da realizzare manualmente.

Approfittiamo dell'occasione per accennare a come realizzare con *DERIVE* la scomposizione in fratti semplici che sta alla base dell'integrazione appena realizzata.

Evidenziare la precedente funzione e selezionare (nel menu, non l'icona) **Semplifica>Sviluppa**.

Confermare con **OK**, poi selezionare **Semplifica**.

La frazione viene scomposta in fratti semplici.

Per concludere, calcolare l'integrale definito della precedente funzione nell'intervallo [0, 1].

I comandi da impartire sono gli stessi di prima, con la ovvia differenza che nella finestra di dialogo si dovrà cliccare su **Definito** e nei campi **Limite superiore** e **Limite inferiore** si dovranno indicare rispettivamente gli estremi superiore e inferiore dell'intervallo desiderato.

La modalità "passo-passo"

I "Computer Algebra Systems" (CAS), cioè la categoria di programmi a cui appartiene *DERIVE* e il software di alcune calcolatrici simboliche come le TI-89 e la Voyage 200 (della Texas Instruments), operano in modo non visibile all'utente e spesso il loro modo di fare i calcoli, soprattutto quelli algebrici, non è il medesimo che si usa manualmente. Di conseguenza di norma

non è possibile vedere i “passaggi” che consentono di arrivare al risultato che appare sullo schermo.
Questo però non è sempre vero.
Vediamolo con un esempio.
Digitare `cos^2x`.

Data l’assenza di parentesi, *DERIVE* interpreta la scrittura come la funzione $\cos^2 x$.

Cliccare su **Calcola derivata** .
Ora però, invece di cliccare su **Semplifica**, il che ci fornirebbe direttamente il risultato, cliccare su **Visualizza Passaggi** .

Con questo comando, già visto in un precedente esempio, compare sotto forma di casella di testo la “regola di derivazione” che è stata applicata. Se sono state applicate più “regole”, queste vengono indicate, con il relativo risultato intermedio, ad ogni successivo clic sull’icona **Visualizza passaggi**.
Di seguito viene riportato ciò che accade sullo schermo in questo esempio.[4]

#1: $\mathrm{COS}(x)^2$

#2: $\frac{d}{dx}\mathrm{COS}(x)^2$

$\frac{d}{dx}F(x)^n \Rightarrow n\cdot F(x)^{n-1}\cdot\frac{d}{dx}F(x)$

#3: $2\cdot\mathrm{COS}(x)\cdot\frac{d}{dx}\mathrm{COS}(x)$

$\frac{d}{dx}\mathrm{COS}(x) \Rightarrow -\mathrm{SIN}(x)$

#4: $-2\cdot\mathrm{COS}(x)\cdot\mathrm{SIN}(x)$

La programmazione

In *DERIVE* manca un vero e proprio linguaggio di programmazione di tipo procedurale [5], presente invece in altri sistemi di elaborazione simbolica e nelle calcolatrici.
Esiste tuttavia la possibilità di realizzare una programmazione di tipo funzionale (in ciò si vede la parentela di *DERIVE* con il LISP). Qui di seguito accenneremo solo ad alcune delle possibilità di *DERIVE* e in particolare alle istruzioni di: Assegnazione, Assegnazione “locale”, Dichiarazione di “tipo”, Alternativa (If…Then…), Iterazione enumerativa (Vector).
In questa sede tralasceremo di parlare di altre strutture come l’iterazione non enumerativa (Iterates) e la struttura Loop.

[4] Nel caso del calcolo delle derivate questa funzionalità è particolarmente efficace; avremmo anche potuto usarla per funzioni ben più complicate; è stato scelto un esempio molto facile solo per problemi di spazio.
[5] detto in parole molto povere, in questo caso un programma è costituito da una successione sequenziale di istruzioni regolate, se necessario, da strutture di controllo.

Assegnazione “globale”

Digitare `a:=123`.

Questa assegnazione è *globale*, vale a dire che durante questa sessione di lavoro e fino a una eventuale nuova assegnazione, la variabile *a* conterrà sempre il valore 123.

Digitare `2a/(a-1)` e selezionare **Semplifica**.

Si ottiene ovviamente 123/61, cioè l’espressione viene valutata sulla base del valore assegnato alla variabile *a*.

La medesima sintassi può essere usata per definire una funzione.

Digitare `f(x):= x^2 - 4`.

Digitare `f(7)` e selezionare **Semplifica**.

Otterremo il valore della funzione per $x = 7$.

Digitare `f(x+1)` e selezionare **Semplifica**.

Si consiglia di tracciare il grafico delle due funzioni $f(x)$ e $f(x+1)$. Si noti che il secondo grafico è uguale a quello della funzione precedente, traslato a sinistra di una unità.

Una volta definita una funzione, la possiamo manipolare in forma simbolica.

Digitare ad esempio `(f(1+h)-f(1))/h` e selezionare **Semplifica**.

Otterremo il valore del rapporto incrementale della funzione per $x = 1$.

Calcolare il limite per h che tende a 0 dell’espressione ottenuta e selezionare **Semplifica**.

Che cosa si ottiene?

Digitare ora `f'(1)` e selezionare **Semplifica**.

Che cosa si osserva?

Digitare ora `y-f(1)=f'(1) (x-1)` e selezionare **Semplifica**.

Otterremo l’equazione della retta tangente alla funzione per $x = 1$.

Concludiamo mostrando come fare per “liberare” una variabile.

Digitare `a:=`, confermare con OK lasciando in bianco il secondo membro dell’assegnazione.

Digitare `2 a + a` e selezionare **Semplifica**.

Invece di ottenere 369, si ottiene ora 3 *a*.

La variabile *a* ha dunque perso il valore numerico che le era stato assegnato e torna ad avere un significato solo simbolico e come tale l’espressione viene calcolata.

Lo stesso procedimento si usa per “liberare” la funzione $f(x)$.

Gli identificatori di variabili

Di default i nomi delle variabili in *DERIVE* sono di un solo carattere.

Per rendersene conto cliccare sulla riga di inserimento e digitare (senza spazi intermedi) la seguente "parola": `laureainmatematica` poi… semplificare.
Come spiegare il risultato ottenuto?

Per poter usare identificatori formati da due o più caratteri bisogna selezionare **Opzioni > Modalità>Input**. Nel campo **Nome delle variabili** selezionare **Parola**; se poi si vuole che *DERIVE* distingua anche tra lettere maiuscole e minuscole (e quindi consideri, ad esempio, a e A come due variabili diverse) si selezioni **Sensibile** nel campo **Maiuscole/Minuscole**.

Se però gli identificatori sono usati in una assegnazione o nella definizione di una funzione non è necessario preoccuparsi di quanto appena detto: *DERIVE* riconosce il simbolo di assegnazione e accetta in questo contesto identificatori di variabile anche con più caratteri e automaticamente mette in maiuscolo gli identificatori di funzione.

Due esercizi sugli identificatori di variabili

Definire una funzione che, avendo come argomenti le coordinate di due punti $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$, restituisca la misura del segmento che li ha come estremi.

`DIST(xa,ya,xb,yb):= . . .`

La formula della distanza tra due punti è ben nota a tutti; attenzione alle parentesi!

Provare la correttezza della vostra definizione verificando che la distanza tra A(0; 0) e B(4;3) è 5 e che quella tra C(2;3) e D(6; 7) è $4\sqrt{2}$.
Definire poi una funzione che, avendo come argomenti i coefficienti dell'equazione di una parabola nella forma canonica $y = ax^2 + bx + c$, restituisce sotto forma di vettore bidimensionale le coordinate del vertice della parabola.

`VERT(a,b,c):= [...,...]`

Per *DERIVE* un vettore è una ennupla ordinata di numeri o espressioni separate dalla virgola e chiuse tra parentesi quadre.

Salvare, se lo si desidera, questa parte del vostro lavoro con il nome GEOM usando il comando…. scopritelo da soli: non è difficile; in fin dei conti è un programma che gira sotto Windows e l'Help è nella medesima posizione di qualsiasi altro programma.
Questi esercizi potrebbero entrare a far parte di una "libreria di funzioni" che gli studenti possono costruirsi un poco alla volta; queste funzioni potranno poi essere utilizzate per risolvere problemi ben più complessi.

Assegnazione locale e tabulazioni

Oltre alla assegnazione globale, è anche possibile effettuare una "assegnazione locale", valida solo per l'espressione evidenziata.

Digitare, ad esempio, l'espressione $\frac{x+4}{x-2}$, poi cliccare su **Sostituisci variabile** SUB.

Appare una finestra di dialogo nella quale compare l'elenco delle variabili presenti nell'espressione (in questo caso la sola *x*) con a fianco uno spazio nel quale va digitato il valore che vogliamo assegnare a quella variabile.

Assegnare alla variabile *x* i seguenti valori (ovviamente uno solo alla volta): 5; 1; –7/13; –4; 2.
Potrebbe essere utile, con un esercizio di questo tipo, far notare agli studenti che l'espressione cambia di valore ogni volta assumendo talvolta valori positivi, valori negativi, nulli o perdendo di significato. (Purtroppo *DERIVE* ha un modo sgradevole di indicare l'ultima di queste eventualità; scrive infatti $\pm\infty$).

Questo tipo di attività pur estremamente semplice può avere una notevole importanza nel favorire il fondamentale salto concettuale dalle espressioni algebriche, intese come oggetti statici, alle espressioni (per ora potremmo anche non chiamarle *funzioni*) intese come processo dinamico.

Anche l'approccio ai concetti di equazione e di disequazione possono trarre giovamento da questo tipo di attività. Per non parlare del concetto di limite che potrebbe essere proficuamente introdotto in modo euristico formulando delle congetture attraverso esplorazioni numeriche, per poi arrivare (ma come punto di arrivo, non di partenza) alla "classica" definizione "epsilon-delta".

Ancora più utile per questo tipo di attività, efficacissima dal punto di vista didattico per la formazione dei corretti modelli mentali negli studenti, è la tabulazione dei valori di una funzione, un po' come si può fare con un foglio elettronico o con l'ambiente *Table* delle calcolatrici grafiche..

Vediamo come realizzarla con *DERIVE*.

Digitare `Table((x+4)/(x–2),x,–5,5, 0.2).`

La funzione (che è la stessa di prima) potrebbe anche essere direttamente inserita senza digitarla una seconda volta evidenziandola nella Finestra di *Algebra* e premendo il tasto funzione F3.

I successivi argomenti sono: l'indicazione della variabile (in questo caso la *x*), il valore iniziale e quello finale della variabile nella tabella che sarà creata e infine il "passo" cioè il valore del quale si incrementa la variabile ogni volta. In questo caso il passo è 0.2.

Cliccare su **Approssima**.

Per le "esplorazioni numeriche" da realizzare con le tabelle, i valori decimali sono di solito didatticamente più ricchi di significato dei valori frazionari.

La tabella appare sotto forma di matrice con due colonne (i valori della variabile indipendente, in questo caso *x,* e le loro immagini nella funzione) e un numero di righe dipendente ovviamente dai valori iniziali e finale e dal passo prescelto.

Se necessario, agendo sulla barra di scorrimento verticale presente sulla destra dello schermo, come in tutti i programmi sotto Windows, è possibile passare in rassegna i valori della tabella.

Dichiarazione di "tipo"

In realtà *DERIVE* non richiede una vera e propria dichiarazione obbligatoria di tipo (come *Integer* o *Real* del linguaggio di programmazione Pascal). È tuttavia possibile dichiarare a quale insieme numerico vogliamo che appartenga una certa variabile e a quale intervallo.
Vediamo un esempio concreto.
Digitare `sin(k*π)`.

Il simbolo π può essere scritto "pi" oppure può essere "prelevato" cliccando sul corrispondente carattere presente nella Barra dei simboli matematici.

Cliccare su **Semplifica**.

Non si ottiene il risultato atteso (zero); anche cliccando su **Approssima** non si ha miglior fortuna. Forse *DERIVE* non conosce le funzioni circolari?
No, l'errore è nostro, perché non abbiamo informato *DERIVE* che la variabile k deve assumere solo valori interi.

Selezionare **Crea > Dominio di una variabile**.

Si apre una finestra di dialogo.

Nel campo **Nome della variabile** scrivere la variabile desiderata (in questo caso k).
Cliccare sulla voce di **Dominio** che interessa (in questo caso **Intero**).

Con questa finestra di dialogo si può anche definire non solo il tipo di una variabile, ma anche l'eventuale intervallo a cui deve appartenere. Attenzione però: <u>queste scelte non hanno effetto nell'ambiente di grafica (Finestra Grafica 2D)</u>.

Cliccare su **OK**.
Semplificare ancora la precedente espressione: questa volta si ottiene il risultato atteso.

Struttura alternativa

Vediamo direttamente in azione questa struttura, definendo una funzione "*piecewise*" (ovvero, in italiano, "definita a tratti").
Cliccare sulla riga di inserimento e digitare:

`IF(x<=1, x^2, x-2)`

La sintassi è la seguente:
IF(condizione, espressione_se_condizione_è_vera, espressione_se_condizione_è_falsa).
(In pratica il primo argomento è un predicato, il secondo argomento è l'*allora*, il terzo è l'*altrimenti*).
Si noti che, per rendere la lettura più agevole, *DERIVE* scrive l'istruzione su più linee.

Tracciare il grafico della funzione ora definita.

Il terzo argomento può anche essere omesso. A titolo di esercizio, definire una funzione che abbia come grafico una semiretta orizzontale con origine nel punto (0; 2).

Funzioni ricorsive

Anche questa volta opereremo direttamente con un esempio: vogliamo definire con il ben noto procedimento ricorsivo la funzione `POT(a,n)` che restituisce a^n.
In realtà *DERIVE* è capacissimo di calcolare da solo una potenza, ma questa nostra nuova funzione ci serve solo come esempio.

Cliccare sulla riga di inserimento e digitare:

`POT(a,n):=IF(n=0,1,POT(a,n-1)*a)`

Calcolare ad esempio 3^2, 2^{10}, 123^1, -876^0 per controllare la correttezza della definizione.

Cosa succede calcolando con la funzione appena definita le potenze 4^{-1} e $6^{2/3}$?

Iterazione enumerativa

Si realizza con il comando VECTOR che, come vedremo, è utilissimo in innumerevoli occasioni in campo didattico.
La sintassi è:

VECTOR (espressione, variabile, valore iniziale, valore finale, passo)

Selezionando **Semplifica** viene generato un vettore (lista ordinata di "oggetti" dello stesso tipo, separati dalla virgola e racchiusa tra parentesi quadre) che riporta i valori dell'espressione indicata quando una determinata variabile va da un certo valore iniziale a un certo valore finale con un passo specificato. Se il passo viene omesso, *DERIVE* usa automaticamente il valore 1.
In pratica il VECTOR equivale, in un linguaggio di tipo procedurale, a un ciclo del tipo FOR….. DO……. .
Ad esempio digitare: `VECTOR(n^2,n,1,20,2).`
Dopo aver selezionato **Semplifica** si otterrà un vettore contenente i quadrati dei numeri naturali dispari da 1 a 20.

Un esempio di VECTOR

Digitare `TAYLOR(SIN(x), x, 0, k).`

Questa funzione calcola il polinomio di Taylor della funzione indicata rispetto alla variabile `x` di punto iniziale 0 ed ordine `k`.

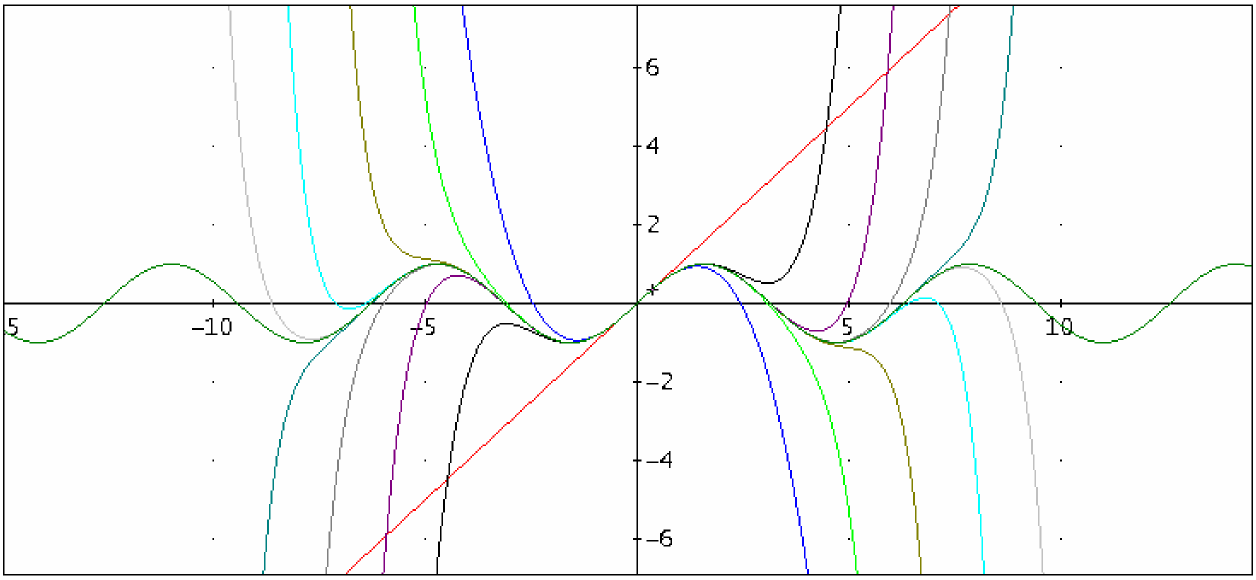
Digitare **`vector(`** poi dopo aver aperto la parentesi premere **<F3>** per richiamare la precedente espressione, infine digitare **`,k,1,20,2)`**. Premere **INVIO** e poi **Semplifica**.

Compare un vettore che riporta i polinomi di Taylor della funzione sin$x$ di ordine 1, 3, 5, 7 ecc. (da 1 a 20 a passo 2).

Tracciare il grafico del vettore ora ottenuto e della funzione sin$x$ stessa.

Si noti che *DERIVE* può tracciare più grafici con un solo comando **Plot** se le loro equazioni sono organizzate sotto forma di vettore.

Un esame del grafico chiarisce più di cento parole il significato e l'utilità dello sviluppo di Taylor per l'approssimazione locale di una funzione.



Come non cambiare colore ai grafici

Di norma i grafici, come è noto, vengono tracciati da *DERIVE* di colori via via sempre diversi; ciò non è sempre gradevole a vedersi: vediamo come tracciare tutti i grafici nel medesimo colore.

Nell'ambiente di *Grafica 2D*, selezionare **Opzioni** > **Visualizzazione** > **Colore**.

Compare una finestra di dialogo.

Nel campo **Colore successivo** si scelga il colore desiderato.

Si suggerisce di scegliere il nero o un colore scuro per rendere i grafici meglio visibili.

Si deselezioni con un clic l'opzione **Cambia automaticamente colori per i nuovi grafici**.

Il simbolo di attivazione (un "thick", una specie di "V") scompare. In questo modo il colore prescelto resta attivo per tutti i grafici che saranno tracciati; ciò evita di avere uno schermo "arlecchino" che sarebbe poco leggibile.

Tornare nell'ambiente di *Algebra*, cliccare sul risultato del Vector prima ottenuto per evidenziarlo e tracciarne di nuovo il grafico.

Un altro esempio di VECTOR

Questo è un esempio di questionario di geometria analitica che potrebbe essere sottoposto agli studenti. Si noti come con pochissimi comandi si riesca a impostare una interessante attività di esplorazione guidata, formulazione di congetture, validazione attraverso dimostrazione che può essere utile per consolidare le conoscenze e le abilità.

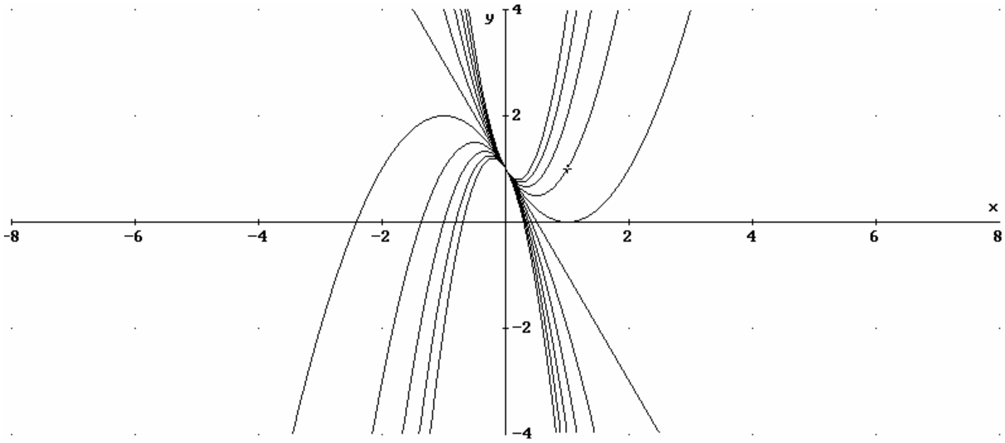
Nell'ambiente di *Algebra* digitare: `VECTOR(a*x^2−2x+1,a,−5,5)`, poi cliccare su **Semplifica**.

Si tratta ovviamente del grafico di una parabola, anzi, di una famiglia di parabole.

Si ricordi che non è necessario digitare `y=` oppure `f(x):=`, basta la sola espressione a secondo membro.

Tracciare il grafico.

Come è noto, con questi comandi vengono disegnati i grafici delle parabole di equazione $y = ax^2-2x+1$, con il parametro a che varia a passo di 1 dal valore iniziale -5 al valore finale +5.



Dal grafico ottenuto appaiono alcuni fatti interessanti:

a) tutte le parabole sembrano avere in comune il loro punto di intersezione con l'asse delle ordinate, ossia il punto (0, 1);

b) tutte le parabole sembrano avere la stessa retta tangente in tale punto.

Sono fatti dipendenti dal nostro fascio con i coefficienti dati, o veri in generale per tutti i fasci aventi per parametro il coefficiente di x^2?

La congettura a) è sicuramente vera: tutte le parabole passano per il punto di ascissa 0 ed ordinata uguale al termine noto, che è uguale per tutte.

La congettura b) è meno evidente, ma una verifica con altri fasci (ad es. $y = ax^2 + 3x + 2$, $y = ax^2 - 1/5x - 1$) sembra confermarla. In effetti è agevole dimostrarla.

Per il primo dei fasci proposti, la tangente cercata sarà la retta passante per il punto (0, 1) ed avente coefficiente angolare uguale al valore che la derivata della funzione assume nel punto $x = 0$ (si potrebbe ovviamente trovarlo anche senza usare la derivata).

Poiché $f'(x) = 2ax-2$, il coefficiente angolare della retta tangente al grafico in (0, 1) sarà -2, qualunque sia il valore del parametro a e la tangente sarà quindi la retta di equazione $y = -2x+1$.

Come si spiega il fatto che *DERIVE* sembra tracciare anche il grafico della retta tangente ora trovata?

È possibile generalizzare questo discorso? Forse siamo sul punto di fare una interessante "scoperta": la retta tangente alla parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ nel punto di coordinate (0, c) ha sempre equazione . . . . .

Un esempio di programmazione procedurale

Vogliamo scrivere un breve programma per calcolare la divisione tra due numeri interi (il primo maggiore del secondo) per differenze successive.
L'algoritmo è veramente molto semplice: si sottrae il sottraendo al minuendo fintanto che il risultato dell'operazione è maggiore del sottraendo e contiamo quante volte è stata effettuata la sottrazione.
Ecco come appare il programma (nella linea #2 esso è stato mandato in esecuzione).

```
       divis(a, b) :=
         Prog
           q := 0
           r := 0
#1:        Loop
             a := a - b
             q := q + 1
             If a < b
                RETURN ["quoziente = ", q, "resto = ", a]

#2:                         divis(50, 8) = [quoziente = , 6, resto = , 2]
```

Il programma viene definito sotto forma di funzione, con il minuendo *a* e il sottraendo *b* come argomenti. Le istruzioni all'interno del costrutto PROG vengono valutate sequenzialmente e terminano quando si incontra un'istruzione di EXIT o di RETURN o dopo l'ultima istruzione, la quale viene restituita come valore del costrutto PROG.
Le istruzioni all'interno del costrutto LOOP vengono ripetutamente valutate in sequenza fino a quando si incontra un'istruzione di EXIT o di RETURN, dopo di cui il ciclo termina e l'ultima istruzione valutata viene restituita come valore del costrutto LOOP [6].
Queste istruzioni erano già utilizzabili fin dalla versione 5. Come si vede, il "listato" del programma appare ben organizzato, con tanto di indentazioni come nel linguaggio Pascal.
Ma nella precedente versione il programma andava scritto tutto su una sola riga (nella solita Riga di inserimento), costringendo chi lo scriveva all'uso di un enorme numero di parentesi (il che tradiva la natura funzionale "LISP-like" del linguaggio di programmazione).
Ecco come andava digitato il programma:

```
divis(a,b):=PROG(q:=0, r:=0, LOOP(a:=a-b, q:=q+1), IF(a < b,
RETURN["quoziente = ", q, "resto = ",a])))
```

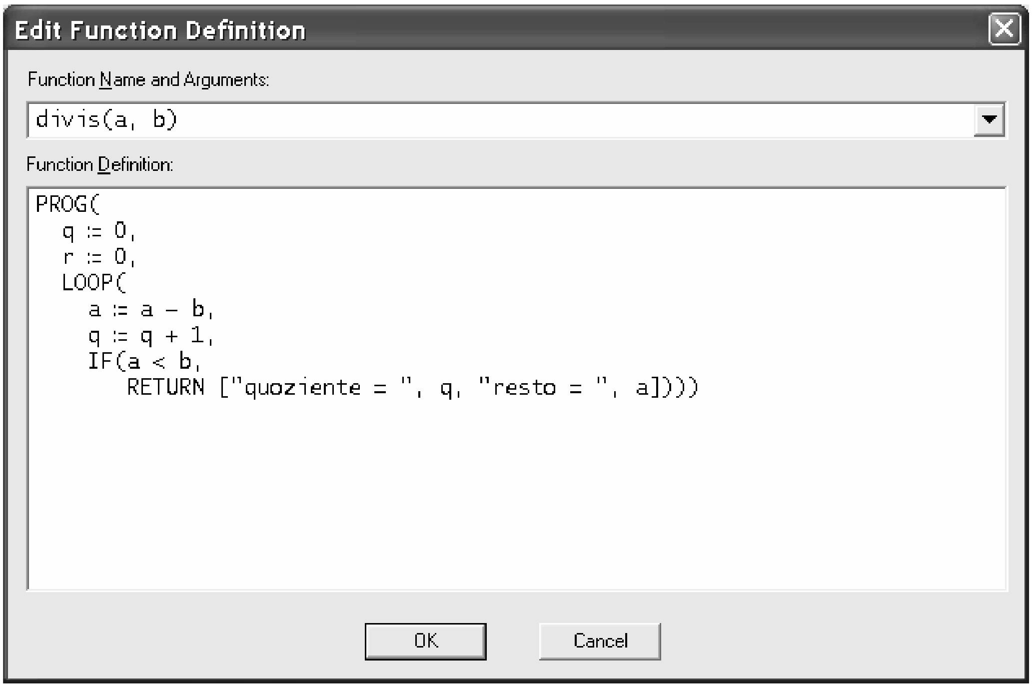
Si tratta di un programma davvero semplice, ma lascio immaginare cosa succedeva con un programma appena più complesso: era praticamente illeggibile.
Ecco invece come agire in *DERIVE* 6:
Digitare `divis(a,b):=` e premere **INVIO**.

La funzione "vuota" appare nella finestra di *Algebra*.

Cliccare sulla funzione con il pulsante destro del mouse e cliccare su Modifica. Si apre una finestra che riporta il nome della funzione e offre un **editor multilinea** che permette di scrivere o modificare a piacimento il programma con l'unico accorgimento di usare ALT-INVIO per andare a capo invece del "solito" INVIO che farebbe chiudere la finestra [7].
Ovviamente la sintassi (con tutte le parentesi) come si vede va rispettata, ma è facile immaginare l'enorme miglioramento nella comodità di scrittura.

---

[6] Dall'Help in linea di Derive.
[7] L'Editor multilinea può essere utilizzato anche per la digitazione di "normali" espressioni, equazioni e sistemi, ma è soprattutto nel contesto di editing di programmi che si rivela particolarmente utile.



Un esempio di grafica per approfondire: le **slider bar**

Le nuove caratteristiche di *DERIVE* 6 permettono, tra l'altro, di realizzare delle animazioni piuttosto semplici ma didatticamente utili:

Digitare la seguente funzione:

```
f(x):= IF(x >= -2 and x <= 4, 1/4*(x^3 - 4·x^2 + x + 6))
```

Si tratta di una cubica, o, meglio, di un arco di cubica, definita nell'intervallo [–2, 4].

Si noti come vengono rappresentati nella finestra di Algebra i simboli "non maggiore", "non minore" e l'operatore logico AND.

Tracciare il grafico della funzione, modificando se necessario la scala.

Tornare all'ambiente di *Algebra* e digitare: `[k,0;k,f(k);0,f(k)]`

Si tratta di una matrice di tre righe e due colonne. I termini di ogni riga sono separati tra loro dalla virgola, con il "punto e virgola" si passa a una nuova riga.

In *DERIVE* esiste anche un comodo editor di matrici (attivabile cliccando su **Crea matrice**,) ma qui, viste le ridotte dimensioni della matrice, abbiamo preferito la scrittura diretta.

Si ottiene così la seguente matrice:

$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ k & f(k) \\ 0 & f(k) \end{bmatrix}.$$

DERIVE interpreta questa matrice come un insiemi di punti nel piano cartesiano: ciascuna riga contiene le coordinate di un punto. Questo insieme di punti può essere rappresentato nel piano [8].

---

[8] Quella della visualizzazione delle matrici a due colonne come insiemi di punti del piano (e quelle a tre colonne come insiemi di punti nello spazio) è una caratteristica molto interessante: si pensi ad esempio al prodotto di tali insiemi di punti per opportune matrici di trasformazione per realizzare trasformazioni geometriche.

Cliccare su **Finestra Grafica 2D** .
Selezionare **Opzioni > Visualizzazione > Punti**.

Si apre una finestra di dialogo.

Nel campo **Collega** selezionare **Sì**, nel campo **Tipo di linea** selezionare **Tratteggiata** e infine nel campo **Dimensioni del punto** selezionare **Grande**; confermare cliccando su **OK**.

Attraverso queste opzioni i punti saranno rappresentati da quadratini sullo schermo per renderli meglio visibili. Inoltre i tre punti le cui coordinate sono riportate nella matrice saranno congiunti tra loro da un segmento tratteggiato.

Selezionare ancora **Opzioni > Sempifica prima di tracciare il grafico**.

Con questa opzione *DERIVE* provvederà direttamente a semplificare, se necessario, l'espressione (ovvero l'equazione) evidenziata prima di tracciarne il grafico. Questa opzione è molto utile, ad esempio, anche quando si vuole tracciare una famiglie di curve generate da una istruzione VECTOR.

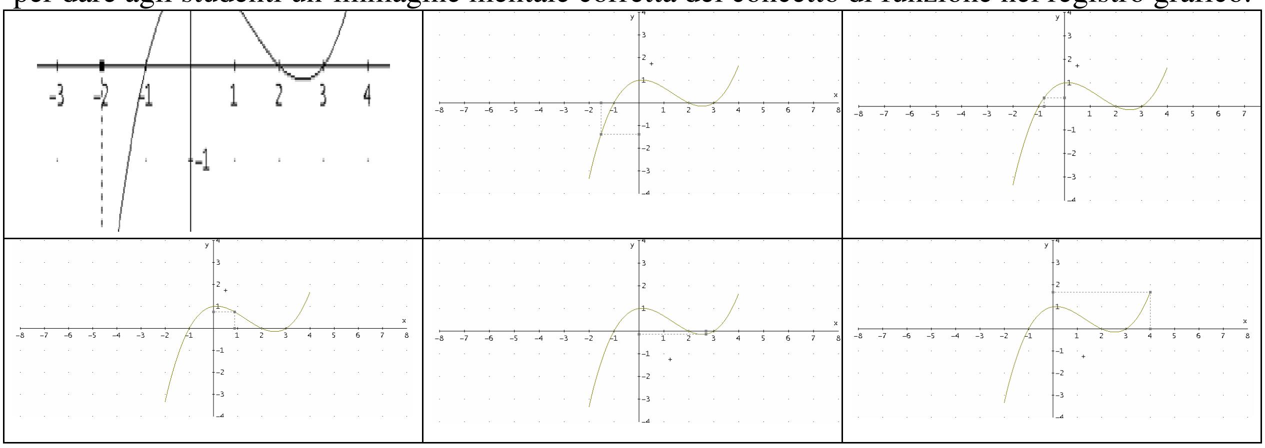
Infine selezionare **Inserisci > Slider Bar**. Nella finestra di dialogo **Proprietà della Slider bar** scrivere `k` nel campo **Nome variabile**, `-2` nel campo **Valore minimo**, `4` nel campo **Valore massimo**, `50` (il massimo consentito) nel campo **Numero di intervalli** e infine cliccare su **Aggiorna dinamicamente il grafico**. Confermare le proprie scelte cliccando su **OK**.

Sullo schermo viene inserita una barra di scorrimento che ha effetto sui valori della variabile indicata (nel nostro caso *k*); agendo sul cursore, a *k* saranno attribuiti valori compresi tra quello minimo e quello massimo qui indicati. A ciascuno di questi valori corrisponde un "fotogramma" della nostra animazione. Il valore indicato nel campo **Numero degli intervalli** stabilisce il numero di tali fotogrammi. Con l'ultima opzione il grafico viene ridisegnato dinamicamente spostando il cursore della *Slider Bar*.

E' possibile inserire nello schermo più *Slider Bar* contemporaneamente.

Tornare all'ambiente di Algebra cliccando su , selezionare la funzione e tracciarne il grafico cliccando su **Finestra grafica 2D** per tornare alla pagine grafica, poi cliccando su **Traccia il Grafico** ; ripetere le stesse azioni dopo aver evidenziato la matrice.
Ora si sposti avanti e indietro il cursore della *Slider Bar* e…. buon divertimento!

Qui di seguito vengono riportati sei "fotogrammi" di questa piccola animazione: muovendo il cursore della *Slider Bar*, si vedrà un punto scorrere lungo l'asse delle ascisse e il punto della sua corrispondente immagine scorrere lungo l'asse delle ordinate.
L'animazione è veramente elementare, ma, forse più di una figura statica, potrebbe essere utile per dare agli studenti un'immagine mentale corretta del concetto di funzione nel registro grafico.

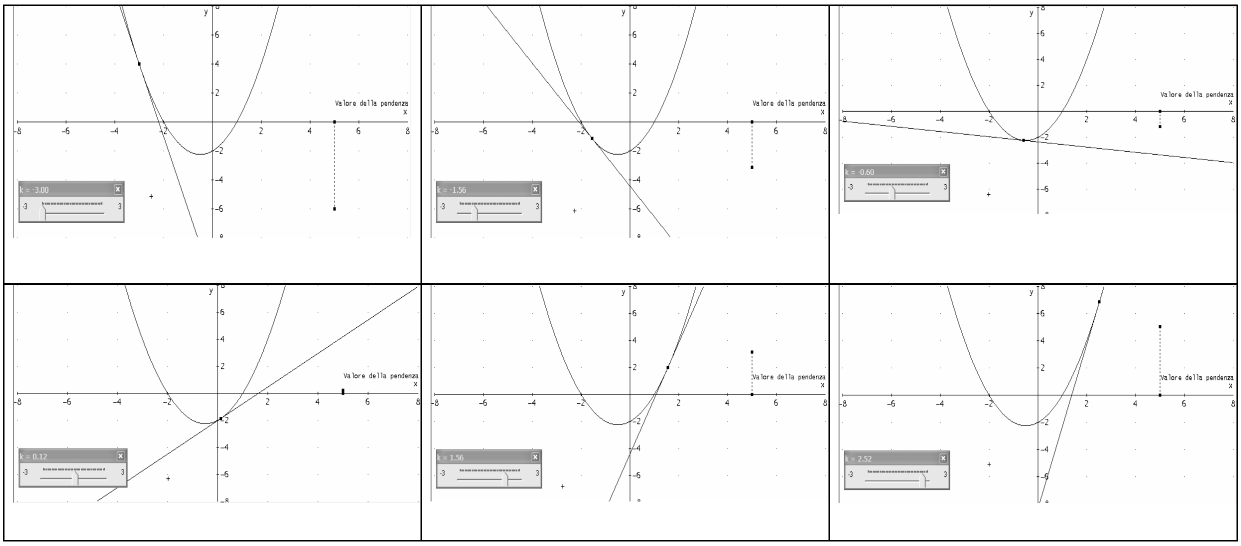


Si pensi alle potenzialità didattiche di questa formidabile innovazione di *DERIVE*, ad esempio per studiare l'influenza dei coefficienti di una conica sul suo grafico, o per studiare una equazione parametrica…

Queste cose potevano essere fatte anche con le vecchie versioni di *DERIVE*, ad esempio generando famiglie di curve con l'istruzione VECTOR, ma vedere una grafico modificarsi dinamicamente sotto i propri occhi è tutta un'altra cosa!

Un ultimo esempio, simile al precedente

Qui di seguito sono riportati sei "fotogrammi" di un'altra animazione che visualizza il punto di tangenza e la retta tangente al grafico di una funzione al variare dell'ascissa del punto di tangenza. Sulla destra di ciascuno schermo compare anche un segmento verticale con l'annotazione "Valore della pendenza". Questo segmento visualizza, per l'appunto, il valore (e il segno) della pendenza del grafico in ciascuno dei punti presi in considerazione.
Si noti la presenza, sulla sinistra in basso dello schermo, della *Slider bar*, cioè della barra che governa, come abbiamo visto in precedenza, l'animazione.



Tutto ciò è realizzato con pochissimi comandi e un opportuno settaggio di *DERIVE*.
Queste sono le quattro "espressioni" che generano le varie parti del grafico:

Definizione della funzione:

#1: $f(X) := X^2 + X - 2$

Equazione della retta tangente attraverso la funzione predefinita

#2: TANGENT(f(X), X, k)

Coordinate del punto mobile lungo il grafico:

#3: [k, f(k)]

Coordinate degli estremi del segmento che visualizza il valore della pendenza.
Il limite è solo un "trucco" per sostituire il valore di k nella derivata.

#4: $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 5 & \lim\limits_{X \to k} \dfrac{d}{dX} f(X) \end{bmatrix}$

Per i comandi da impartire per realizzare l'animazione, si rimanda all'esempio precedente.

Connessione tra DERIVE e le calcolatrici simboliche

Concludiamo accennando molto rapidamente al fatto che la nuova versione di *DERIVE* è collegabile con le calcolatrici simboliche della famiglia Texas Instruments TI-89, TI-92 Plus e TI Voyage 200 (gli autori del loro software sono gli stessi di *DERIVE*).
Per maggiori particolari si rimanda al secondo tra i volumi indicati qui di seguito che contiene, tra l'altro, indicazioni su come effettuare la connessione e un esempio di esercitazione pratica per utilizzare questa nuova possibilità nell'insegnamento-apprendimento.

Qualche indicazione per approfondire

LIBRI

- B. Kutzler e V. Kokol-Voljc, *Introduzione a Derive 5* (manuale allegato al programma), Media Direct, Bassano del Grappa 2001.

- B. Kutzler e V. Kokol-Voljc, *Introduzione a Derive 6* (manuale allegato al programma), Media Direct, Bassano del Grappa 2003.

- B. Kutzler e V. Kokol-Voljc, *InterconneTIvità*. Insegnare matematica con *Derive 6* e Voyage 200, TI-92 PLUS, TI-89, BK Teachware - Media Direct, Bassano del Grappa 2003.

- P. Boieri, *Laboratorio informatico per la Matematica. Derive*, Loescher, Torino 2003.

- G. Accascina, G. Margiotta, G. Olivieri, *Problem Solving e Calcolatore*, Franco Angeli, Milano 2001.

- C. Di Stefano, *Derive*, *matematica in laboratorio*, Ghisetti e Corvi Editori, Milano 2000.

RIVISTE

- The Derive Newsletter - D. User Group. A-3041 Wurmla, D'Lust 1 AUSTRIA

- The International Journal of computer algebra in Maths education
Research Information Ltd, 222 Maylands Avenue, Hemel Hempstead, Herts, HP2 7TD, UK.

SITI INTERNET su *DERIVE*

http://education.ti.com/derive

http://www.campustore.it/derive

http://www.derive-europe.com

LIBRI DI TESTO CON SCHEDE DI LABORATORIO SU *DERIVE*

Quasi tutti i libri di testo di Matematica per la scuola secondaria superiore contengono delle schede di lavoro su *DERIVE.* Accanto a quello di P. Boieri citato sopra, si consiglia il seguente:

-L. Lamberti, L. Mereu, A. Nanni, *Corso di Matematica per i Licei scientifici sperimentali, Volume 1, Tomi A e B*, Etas Libri, Milano 2003.

-L. Lamberti, L. Mereu, A. Nanni, *Corso di Matematica per i Licei scientifici sperimentali, Volume 2, Tomi A e B*, Etas Libri, Milano 2003.

-L. Lamberti, L. Mereu, A. Nanni, Corso di Matematica per i Licei scientifici sperimentali, *Volume 3, Tomi A e B*, Etas Libri, Milano 2003.