

MIUR - Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca
UMI - Unione Matematica Italiana
SIS - Società Italiana di Statistica

Matematica 2001

Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curriculum di Matematica

**Abilità e conoscenze matematiche
per la Scuola Secondaria di primo grado**

PRESENTAZIONE

Nel luglio 2000 il Presidente dell'Unione Matematica Italiana (UMI), prof. Carlo Sbordone, facendo seguito ad una delibera della Commissione Scientifica dell'Unione, ha insediato una Commissione per lo studio e l'elaborazione di un curricolo di matematica per la scuola primaria e secondaria, adeguato ai mutati bisogni della società del nuovo secolo. Iniziative analoghe sono state avviate anche da associazioni di matematici in Europa e nel mondo, che hanno avvertito le stesse esigenze.

La Commissione è coordinata dal Presidente della CIIM (Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica), prof. Ferdinando Arzarello, e costituita da docenti sia universitari sia della scuola. In particolare ne fanno parte i membri dell'attuale CIIM e i suoi passati Presidenti.

La Commissione ha deciso di elaborare un curricolo di matematica definendone le conoscenze fondamentali da acquisire, indipendentemente, per quanto riguarda la scuola secondaria superiore, dalla varietà dei suoi indirizzi e limitatamente ai primi quattro anni (per ora). È emersa perciò l'idea della "matematica per il cittadino", cioè di un corpus di conoscenze e abilità fondamentali, necessarie a tutti coloro che entrano nell'attuale società, da acquisire secondo una scansione organica articolata nei successivi livelli scolastici.

Alla conclusione dei lavori, la Commissione ha deciso di promuovere iniziative volte ad illustrare il significato delle scelte operate all'interno del curricolo. In questa prospettiva ha ritenuto che i messaggi da lanciare al mondo degli insegnanti di matematica sarebbero stati meglio compresi attraverso concrete esemplificazioni.

Perciò un gruppo di 40 esperti (ispettori, docenti universitari, insegnanti di scuola, alcuni dei quali membri della Commissione stessa) ha lavorato durante un seminario residenziale svoltosi a Viareggio, alla produzione di un cospicuo numero di esempi di attività didattiche e di suggerimenti per prove di verifica, coerenti con gli obiettivi del curricolo elaborato.

Tale attività è stata realizzata nell'ambito delle finalità previste da un Protocollo d'Intesa sottoscritto nel 1993 dall'allora Ministero della Pubblica Istruzione e dall'UMI, esteso nel 1999 alla Società Italiana di Statistica, rinnovato nel 2002 dal MIUR. Scopo dell'intesa è una sempre maggiore qualificazione dell'insegnamento della matematica nella scuola italiana.

Gli esempi prodotti costituiscono la seconda parte del volume *Matematica 2001*. I curricoli sono presentati separatamente per la scuola primaria e per la scuola secondaria di primo grado. Essi sono preceduti da una *premessa* comune, che individua le linee guida per l'insegnamento della matematica, e dall'indicazione delle *competenze trasversali e di quelle matematiche* conclusive, che devono essere acquisite al termine del primo ciclo di scuola. L'esposizione dei curricoli proposti è completata da documenti esprimono il punto di vista della Commissione UMI su vari aspetti, quali *l'approccio didattico*, i *contesti di apprendimento*, la *discussione matematica in classe*, la *valutazione*, il *ruolo delle tecnologie*.

La seconda parte presenta gli esempi di attività didattica e di elementi di verifica organizzandoli verticalmente in relazione ai vari nuclei previsti nei curricoli. I docenti dei due livelli considerati hanno infatti lavorato congiuntamente ai diversi filoni per quella continuità ed osmosi tra i vari gradi di scuola, che deve caratterizzare un buon insegnamento. In ogni esempio è comunque indicato il livello scolare più appropriato cui esso si riferisce.

FERDINANDO ARZARELLO, UMI-CIIM
LUCIA CIARRAPICO, MIUR

Competenze trasversali

Collocare nel tempo e nello spazio

Avere consapevolezza della dimensione storica e della collocazione spaziale di eventi considerati.

Comunicare

Individuare forme e strumenti di espressione orale, scritta, grafica o iconica per trasmettere un messaggio.

Cogliere i significati di un messaggio ricevuto

Costruire ragionamenti

Organizzare il proprio pensiero in modo logico e consequenziale.

Esplicitare il proprio pensiero attraverso esemplificazioni, argomentazioni e dimostrazioni

Formulare ipotesi e congetture

Intuire gli sviluppi di processi analizzati e di azioni intraprese

Generalizzare

Individuare regolarità e proprietà in contesti diversi.

Astrarre caratteristiche generali e trasferirle in contesti nuovi

Inventare

Costruire 'oggetti' anche simbolici rispondenti a determinate proprietà.

Porre in relazione

Stabilire legami tra fatti, dati, termini.

Porre problemi e progettare possibili soluzioni

Riconoscere situazioni problematiche.

Stabilire le strategie e le risorse necessarie per la loro soluzione.

Rappresentare

Scegliere forme di presentazione simbolica per rendere evidenti relazioni esistenti tra fatti, dati, termini.

Utilizzare forme diverse di rappresentazione, acquisendo capacità di passaggio dall'una all'altra.

Competenze matematiche al termine del primo ciclo (scuola primaria e secondaria di primo grado)

Il numero

In situazioni varie, significative e problematiche, relative alla vita di tutti i giorni, alla matematica e agli altri ambiti disciplinari:

- comprendere il significato dei numeri, i modi per rappresentarli e il significato della notazione posizionale
- comprendere il significato delle operazioni
- operare tra numeri in modo consapevole, sia mentalmente, sia per iscritto, sia con strumenti
- usare il ragionamento aritmetico e la modellizzazione numerica per risolvere problemi tratti dal mondo reale o interni alla matematica

Lo spazio e le figure

In contesti diversi di indagine e di osservazione:

- esplorare, descrivere e rappresentare lo spazio
- riconoscere e descrivere le principali figure piane e solide
- utilizzare le trasformazioni geometriche per operare su figure
- determinare misure di grandezze geometriche
- usare la visualizzazione, il ragionamento spaziale e la modellizzazione geometrica per risolvere problemi del mondo reale o interni alla matematica

Le relazioni

In vari contesti matematici e sperimentali:

- individuare relazioni tra elementi e rappresentarle
- classificare e ordinare in base a determinate proprietà
- utilizzare lettere e formule per generalizzare o per astrarre
- riconoscere, utilizzare semplici funzioni e rappresentarle
- utilizzare variabili, funzioni, equazioni, per risolvere problemi

I dati e le previsioni

In situazioni varie, relative alla vita di tutti i giorni e agli altri ambiti disciplinari:

- organizzare una ricerca
- reperire, organizzare e rappresentare dati
- effettuare valutazioni di probabilità di eventi
- risolvere semplici situazioni problematiche che riguardano eventi
- sviluppare e valutare inferenze, previsioni ed argomentazioni, basate su dati

Argomentare e congetturare

In contesti diversi, sperimentali, linguistici e matematici:

- osservare, individuare e descrivere regolarità
- produrre congetture, testarle, validare le congetture prodotte
- riconoscere proprietà che caratterizzano oggetti matematici e l'importanza delle definizioni che le descrivono
- giustificare affermazioni con semplici concatenazioni di proposizioni

Misurare

In contesti interni ed esterni alla matematica, con particolare riferimento alle scienze sperimentali:

- misurare grandezze
- leggere, scrivere e rappresentare misure
- stimare misure
- risolvere problemi e modellizzare fatti e fenomeni partendo da dati di misura

Risolvere e porsi problemi

In diversi contesti sperimentali, linguistici e matematici, in situazioni varie, relative a campi di esperienza scolastici e non:

- riconoscere e rappresentare situazioni problematiche
- impostare, discutere e comunicare strategie di risoluzione
- risolvere problemi posti da altri
- porsi e risolvere problemi

Abilità e conoscenze matematiche

SCUOLA SECONDARIA DI PRIMO GRADO

Le competenze individuate nei diversi nuclei tematici e di processo, spesso sono competenze che si possono ripetere, pur indicando nelle diverse fasce di età, diversi livelli di operatività. D'altro lato, alcune competenze acquisite nella scuola primaria sono da considerarsi punto di partenza per acquisizioni successive.

Il curriculum di matematica proposto è da intendersi, in un'ottica di verticalità, come un percorso continuo e progressivo. Pertanto sarà cura dell'insegnante della scuola secondaria di primo grado accertare l'acquisizione delle competenze elencate per gli anni della scuola primaria e continuare a lavorare per il loro consolidamento.

Il numero

1^a e 2^a classe

Abilità	Conoscenze
<ul style="list-style-type: none">• Eseguire le quattro operazioni con i numeri interi• Elevare a potenza numeri naturali e interi; comprendere il significato di elevamento a potenza e le proprietà di tale operazione• Scomporre in fattori primi un numero naturale, anche con l'ausilio della calcolatrice• Determinare multipli e divisori di un numero naturale e multipli e divisori comuni a più numeri• Leggere e scrivere numeri naturali e decimali finiti in base dieci usando la notazione polinomiale e quella scientifica• Comprendere i significati delle frazioni come rapporto e come quoziente di numeri interi• Riconoscere frazioni equivalenti; comprendere il significato dei numeri razionali• Riconoscere e usare scritture diverse per lo stesso numero razionale (decimale, frazionaria, percentuale ove possibile)• Confrontare numeri razionali relativi rappresentandoli sulla retta• Eseguire semplici calcoli con numeri razionali relativi usando metodi e strumenti diversi (calcolo mentale, carta e matita, calcolatrici)• Comprendere il significato di radice quadrata, come operazione inversa dell'elevamento al quadrato• Risolvere problemi e modellizzare situazioni in campi di esperienza diversi	<ul style="list-style-type: none">• Operazioni con i numeri interi• Potenze di numeri naturali e interi• Numeri primi• Massimo comune divisore e minimo comune multiplo• Rapporti, percentuali e proporzioni• Numeri decimali limitati e illimitati periodici• Numeri razionali• Operazioni tra numeri razionali

3^a classe

Abilità	Conoscenze
<ul style="list-style-type: none">• Effettuare semplici sequenze di calcoli• Effettuare semplici calcoli approssimati• Rappresentare con lettere le principali proprietà delle operazioni	<ul style="list-style-type: none">• Numeri decimali non periodici• Calcolo approssimato ed errore• Proprietà delle operazioni

Aspetti storici connessi:

Un sistema di scrittura semiposizionale: la notazione sessagesimale babilonese

Nota

Nel corso dei tre anni, gli insegnanti decideranno il momento più opportuno per introdurre le varie operazioni fra numeri interi e quelle fra numeri razionali.

Si consiglia inoltre di evitare il calcolo di lunghe e complesse espressioni numeriche, facendo presente in ogni caso che non è previsto il calcolo con lettere, se non per quanto riguarda la risoluzione di equazioni numeriche.

Lo spazio e le figure

1^a e 2^a classe

Abilità	Conoscenze
<ul style="list-style-type: none">• Conoscere le proprietà delle figure piane e solide• Usare il metodo delle coordinate in situazioni problematiche concrete• Risolvere problemi usando proprietà geometriche delle figure piane anche ricorrendo a modelli materiali e a opportuni strumenti (riga, squadra, compasso, software di geometria dinamica, ...)• Riconoscere figure uguali e descrivere le isometrie necessarie per portarle a coincidere• Riconoscere grandezze proporzionali e figure simili in vari contesti• Riprodurre in scala• Calcolare perimetri e aree delle principali figure piane	<ul style="list-style-type: none">• Figure piane e solide• Il piano cartesiano• Rapporto tra grandezze• Somma degli angoli di un triangolo e di un poligono• Teorema di Pitagora• Alcuni numeri irrazionali ($\sqrt{2}, \sqrt{3}$)• Traslazioni, rotazioni, simmetrie• Omotetie, similitudini

3^a classe

Abilità	Conoscenze
<ul style="list-style-type: none">• Visualizzare oggetti tridimensionali a partire da una rappresentazione bidimensionale e, viceversa, rappresentare su un piano una figura solida• Risolvere problemi usando proprietà geometriche delle figure solide anche ricorrendo a modelli materiali e a opportuni strumenti (riga, squadra, compasso, software di geometria dinamica, ...)• Calcolare aree e volumi delle principali figure solide• Calcolare lunghezze di circonferenze e aree di cerchi	<ul style="list-style-type: none">• Figure solide• Rappresentazione piana di figure solide• Lunghezza della circonferenza e area del cerchio; il numero π• Aree e volumi dei principali solidi

Aspetti storici connessi:

La misura del raggio della Terra col metodo di Eratostene
Valori approssimati di π nella geometria antica.

Nota

Si limiterà la memorizzazione di formule abituando i ragazzi a ricavare formule inverse.

Le relazioni

1^a e 2^a classe

Abilità	Conoscenze
<ul style="list-style-type: none">• In contesti vari individuare, descrivere e costruire relazioni significative: riconoscere analogie e differenze• Eseguire combinazioni diverse tra gli elementi di un insieme• Utilizzare le lettere per esprimere in forma generale semplici proprietà e regolarità (numeriche, geometriche, fisiche, ...)• Costruire, leggere, interpretare e trasformare formule• Usare tabelle per rappresentare relazioni• Riconoscere in fatti e fenomeni relazioni tra grandezze	<ul style="list-style-type: none">• Alcune relazioni significative (essere uguale a, essere multiplo di, essere maggiore di, essere parallelo o perpendicolare a, ...)• Semplici questioni di tipo combinatorio• Grandezze direttamente e inversamente proporzionali

3^a classe

Abilità	Conoscenze
<ul style="list-style-type: none">• Usare coordinate cartesiane e diagrammi per rappresentare relazioni e funzioni• Risolvere problemi utilizzando equazioni e disequazioni numeriche di primo grado• Usare modelli dati o costruire semplici modelli per descrivere fenomeni ed effettuare previsioni	<ul style="list-style-type: none">• Funzioni: tabulazioni e grafici• Funzioni del tipo $y=ax$, $y=a/x$, $y=ax^2$ e loro rappresentazione grafica• Equazioni e disequazioni di primo grado• Semplici modelli di fatti sperimentali e di leggi matematiche

I dati e le previsioni

1^a e 2^a classe

Abilità	Conoscenze
<ul style="list-style-type: none">• Classificare dati ottenuti da misurazioni• Rappresentare dati, anche utilizzando un foglio elettronico, ed interpretarli• Usare ed interpretare misure di centralità e dispersione• Confrontare due distribuzioni rispetto allo stesso carattere	<ul style="list-style-type: none">• Caratteri derivanti da misurazioni• Classificazione di dati con intervalli di ampiezza uguale o diversa• Istogramma di frequenze• Campo di variazione• Calcolo di frequenze relative e percentuali e loro confronti

3^a classe

Abilità	Conoscenze
<ul style="list-style-type: none">• Scegliere, in modo casuale, un elemento da un collettivo• Interpretare in termini probabilistici i risultati relativi a prove multiple di eventi in contesti reali e virtuali (giochi, software, ...)• Riconoscere eventi complementari, eventi incompatibili, eventi indipendenti, eventi esaustivi• Prevedere, in semplici contesti, i possibili risultati di un esperimento e le loro probabilità	<ul style="list-style-type: none">• Campione estratto da una popolazione: esempi di campioni casuali e non casuali• Probabilità di un evento; valutazione della probabilità di semplici eventi• Media aritmetica e valore atteso

Aspetti storici connessi:

Questioni probabilistiche nel passato (ad esempio, i primi giochi con i dadi nella Francia del 1600).

Argomentare e congetturare

1^a e 2^a classe

Abilità

- Descrivere proprietà di figure con termini appropriati
- Individuare regolarità in fenomeni osservati
- Produrre congetture
- Verificare le congetture prodotte testandole su casi particolari
- Dare definizioni di semplici oggetti matematici (esempio rettangolo, numero pari, ...)

3^a classe

Abilità

- Validare le congetture prodotte, sia empiricamente, sia mediante argomentazioni, sia ricorrendo a eventuali controesempi
- Comprendere il ruolo della definizione in matematica
- Giustificare affermazioni durante una discussione matematica anche con semplici ragionamenti concatenati

Misurare

1^a e 2^a classe

Abilità

- Analizzare oggetti e fenomeni, scegliendo le grandezze da misurare e gli strumenti di misura, anche tecnologici
- Esprimere le misure in unità di misura del Sistema Internazionale, utilizzando anche le potenze del 10 e le cifre significative
- Effettuare e stimare misure in modo diretto e indiretto
- Leggere e scrivere misure in notazione scientifica

3^a classe

Abilità

- | |
|--|
| <ul style="list-style-type: none">• Esprimere e interpretare i risultati di misure, con particolare riferimento agli ordini di grandezza, alla significatività delle cifre e agli errori• Rappresentare graficamente misure di grandezze per individuare regolarità, andamenti, relazioni• Risolvere situazioni problematiche a partire da dati di misure con la costruzione di semplici modelli |
|--|

Risolvere e porsi problemi

A ogni livello scolastico il risolvere problemi offre occasioni importanti agli allievi per costruire nuovi concetti e abilità, per arricchire di significati concetti già appresi e per verificare l'operatività degli apprendimenti realizzati in precedenza. Affinché il porre e risolvere problemi sia effettivamente utile a mobilitare risorse intellettuali anche al di fuori delle competenze strettamente matematiche, contribuendo in tal modo alla formazione generale degli allievi, è necessario che quelli proposti siano autentici problemi per gli allievi e non semplici esercizi a carattere ripetitivo.

Le competenze degli allievi, soprattutto per quanto riguarda i problemi, difficilmente possono essere conseguiti in tempi medio-brevi. Per tale motivo, tutti gli obiettivi elencati per la scuola primaria sono presenti anche nella scuola secondaria I grado. Ovviamente, cambiano la natura e la complessità dei problemi.

1^a e 2^a classe

Abilità

- | |
|---|
| <ul style="list-style-type: none">• Riconoscere il carattere problematico di un lavoro assegnato, individuando l'obiettivo da raggiungere, sia nel caso di problemi proposti dall'insegnante attraverso un testo, sia nel vivo di una situazione problematica in cui occorre porsi con chiarezza il problema da risolvere• Rappresentare in modi diversi (verbali, iconici, simbolici) la situazione problematica, al fine di creare un ambiente di lavoro favorevole per la risoluzione del problema• Individuare le risorse necessarie per raggiungere l'obiettivo, selezionando i dati forniti dal testo, le informazioni ricavabili dal contesto e gli strumenti che possono risultare utili alla risoluzione del problema• Individuare in un problema eventuali dati mancanti, sovrabbondanti o contraddittori• Esporre con chiarezza il procedimento risolutivo seguito e confrontarlo con altri eventuali procedimenti |
|---|

Abilità

- | |
|--|
| <ul style="list-style-type: none">• Collegare le risorse all'obiettivo da raggiungere, scegliendo opportunamente le azioni da compiere (operazioni aritmetiche, costruzioni geometriche, grafici, opportune formalizzazioni, equazioni,...), concatenandole in modo efficace al fine di produrre una risoluzione del problema• Prestare attenzione al processo risolutivo, con riferimento alla situazione problematica, all'obiettivo da raggiungere, alla compatibilità delle soluzioni trovate e valutare i procedimenti esaminati con riferimento alla economia di pensiero, alla semplicità di calcolo, e alla possibilità di applicarli in altre situazioni• Realizzare formalizzazioni e possibili generalizzazioni di un procedimento risolutivo seguito, ad es. passando dal problema considerato ad una classe di problemi |
|--|

Indicazioni didattiche

Nella scuola primaria e secondaria di primo grado la costruzione di competenze matematiche va perseguita in contesti culturalmente ricchi e motivanti, che permettano agli allievi esperienze cognitive significative e consonanti con quelle condotte in altri ambiti: scientifici, linguistici, motori, figurativi, ecc.

All'inizio della scuola primaria il bambino ha già fatto una serie di esperienze di carattere matematico – nella scuola dell'infanzia, in contesti di gioco e di vita familiare e sociale – e ha già consolidato alcune fondamentali competenze logico-matematiche. Più precisamente, verso i sei anni egli ha maturato esperienze significative relativamente alle seguenti competenze: contare oggetti e valutarne la quantità sul piano concreto; eseguire semplici operazioni sempre sul piano concreto; confrontare, ordinare, classificare, porre in relazione oggetti in rapporto a diverse proprietà (estensione, lunghezza, altezza, forma, colore,...), ricorrendo a modi più o meno sistematici; usare simboli; risolvere semplici problemi tratti dalla vita quotidiana e di interesse immediato; orientarsi nello spazio (sopra/sotto, avanti/indietro,...) e nel tempo (prima/dopo); localizzare persone e oggetti nello spazio; rappresentare percorsi ed eseguirli anche dietro semplici indicazioni verbali. Infine, il bambino comincia a formulare semplici ipotesi in ordine a fatti di vita quotidiana.

Occorre comunque avere ben presente che il percorso per il raggiungimento dei concetti matematici e della loro formalizzazione non è lineare, ma passa necessariamente per momenti cruciali che costituiscono salti cognitivi in quanto affrontano concetti che possono costituire ostacoli per l'apprendimento o essere fonte di fraintendimenti e misconcetti. Un tipico esempio è l'introduzione dei decimali o delle frazioni. Ad esempio, nell'introdurre le moltiplicazioni con i numeri decimali gli allievi si scontrano con l'ostacolo, indotto dal modello dei naturali, che non sempre il prodotto fra due numeri decimali è maggiore dei due fattori. Analogamente, nel confronto fra numeri decimali, è bene evidenziare, per esempio, che 0,45 è minore di 0,6 (e non viceversa come alcuni allievi credono basandosi sul fatto che 6 è minore di 45). Anche per le frazioni il modello dei naturali può essere fonte di ostacoli; occorrono interventi didattici opportuni per superarli. Ad esempio, si sconsiglia di introdurre la procedura di addizione di due numeri razionali rappresentati sotto forma di frazione che fa uso della scomposizione in fattori dei denominatori: è invece opportuno insistere sul concetto di frazioni equivalenti, e far notare che, per addizionare due numeri razionali rappresentati sotto forma di frazioni, è sufficiente trasformare le due frazioni date in frazioni equivalenti, ma aventi lo stesso denominatore.

In tutti questi casi, è comunque fondamentale l'attivazione di esplorazioni cognitivamente ricche in contesti significativi per l'allievo, in sinergia con esperienze parallele condotte nei vari ambiti disciplinari; in tali attività sarà essenziale la mediazione del linguaggio naturale, sia parlato che scritto. La trasposizione didattica della matematica va infatti effettuata dall'insegnante nel concreto della sua classe, tenendo conto che la matematica deve essere strutturata opportunamente in *campi di problemi*, che hanno uno statuto sia epistemologico sia cognitivo. Ad esempio, i problemi moltiplicativi, da un lato fanno riferimento a un complesso di situazioni concrete, in cui gli allievi compiono esperienze cognitive varie; dall'altro, corrispondono a concetti matematicamente rilevanti che gli allievi costruiscono imparando a sintetizzare quanto esperito con il linguaggio aritmetico. Gli aspetti ludici possono parimenti favorire situazioni di apprendimento significative per gli allievi e contribuire all'immagine di una matematica dal volto umano.

L'esperienza e la verbalizzazione col linguaggio naturale dovranno necessariamente precedere la formalizzazione e la riflessione sui sistemi di notazione simbolica propri della matematica. Per esempio, prima di imparare a formalizzare una strategia risolutiva per mezzo dei segni dell'aritmetica, i bambini dovranno esplorare e operare in contesti in cui attuare attività di quantificazione, utilizzando strumenti e sistemi di rappresentazione che sono caratteristici del campo stesso (il calendario lineare per risolvere problemi legati al tempo; monete o loro

rappresentazioni per risolvere problemi di compravendita di beni, ...). Analogamente, per le conoscenze legate allo spazio e alle figure sarà essenziale l'esplorazione dinamica in contesti vari, supportata eventualmente da opportuni software di geometria dinamica, e l'uso del linguaggio naturale su cui fondare la transizione dalle esperienze alle notazioni matematiche. In alcuni contesti, l'introduzione del linguaggio simbolico potrà anche precedere l'attività di verbalizzazione, purché essa sia funzionale alla possibilità di provocare negli alunni processi interpretativi fruttuosi in relazione alle problematiche del contesto. In entrambi i casi l'acquisizione di un linguaggio rigoroso deve essere un obiettivo da conquistare nel lungo periodo col supporto dell'insegnante, a partire dalle concrete produzioni verbali degli allievi, messe a confronto e opportunamente discusse nella classe.

E' quindi necessario che l'insegnante progetti e realizzi ambienti di apprendimento adeguati: in tali ambienti saranno privilegiate l'attività di soluzione e di costruzione di problemi, nonché quella di matematizzazione e di modellizzazione. A questo proposito è opportuno distinguere tra esercizi, problemi, situazioni da modellizzare. I primi richiedono solo l'applicazione di regole e procedure note e codificate; nei problemi la scelta delle strategie risolutive è lasciata al solutore ed esige un pizzico di fantasia e di inventiva; nella situazione da modellizzare non è nemmeno esplicitata la formulazione delle domande per le quali si intenderebbe cercare una risposta (si parla in questo caso anche di problema aperto). La distinzione è naturalmente relativa al bagaglio di conoscenze degli allievi: ciò che è problema a una data età può diventare esercizio in età successiva. Proporre problemi e situazioni da modellizzare è un'attività indispensabile fin dai primi anni di scolarità; naturalmente si dovranno alternare momenti di posizione e di risoluzione di problemi con fasi di sistemazione e consolidamento delle conoscenze, dove anche gli esercizi hanno un ruolo importante per l'acquisizione e il consolidamento dei principali automatismi di calcolo e di ragionamento. E' comunque cruciale che l'insegnante utilizzi problemi e situazioni da modellizzare al fine di mobilitare le risorse intellettuali degli allievi, anche al di fuori delle competenze strettamente matematiche, contribuendo in tal modo alla loro formazione generale.

Grande importanza come mediatori nei processi di acquisizione di conoscenza e nel supporto alla comprensione del nesso tra idee matematiche e cultura, assumono i contesti ludici e gli strumenti, dai più semplici, come i materiali manipolabili (ad es., il compasso o il righello), fino agli strumenti tecnologici più complessi (tipicamente il computer o le calcolatrici numeriche e simboliche, ma anche le 'macchine', nel senso più ampio del termine, dagli orologi al distributore di bibite, ecc.). Varie ricerche suggeriscono l'importanza di software che, nella loro interfaccia, rendono disponibili oggetti computazionali con i quali l'alunno può interagire per esplorare un dominio di conoscenza matematico o la matematica che caratterizza un campo di conoscenza extramatematico.

Il conseguimento delle competenze e conoscenze sopra elencate richiede tempo e partecipazione attiva degli allievi al progetto formativo. I ritmi dell'azione di insegnamento-apprendimento devono essere adeguati alle reali esigenze degli allievi e non possono essere dettati da progetti didattici caratterizzati da un'eccessiva segmentazione dei contenuti o da moduli che presuppongano improbabili percorsi quasi indipendenti fra loro. In altri termini, la progettazione dell'insegnante va condotta secondo una logica di una didattica lunga, attenta a garantire agli allievi possibilità di costruzioni di significato per gli oggetti di insegnamento-apprendimento.

Contesti di apprendimento

La progettazione dell'insegnante va condotta secondo la logica di una didattica lunga, attenta a garantire agli allievi possibilità di costruzioni di significato per gli oggetti di insegnamento-apprendimento. Una cura particolare va quindi posta alla scelta dei contesti in cui situare l'attività di esplorazione, di costruzione e di soluzione di problemi, di produzione di congetture ecc. La ricerca didattica in Italia e all'estero ha identificato e analizzato potenzialità e limiti di alcuni contesti (o campi di esperienza) presi da settori esterni alla matematica in cui esercitare l'attività di matematizzazione e di modellizzazione (relativi, ad esempio, a fenomeni naturali o sociali o a prodotti della tecnologia) o da settori interni alla disciplina (relativi, ad esempio, ai numeri o alle figure). E' opportuno che il curriculum contenga casi dei vari tipi con rimandi espliciti, per sottolineare in modo dialettico la doppia natura dei concetti e dei processi tipici della matematica, come strumenti di modellizzazione e come oggetti di riflessione.

Vi sono contesti che fanno riferimento ad esperienze extrascolastiche già fortemente matematizzate nella vita di tutti i giorni. Tra questi possiamo citare:

- a) gli scambi economici: attività imitative legate al banco della compravendita e attività reali di esplorazione di un supermercato finalizzate alla realizzazione di un certo progetto (ad esempio la festa della scuola), con competenze relative all'uso del sistema monetario, al confronto di prezzi, pesi e ingredienti di prodotti e all'interpretazione di testi di uso comune (le campagne pubblicitarie, gli scontrini);
- b) la temporalità esterna: riconoscimento dei periodi della giornata, dei giorni della settimana, dei mesi, delle stagioni e l'uso consapevole di strumenti di misura del tempo quali orologi e calendari;
- c) la rappresentazione dello spazio: mappe, disegni che creano illusioni, schemi di collegamento;
- d) le ricette di cucina: esecuzione guidata e quantificazione degli ingredienti necessari alla realizzazione, con competenze legate alla misura (pesi, volumi) e alla risoluzione di problemi di proporzionalità;
- e) i giochi tradizionali (gioco dell'oca, settimana o campana, girotondi,...) con competenze relative ai numeri e allo spazio.
- f) le 'macchine': ingranaggi, meccanismi, arnesi del bricolage, e oggetti dinamici della vita di tutti i giorni, che includono anche un controllo digitale, con competenze relative all'ordine in cui si verificano certi eventi (es. il distributore di bevande; il lettore dei biglietti dell'autobus), alla forma, collegata alla funzione (es. la bilancia a due piatti, le pinze, il cavatappi, il frullatore a mano, la centrifuga scola-insalata, la bicicletta), a relazioni tra numeri (i numeri di giri nel cambio della bicicletta, le composizioni di pesi nella bilancia a due piatti).

In questi casi la modellizzazione matematica svolta a scuola si pone in continuità con l'esperienza extrascolastica. L'insegnante guida la transizione da pratiche quotidiane che si svolgono prevalentemente per imitazione e con il ricorso (al più) ad una verbalizzazione orale (come, ad esempio, nel caso degli scambi economici) a pratiche di rappresentazione scritta che consentano la soluzione di problemi anche solo evocati e lo sviluppo di modi di soluzione (es. calcolo algebrico).

In altri casi, invece, le attività in contesti esterni alla matematica conducono a modellizzazioni che si oppongono a concezioni diffuse. Possiamo citare ad esempio i contesti relativi a:

- a) le ombre solari, fino alla modellizzazione dell'ombra come sezione di un 'cilindro' d'ombra costituito da raggi paralleli: le ombre dei corpi umani non conservano le proporzioni;
- b) la genetica, fino allo studio dei caratteri ereditari;
- c) le estrazioni nel lotto o altre lotterie.

Ad esempio, per i caratteri ereditari si ottengono risultati che vanno contro certe visioni fatalistiche delle malattie genetiche; per le lotterie si sfidano i preconcetti relativi ai ritardi nelle

estrazioni. In questi casi, il ruolo dell'insegnante è molto più delicato in quanto deve essere portatore di un atteggiamento positivo nei confronti della scienza e della razionalità.

Vi sono infine contesti interni alla matematica, che, per la scuola primaria e secondaria di primo grado, comprendono i numeri e le operazioni, le figure e le loro trasformazioni, il piano cartesiano, i micromondi dei software di geometria dinamica. Anche se l'approccio è inizialmente sviluppato a partire da una molteplicità di esperienze e problemi extramatematici, molto presto, già dalla prima classe, gli oggetti introdotti (numeri, operazioni, figure, trasformazioni, ecc.) divengono essi stessi oggetto di riflessione e di studio. Ad esempio, si può riflettere sulla scrittura dei numeri adottata nella vita quotidiana, ricostruendo le regole della notazione posizionale; si possono cercare numeri o costruire figure che soddisfano a condizioni date.

Sarà utile, nei vari contesti (e soprattutto in quelli interni alla matematica, dove è particolarmente importante recuperare il significato della disciplina) introdurre gradualmente la dimensione storica.

La discussione matematica in classe

Una discussione matematica è una polifonia di voci articolate su un oggetto matematico (concetto, problema, procedura, ecc.), che costituisce un motivo dell'attività di insegnamento-apprendimento.

La metafora usata per descrivere la discussione matematica ha lo scopo di sottolineare alcuni aspetti importanti di questa attività:

- Esiste un tema che ne definisce l'obiettivo
- Esiste l'interazione tra voci (polifonia)
- Esiste un riferimento esplicito all'attività di insegnamento/apprendimento (processo di lungo termine)
- Si richiede la presenza di voci diverse tra cui, essenziale, quella dell'insegnante
- Si valorizza la presenza di voci imitanti (diversi tipi di imitazione nel contrappunto)
- Si prescinde dall'esistenza fisica di una comunità di parlanti (discussione con un interlocutore non fisicamente presente, ma rappresentato da un testo scritto).

La discussione matematica dell'intera classe orchestrata dall'insegnante garantisce, con la presenza di quest'ultima, la possibilità dell'articolazione di voci diverse da quelle degli allievi. L'insegnante ha un ruolo di guida nel senso che:

- Inserisce una particolare discussione nel flusso dell'attività della classe
- Influenza la discussione in modo determinante, inserendosi con interventi mirati nel suo grande sviluppo.

Si possono individuare per la scuola primaria e secondaria di primo grado tre grandi tipologie di discussione (con sottotipi):

A. Discussione di un problema, vista come parte dell'attività complessiva di problem solving, nei due aspetti di:

A1. Discussione di soluzione, intesa come quel processo di tutta la classe che risolve un problema dato a parole con l'eventuale supporto di immagini o oggetti.

A2. Discussione di bilancio, intesa come il processo di informazione, analisi e valutazione delle soluzioni individuali proposte ad un problema dato a parole, con l'eventuale supporto di oggetti o immagini, o nel corso di una discussione orchestrata dall'insegnante.

B. Discussione di concettualizzazione, intesa come il processo di costruzione attraverso il linguaggio e collegamenti tra esperienze già vissute e termini particolari della matematica. Essa può essere introdotta da domande dirette (che cosa è un numero, che cos'è un grafico) o indirette (perché molti di voi hanno descritto questo problema come un problema di disegno geometrico?).

C. Meta-discussione, intesa come momento della definizione dei valori e degli atteggiamenti nei confronti del sapere matematico. Essa può essere introdotta da domande del tipo: "come nascono le figure?", "perché è importante generalizzare in matematica?".

In una prima approssimazione, possiamo riconoscere la discussione matematica nella parte verbale dell'attività di insegnamento/apprendimento nelle lezioni di matematica, così come questa può essere riprodotta da un registratore. E' ovvio che questa parte verbale non esaurisce l'attività in quanto non tiene conto degli aspetti gestuali, grafici, ecc., tuttavia ci offre una prospettiva rilevante sui processi che si svolgono nella classe, per la tradizionale importanza che il linguaggio riveste nell'ambiente scolastico. Dopo aver svolto in classe la discussione, con il registratore e l'annotazione diretta di particolari significativi non ricostruibili dalla sola voce, si affronta il lavoro della sbobinatura. Solo sul protocollo trascritto sarà possibile compiere gli andirivieni che consentono l'analisi accurata della discussione. L'insegnante ricostruisce il legame tra la particolare discussione e i motivi dell'attività; ricostruisce la costellazione di intenzioni che ritiene aver guidato i suoi interventi; suddivide la discussione in episodi; analizza la rete di connessioni tra gli episodi; analizza la corrispondenza tra le intenzioni, le strategie

messe in opera e il processo di interazione con riferimento al ruolo dell'insegnante; analizza poi il percorso di ogni singolo allievo nella discussione, cercando gli indicatori dell'appropriazione dei motivi individuati. La lettura critica con interpretazione, di voci esterne alla classe, come ad esempio le fonti storiche, non deve avere caratteristiche monologiche, che potrebbero generare al più adesioni passive, ma è necessario che il testo sia interpretabile e interpretato, con riferimento all'esperienza già svolta dagli allievi.

Volutamente, in questo scritto, non sono citate particolari e possibili tipi di discussione, ad esempio non si parla di dimostrazioni. I motivi possono essere vari: la nostra scelta si è orientata sulla scuola primaria e secondaria di primo grado; la trattazione della dimostrazione in discussione è molto delicata, per le differenze tra argomentare e dimostrare, tra efficacia e rigore. Per tali motivi, il problema rimane quindi aperto.

Le nuove tecnologie nelle attività di insegnamento-apprendimento della matematica

Vi sono due aspetti legati all'uso delle nuove tecnologie che sono importanti per la prospettiva didattica: il primo riguarda l'alfabetizzazione informatica, ossia la possibilità di offrire agli studenti le conoscenze e le competenze che l'attuale società esige nell'uso delle nuove tecnologie; il secondo riguarda il ruolo che esse possono assumere nel favorire il conseguimento di obiettivi di insegnamento-apprendimento disciplinari.

Focalizzeremo qui l'attenzione sul ruolo che le tecnologie possono assumere per favorire il conseguimento di obiettivi di insegnamento-apprendimento di importanza strategica in campo matematico. Nel fare ciò evidenzieremo anche il contributo che questa disciplina può fornire per l'alfabetizzazione informatica degli studenti.

Sulla base dei risultati più recenti della ricerca didattica e di molte sperimentazioni condotte nelle scuole ai diversi livelli scolastici, possiamo individuare tre tipiche modalità d'uso delle nuove tecnologie, che appaiono particolarmente appropriate per l'attività di insegnamento-apprendimento in campo matematico:

- a) Uso di strumenti di calcolo e di software specifici come strumenti mediatori nella progettazione e realizzazione di ambienti di apprendimento efficaci per lo sviluppo di conoscenze articolate in campo matematico.
- b) Uso delle risorse informative disponibili sulla rete Internet o su specifici software ipermediali per lo sviluppo di ricerche specifiche su contenuti oggetto di studio o per eventuali complementi e approfondimenti degli stessi. Costruzione di prodotti ipermediali su particolari argomenti oggetto di studio.
- c) Uso di risorse comunicative di rete per favorire la comunicazione con compagni ed insegnanti per scopi di confronto, riflessione e condivisione di conoscenze matematiche e per lo sviluppo di una pratica didattica basata su attività di tipo collaborativo o cooperativo.

Prima di prendere in considerazione le singole modalità sopra individuate, notiamo che una stessa attività didattica può anche essere caratterizzata da un uso integrato delle tre modalità.

a) *Uso di strumenti di calcolo automatico e di software didattici specifici*

La ricerca suggerisce che l'uso di strumenti di calcolo automatico e di software didattici specifici nell'attività di insegnamento-apprendimento può:

- rendere possibili nuovi modi di dare significato ai concetti matematici oggetto di apprendimento
- strutturare nuove possibilità di interazione tra il sapere istituzionalizzato e l'esperienza e le conoscenze che spesso gli alunni possiedono su un determinato argomento oggetto di studio
- modificare le interazioni che si realizzano in classe fra insegnante e allievi e fra gli stessi allievi, in relazione al sapere in gioco nell'attività di insegnamento-apprendimento.

Un primo esempio è costituito dall'uso delle calcolatrici numeriche. Già a partire dai primi anni della scuola di base tali strumenti possono essere utilizzati per esplorare regolarità numeriche, per controllare calcoli o stime di calcoli effettuati a mente. Attraverso un uso appropriato e intelligente in classe di tali strumenti può essere potenziato il calcolo mentale, come mezzo di controllo dell'attendibilità dei risultati, particolarmente utile nella costruzione di strategie risolutive di problemi; al tempo stesso può essere posta meno attenzione ad attività di tipo meccanico ripetitivo, oggi di scarso valore formativo, come le "operazioni in colonna" e il calcolo di espressioni complicate.

Un secondo esempio è costituito dall'uso dei fogli elettronici, sistemi di rappresentazione ed elaborazione dati che possono essere utilizzati negli ultimi anni della scuola di base anche per potenziare le possibilità di esplorazione, di osservazione e di individuazione di regolarità numeriche. I fogli elettronici possono essere proficuamente utilizzati per esplorare le relazioni quantitative che caratterizzano situazioni relative a campi di conoscenza diversi (fisico, biologico, economico, statistico, matematico, della vita quotidiana...) ai fini di una loro modellizzazione.

Un altro esempio è costituito dai sistemi di geometria dinamica, che consentono di utilizzare, con estrema facilità, il movimento nell'insegnamento-apprendimento della geometria euclidea; ciò consente di portare sotto il controllo della percezione l'insieme delle relazioni che definiscono una figura, potendo osservare, per esempio, le proprietà che si conservano quando gli oggetti base della figura vengono trascinati con il mouse. Tali sistemi si sono rivelati particolarmente adatti a progettare attività che favoriscono esplorazioni, osservazioni e produzione di congetture: essi possono essere utilizzati già a partire dagli ultimi anni della scuola di base.

Infine, per potenziare l'aspetto algoritmico, essenziale in matematica, può risultare utile l'uso di linguaggi di programmazione specifici per la scuola di base, con una sintassi semplice e naturale, che consenta ai bambini di comunicare con l'elaboratore impartendogli istruzioni per eseguire azioni, realizzare disegni e costruire semplici ambienti.

b) Costruzione e uso di documenti ipermediali

Le risorse informative disponibili sulla rete internet e attraverso prodotti multimediali specifici offrono la possibilità di accedere a conoscenze strutturate che possono essere utilizzate dagli insegnanti per gestire in classe, con gli alunni, attività di riflessione, approfondimento e consolidamento. È possibile individuare almeno tre modalità per gestire la costruzione e l'uso in classe di documenti ipermediali per scopi didattici.

La prima prevede di far costruire documenti ipermediali agli studenti senza dar loro alcun materiale. Questo tipo di attività è finalizzata ad acquisire informazioni su come gli studenti sono in grado di organizzare le conoscenze oggetto di studio e la rete di relazioni che caratterizza i concetti appresi.

La seconda modalità richiede agli studenti la costruzione di documenti ipermediali fornendo loro molto materiale o il riferimento a dove reperirlo o fornendo loro assistenza mentre usano motori di ricerca per accedere alle risorse informative della rete. Con questo tipo di attività è possibile studiare la capacità degli studenti di muoversi in un sistema complesso di informazioni e conoscenze e di organizzarle in strutture adeguate, in riferimento allo scopo definito dall'insegnante o negoziato durante l'attività.

La terza modalità è relativa all'utilizzo diretto in classe da parte dell'insegnante delle risorse informative disponibili sia sulla rete sia su ipermedia specifici. In questo caso si tratta di usare tali risorse per favorire e potenziare la comunicazione didattica.

c) Uso di risorse comunicative di rete

L'uso di risorse comunicative di rete consente di inserire l'attività di risoluzione di problemi all'interno di una pratica sociale che può modificare profondamente l'atteggiamento complessivo degli alunni verso il problema, le strategie risolutive che essi impiegano e il modo in cui validano il processo risolutivo attuato.

L'attività didattica mediata dalla comunicazione di rete contribuisce infatti a uno spostamento dell'attenzione dal "fare" al "fare per comunicare", favorendo l'assunzione di nuovi criteri quali la chiarezza e la leggibilità nella realizzazione del proprio prodotto risolutivo. In questo quadro

lo studente costruisce una risoluzione che deve essere negoziata e condivisa dai propri compagni e non solo valutata dall'insegnante. Le risorse comunicative di rete possono essere utilizzate a supporto dello sviluppo di differenti pratiche collaborative durante lo svolgimento di compiti. Tali pratiche possono essere, per esempio, lo scambio e il confronto delle risoluzioni realizzate, il commento, la critica, le osservazioni sulle soluzioni realizzate da un compagno, la collaborazione nella risoluzione di compiti complessi.

Osserviamo infine che le risorse comunicative di rete possono essere proficuamente impiegate negli scambi comunicativi tra insegnante e alunni (per esprimere dubbi, sollevare problemi, richiedere chiarimenti da parte dell'alunno e per offrire spiegazioni, indicazioni e suggerimenti da parte dell'insegnante), in attività collaborative tra classi di scuole diverse, nello stabilire relazioni con esperti e, più in generale, nella partecipazione a liste di discussione; si tratta di attività che con gradualità e attenzione, possono essere avviate già a partire dalla scuola di base.

La valutazione in matematica

La varietà degli apprendimenti e delle prestazioni in campo matematico (dall'esecuzione di procedure standard, alla risoluzione di problemi aperti, alla riflessione sui concetti e sulle procedure apprese) e le diverse finalità della valutazione richiedono strumenti valutativi e metodologie molto differenziate.

In particolare, occorrerà considerare:

- strumenti e metodi che servono ad individuare le potenzialità e le difficoltà degli allievi al fine di suggerire loro cambiamenti nel modo di studiare, orientare meglio il loro lavoro, offrire loro nuove opportunità di apprendimento anche attraverso modifiche nella programmazione didattica prevista;

- strumenti e metodi che servono ad accertare conoscenze ed abilità possedute dagli allievi al termine di un dato percorso formativo o di un ciclo di studi (anche ai fini della certificazione).

Nel primo caso è opportuno utilizzare strumenti e metodologie che permettono di individuare difficoltà, progressi e risorse degli allievi e anche loro attese ed opinioni riguardanti le prestazioni richieste; quindi è bene raccogliere elementi significativi del loro percorso individuale (elaborati in forma "grezza", registrazioni di interazioni con l'insegnante e con i compagni prima, durante e dopo la risoluzione di problemi impegnativi, ecc.). Affinché tale documentazione consenta all'insegnante una adeguata ricostruzione del processo individuale e la eventuale messa a punto di strategie di rinforzo e di recupero, gli allievi devono essere sollecitati, fino dall'inizio, ad esplicitare i loro tentativi e i processi di soluzione dei problemi. Ciò richiede che in classe si stabilisca un clima favorevole alla ricerca delle cause degli errori e al confronto dei ragionamenti seguiti, evitando di penalizzare i tentativi di risoluzione non andati a buon fine quando sono ben esplicitati.

Nel secondo caso a scadenze fissate, ma comunque frequenti, potranno essere utilizzati (in relazione all'oggetto dell'accertamento):

- esercizi di tipo esecutivo ("calcola...") e test a risposta multipla, particolarmente adatti per controllare la padronanza di procedure e la memorizzazione di nozioni importanti (formule, definizioni, ecc.);

- problemi aperti, necessari per accertare la capacità di risolvere problemi e la padronanza operativa delle conoscenze e delle abilità necessarie;

- relazioni scritte e orali, utili per accertare se gli allievi sono in grado di esplicitare quanto hanno appreso a livello operativo e di riflettere sulle procedure che utilizzano.

"Incrociando" i risultati delle prove periodiche di accertamento degli apprendimenti realizzati con le informazioni raccolte nel corso delle attività svolte sarà possibile individuare interventi utili per superare talune cause di insuccesso e per utilizzare al meglio le risorse degli allievi ai fini dello sviluppo delle loro capacità di far fronte con successo ai compiti proposti.

Nell'impostare un programma di accertamento delle competenze raggiunte dagli allievi e di conoscenza delle loro difficoltà e delle loro risorse occorre vigilare su alcuni rischi insiti nei processi valutativi:

- distorsioni del percorso formativo che possono derivare dalle scelte su "cosa valutare", effettuate nella predisposizione delle prove valutative. Spesso le competenze più facili da accertare in campo matematico non sono le più importanti; d'altra parte spesso succede che le competenze che sono oggetto di accertamento diventino le più importanti per insegnanti e allievi.

- sopravvalutazione del valore predittivo delle prove valutative, soprattutto quando non accompagnate da una analisi attenta del percorso formativo degli allievi. Sia nel caso di successo che (e ancora di più) nel caso di insuccesso la qualità della prestazione degli allievi in matematica può dipendere da fattori difficilmente controllabili (attese deviate rispetto

all'obiettivo che l'insegnante si prefigge, evocazione di situazioni solo superficialmente simili, condizioni di ansia, ecc.).