

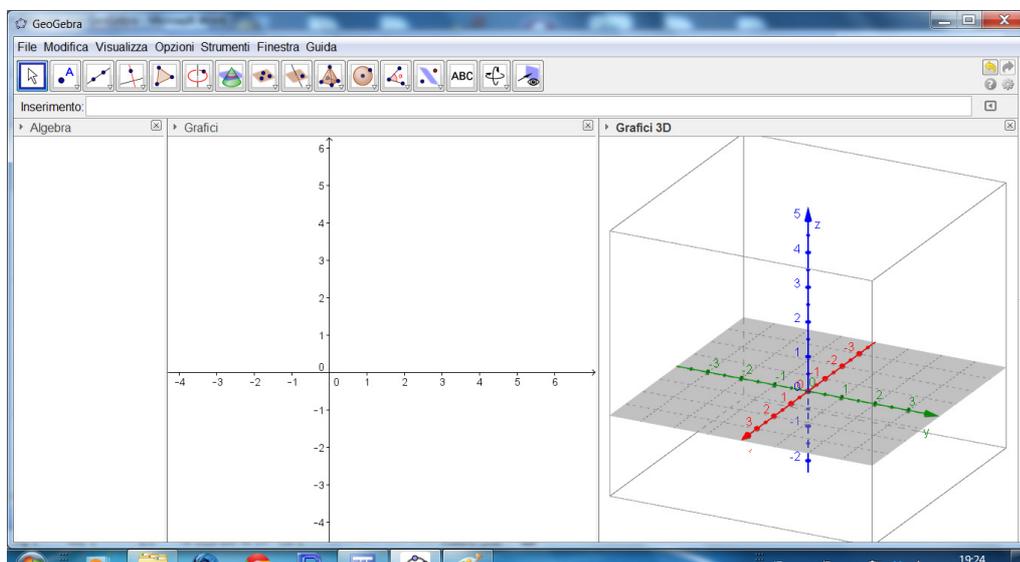
GeoGebra vers.5 - vista Grafici 3D

Marzo 2015 (manuale on-line, con aggiunte a cura di L. Tomasi)

Questo articolo si riferisce a un componente della [interfaccia utente di GeoGebra](#).

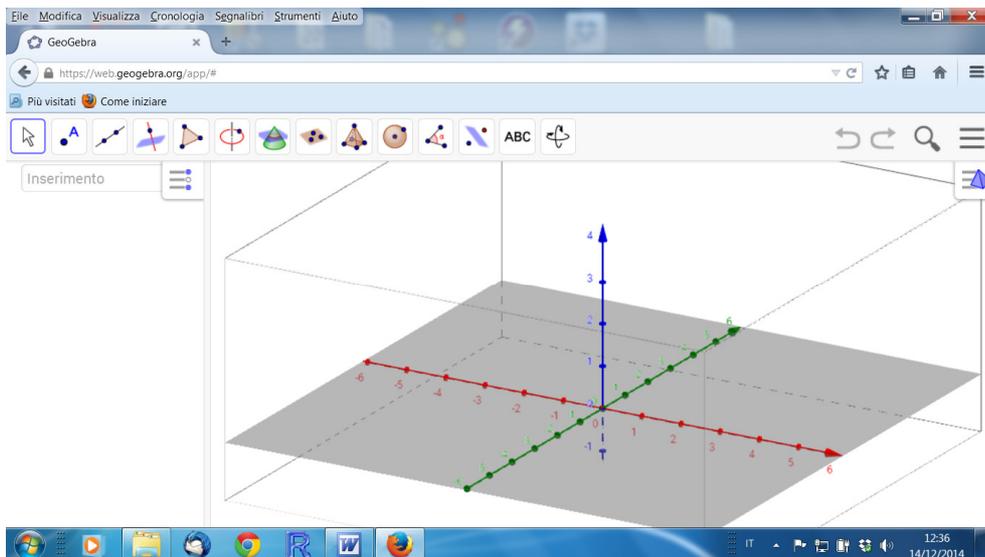
<u>Viste</u> <ul style="list-style-type: none">• Vista Algebra• Vista CAS• Vista Grafici• Vista Grafici 3D• Vista Foglio di calcolo	Componenti principali <ul style="list-style-type: none">• Barra dei menu• Barra degli strumenti• Barra di inserimento• Menu contestuale• Barra di navigazione• Tastiera virtuale
Menu <ul style="list-style-type: none">• Menu File• Menu Modifica• Menu Visualizza• Menu Opzioni• Menu Strumenti• Menu Finestra• Menu Guida	Finestre di dialogo <ul style="list-style-type: none">• Finestra di dialogo Proprietà• Protocollo di Costruzione• Finestra di dialogo Crea nuovo strumento• Finestra di dialogo Gestione strumenti• Finestra di dialogo Ridefinisci• Finestra di dialogo Opzioni• Finestra di dialogo Esporta Grafici• Finestra di dialogo Esporta foglio di lavoro dinamico• Finestra di dialogo Stampa

Qui utilizziamo GeoGebra vers. 5 che comprende anche una vista Grafici 3D oltre ad altre novità interessanti. Inizialmente si presenta nel seguente modo, con tre finestre aperte.



◆ Interfaccia utente della Vista Grafici 3D

La **◆ vista Grafici 3D** si apre per impostazione predefinita accanto alla **◆ vista Algebra**: nella parte bassa della finestra di GeoGebra (versione desktop) è visualizzata la [barra di inserimento](#), mentre nella versione Web e nelle app per tablet il [campo di inserimento](#) è direttamente integrato nella **◆ vista Algebra**. La [barra degli strumenti della vista Grafici 3D](#) è visualizzata in alto, con i pulsanti *Annulla / Ripristina* nell'angolo in alto a destra.



Vista Grafici 3D

La **◆ vista Grafici 3D** fa parte della [Raccolta viste Grafici 3D](#): è comunque possibile aggiungere una *vista Grafici 3D* a qualsiasi [Raccolta Viste](#), utilizzando il [menu Visualizza](#) o il **◆ pulsante delle Viste** nella [barra di stile](#).

◆ Raccolta Grafici 3D

La raccolta *Grafici 3D* contiene la [vista Grafici 3D](#) e la [vista Algebra](#). Le impostazioni predefinite prevedono la visualizzazione degli assi cartesiani e del piano xy nella *vista Grafici 3D* e della relativa barra degli strumenti, nella parte alta della finestra del programma. Nella versione *Desktop* di GeoGebra la [barra di inserimento](#) è visualizzata in alto, mentre nelle versioni *Web* e *app per tablet* è disponibile un *campo di inserimento* integrato nella *vista Algebra* (vedere [Barra di inserimento e campo di inserimento](#)).

Personalizzare la vista Grafici 3D

La **◆ vista Grafici 3D** può essere personalizzata secondo le proprie necessità di lavoro e didattiche: le impostazioni di base come ad es. la visualizzazione degli assi, del piano xy e della griglia possono essere modificate utilizzando la [barra di stile](#), mentre la [finestra di dialogo Proprietà](#) consente di apportare modifiche a una serie più estesa di opzioni. È inoltre possibile [modificare il layout](#) dell'intera interfaccia di GeoGebra.

Creare oggetti matematici

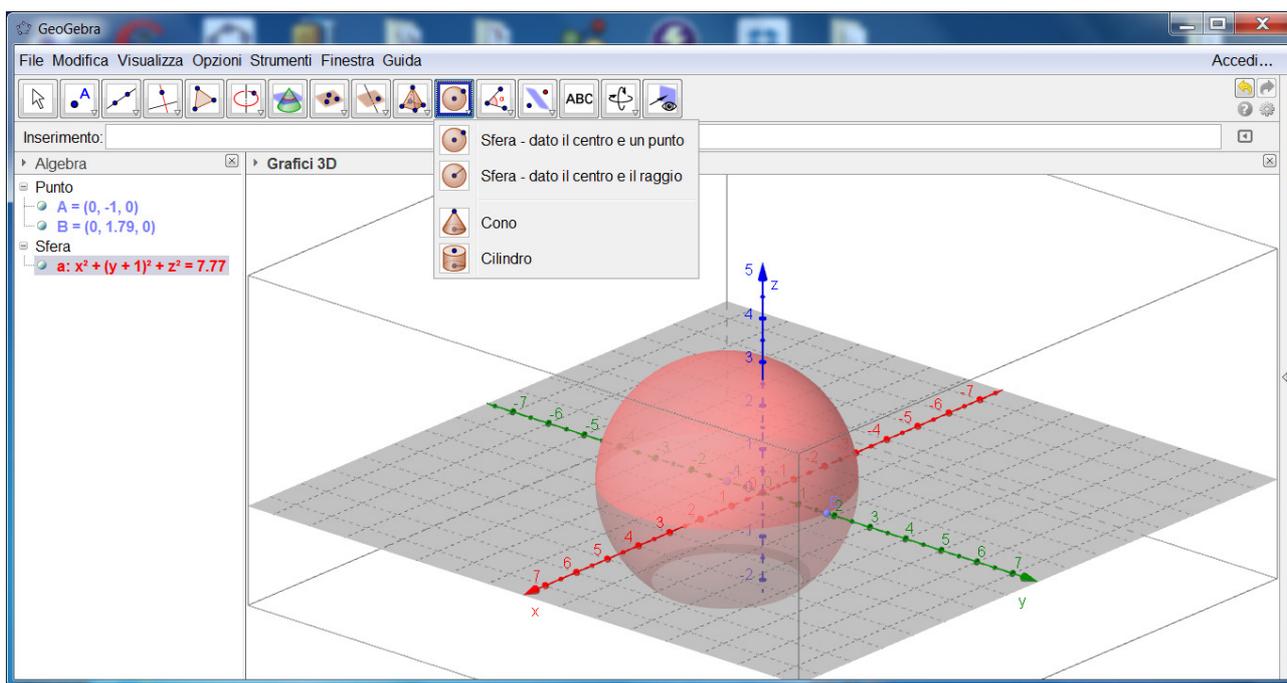
Costruzioni con il mouse

Utilizzando gli [strumenti di costruzione](#) disponibili nella [barra degli strumenti](#) è possibile creare con il mouse delle costruzioni di oggetti tridimensionali nella vista  *Grafici 3D*. Selezionando uno strumento viene visualizzata una breve guida che ne illustra il funzionamento.



Note: La rappresentazione algebrica di ciascun oggetto creato nella vista  *Grafici 3D* è disponibile nella  [vista Algebra](#).

Esempio: Selezionare lo strumento [Sfera - dato il centro e un punto](#) e fare clic in due posizioni distinte della *vista Grafici 3D*: il primo clic crea il centro, mentre il secondo crea la sfera e un suo punto.

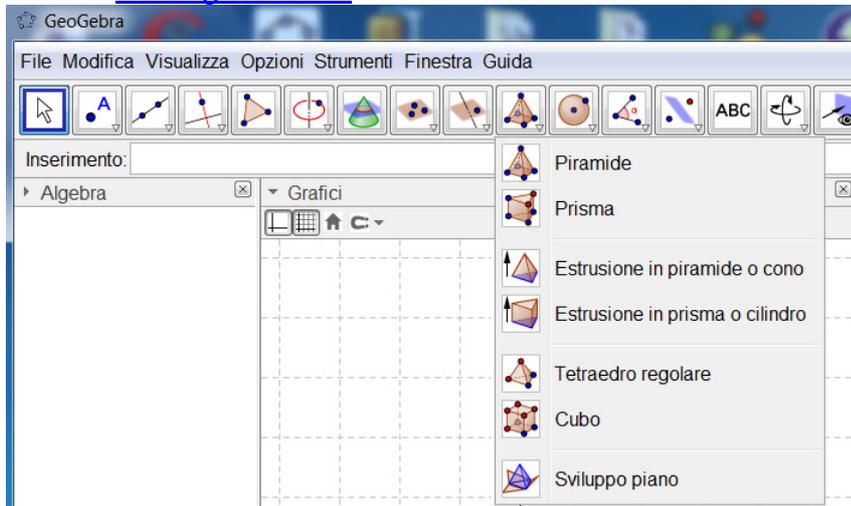


Barra degli strumenti della vista Grafici 3D

La [barra degli strumenti della vista Grafici 3D](#) offre una vasta scelta di [strumenti](#) che possono essere utilizzati direttamente con il mouse per creare rappresentazioni grafiche tridimensionali degli oggetti. Ogni icona della [barra degli strumenti](#) rappresenta una [casella degli strumenti](#) che contiene una selezione di strumenti di costruzione simili tra loro. Per aprire una [casella degli strumenti](#) basta fare clic sullo *strumento predefinito* visualizzato nella [barra degli strumenti della vista Grafici 3D](#) (GeoGebra Web e app per tablet) oppure

sulla freccina presente in basso a destra in ogni icona della *barra degli strumenti* (GeoGebra Desktop).

Note: Gli *strumenti* della *barra degli strumenti della vista Grafici* sono raggruppati in modo da avere funzionalità che si riferiscono all'oggetto geometrico risultante: ad esempio la casella degli strumenti [Piano](#) offre gli strumenti necessari per creare vari tipi di piano, oppure gli strumenti relativi alla costruzione dei solidi geometrici sono disponibili nella casella [Solidi geometrici](#).



Inserimento diretto tramite barra di inserimento

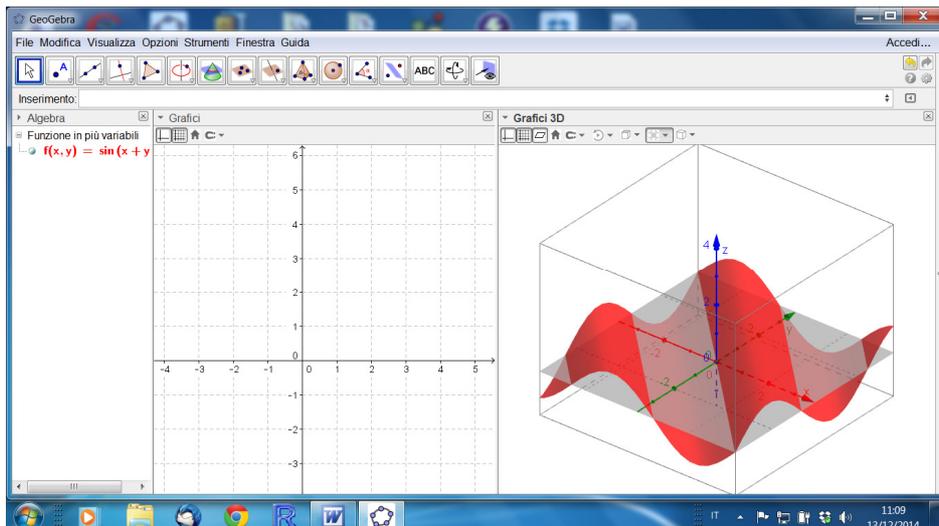
La [vista Grafici 3D](#) di GeoGebra supporta punti, vettori, rette, segmenti, semirette, poligoni e circonferenze in ambiente tridimensionale. Tali oggetti possono essere creati, oltre che con gli appositi [strumenti](#), anche digitandone la rappresentazione algebrica o il corrispondente [comando](#) nella [barra di inserimento](#) (GeoGebra Desktop) oppure nel [campo di inserimento](#) della [vista Algebra](#) (GeoGebra Web e app per tablet).

 **Suggerimento:** Se la *barra di inserimento* non è visibile, utilizzare l'apposita opzione nel [menu Visualizza](#).

Esempio: Digitare $A=(5, -2, 1)$ nella *barra di inserimento* o nel *campo di inserimento* della [vista Algebra](#) $A=(5, -2, 1)$ per creare un punto nel sistema di coordinate tridimensionale. Digitare $v=(5, -2, 1)$ per creare un vettore applicato nell'origine del sistema di coordinate tridimensionale ed avente come secondo estremo il punto di coordinate $(5, -2, 1)$.

È inoltre possibile creare superfici, in particolare piani, e solidi geometrici (prismi, piramidi, sfere, cilindri e con).

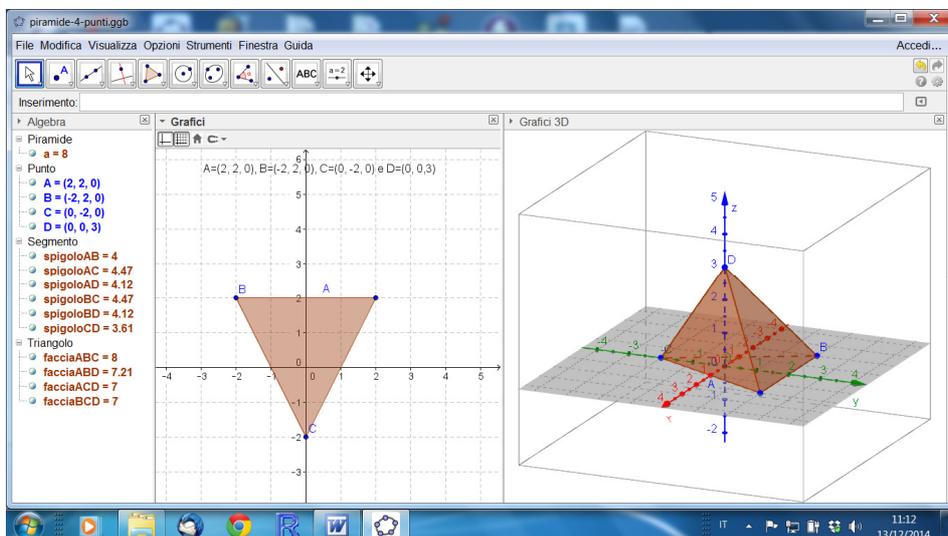
Esempio: Digitare $f(x, y)=\sin(x*y)$ per creare la superficie corrispondente.



Comandi

Oltre ai [comandi](#) relativi a tutte le altre [Viste](#) di GeoGebra, è disponibile una selezione di *comandi 3D* specifici per la *vista Grafici 3D*.

Esempio: Definire i punti (nella barra di inserimento): $A=(2, 2, 0)$, $B=(-2, 2, 0)$, $C=(0, -2, 0)$ e $D=(0, 0, 3)$. Digitando il comando Piramide[A, B, C, D], dopo aver premuto il tasto *Invio* viene creata la piramide di base ABC e vertice D . Il poligono di base della piramide viene visualizzato nella vista Grafici (2D) dato che i punti A, B, C appartengono a tale piano.



Muovere oggetti matematici in 3D

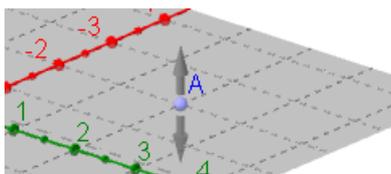
Lo strumento Muovi

Selezionare lo strumento Muovi, quindi trascinare con il mouse e rilasciare i [punti liberi](#) nella loro posizione finale. Per muovere un punto nello spazio tridimensionale, con *un clic del mouse* su di esso è possibile passare attraverso due modalità di spostamento:

- **Modalità *piano xy*** : è possibile muovere il punto parallelamente al piano xy senza modificarne la coordinata z .



- **Modalità *asse z*** : è possibile muovere il punto parallelamente all'asse z senza modificare le coordinate x e y .



Note: La relativa rappresentazione algebrica si aggiorna automaticamente nella [vista Algebra](#).

Muovere gli oggetti utilizzando la tastiera

Nella [vista Grafici 3D](#), premere il tasto $\text{Pag } \uparrow$ della tastiera per muovere verso l'alto un oggetto precedentemente selezionato, oppure il tasto $\text{Pag } \downarrow$ per muovere l'oggetto verso il basso.

Visualizzare gli oggetti matematici

Traslare il sistema di coordinate

Per muovere la porzione di [vista Grafici 3D](#) visualizzata, selezionare lo strumento [Muovi la vista Grafici](#) e trascinare con il mouse, quindi rilasciare, una zona della vista [Grafici 3D](#). È possibile disporre di due modalità di movimento, che si ottengono con un clic sullo sfondo della [vista Grafici 3D](#):

- **Modalità *piano xy*** : trasla la porzione visibile della Vista parallelamente al *piano xy*.
- **Modalità *asse z*** : trasla la porzione visibile della Vista parallelamente all' *asse z*.

In alternativa basta tenere premuto il tasto Maiusc della tastiera e trascinare lo sfondo della [vista Grafici 3D](#). Come nel caso precedente, è possibile alternare con un ulteriore clic le due modalità di traslazione, sempre mantenendo premuto il tasto Maiusc .

Note: Per tornare alla visualizzazione predefinita fare clic sul pulsante [Torna alla visualizzazione predefinita](#) nella [barra di stile della vista Grafici 3D](#).



Barra di stile vista Grafici 3D

Rotazione del sistema di coordinate

Per ruotare il sistema di coordinate utilizzare lo  [strumento Ruota la vista Grafici 3D](#) e trascinare lo sfondo della vista con il puntatore del mouse, oppure semplicemente trascinare lo sfondo della Vista, mantenendo premuto il tasto destro del mouse.

Per continuare la rotazione del sistema di coordinate dopo che viene rilasciato il pulsante del mouse, utilizzare le opzioni  [Avvia la rotazione della Vista](#)  e [Arresta la rotazione della Vista](#), disponibili nella [barra di stile della vista Grafici 3D](#).

Note: Per ritornare alle condizioni iniziali, fare clic sul pulsante  [Torna alla visualizzazione predefinita](#) disponibile nella [barra di stile della vista Grafici 3D](#).

Vista frontale di un oggetto

Lo  [strumento Vista frontale](#) sposta il punto di vista del sistema di coordinate di fronte all'oggetto selezionato.

Zoom

Gli strumenti  [Zoom avanti](#) e  [Zoom indietro](#) consentono di fare uno zoom nella  [vista Grafici 3D](#).

 **Suggerimento:** Per ottenere uno zoom è anche possibile utilizzare la rotellina del mouse.

Barra di stile della vista Grafici 3D

La [barra di stile della vista Grafici 3D](#) contiene pulsanti che consentono di:



-  visualizzare / nascondere gli assi
-  visualizzare / nascondere il piano xy
-  visualizzare / nascondere la griglia nel piano xy
-  tornare alla visualizzazione predefinita
-  modificare le impostazioni di [cattura punto](#)
-  avviare / arrestare la rotazione automatica della vista
-  modificare la direzione di vista della costruzione
-  selezionare il tipo di proiezione
-  aprire la [finestra di dialogo Proprietà](#) (GeoGebra Web e app per tablet)
-  visualizzare ulteriori [Viste](#) nella finestra di GeoGebra (GeoGebra Web e app per tablet)

Barra di stile per strumenti e oggetti

La [barra di stile](#) visualizzata si adatta automaticamente allo [strumento](#) o all'oggetto selezionato. Per ulteriori informazioni fare riferimento alla pagina [Opzioni della barra di stile per strumenti e oggetti](#).

Una presentazione della vista Grafici 3D si trova in questo video tutorial (di Simona Riva): <https://www.youtube.com/watch?v=NbO8sxUxJ8c&feature=youtu.be>

Estrusione in piramide o cono

Nella vista *Grafici 3D*, trascinare un poligono o un cerchio mantenendo premuto il tasto sinistro del mouse, oppure
selezionare un poligono o un cerchio, quindi digitare il valore o la formula dell'altezza nella finestra di dialogo visualizzata, per generare una piramide o un cono retti, il cui piede dell'altezza è nel **baricentro** del poligono di base.

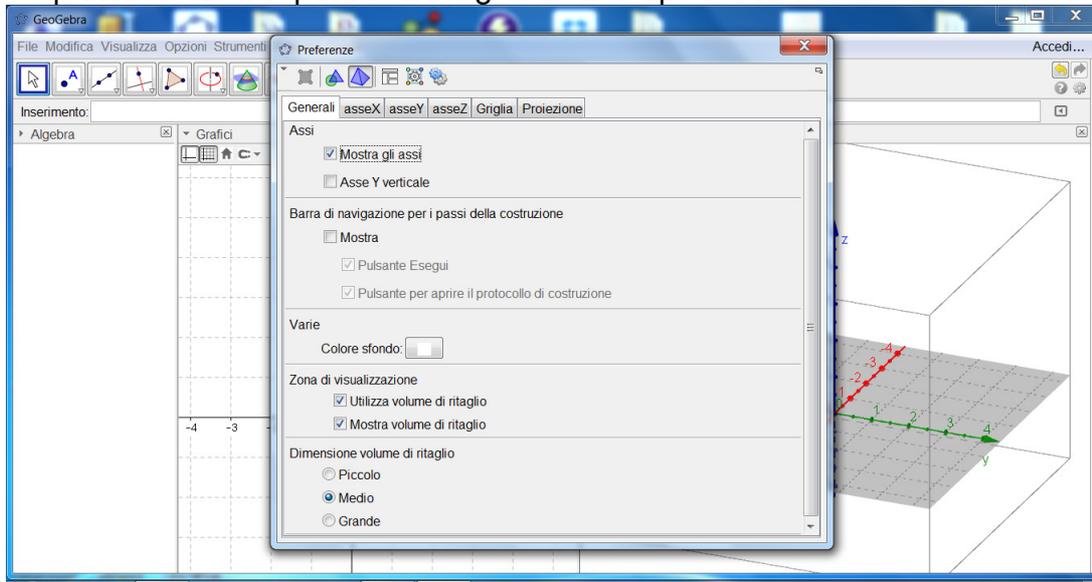


Esempi di geometria 3D (“sintetica”) con GeoGebra vers. 5

La vista Grafici 3D può essere impostata in modo da non visualizzare gli assi cartesiani e anche lo spazio di ritaglio.

Si va in Opzioni > Avanzate... > Preferenze-Grafici 3D

In questa finestra si possono scegliere varie opzioni di lavoro.



1. Costruire un cubo; sviluppo di un cubo (problema: quanti solo i possibili sviluppi di un cubo?) costruire un quadrato sul piano xy a partire dai punti A e B e poi creare un cubo di spigolo il segmento AB. Costruire lo sviluppo piano.
2. Costruzione di un parallelepipedo: costruire un rettangolo nel piano xy e poi usare lo strumento Prisma estrusione
3. Costruzione di un prisma: costruire un poligono regolare nel piano xy e poi usare estrusione; sviluppo piano di un prisma
4. Costruzione di una piramide (e il tronco di piramide); sviluppo piano di una piramide
5. Costruzione dei poliedri regolari (o solidi platonici): cubo, tetraedro regolare; ottaedro regolare; dodecaedro regolare; icosaedro regolare (e relativi sviluppi)
6. Costruzione di un cilindro; intersezione cilindro-piano
7. Costruzione di un cono; intersezione cono-piano
8. Costruzione di una sfera; intersezione sfera-piano; piani tangenti, secanti ed esterni a una sfera
9. Principio di Cavalieri; equivalenza nello spazio
10. Prisma triangolare scomposto in tre piramidi equivalenti
11. Scodella di Galileo; il volume della sfera.

Esempi di geometria analitica 3D (con GeoGebra vers. 5)

Punti

Vettori

- Modulo
- Operazioni con i vettori
- prodotto scalare
- prodotto vettoriale

Piani

Rette

Sfere

Superfici $z=f(x,y)$

Problemi di geometria analitica 3D

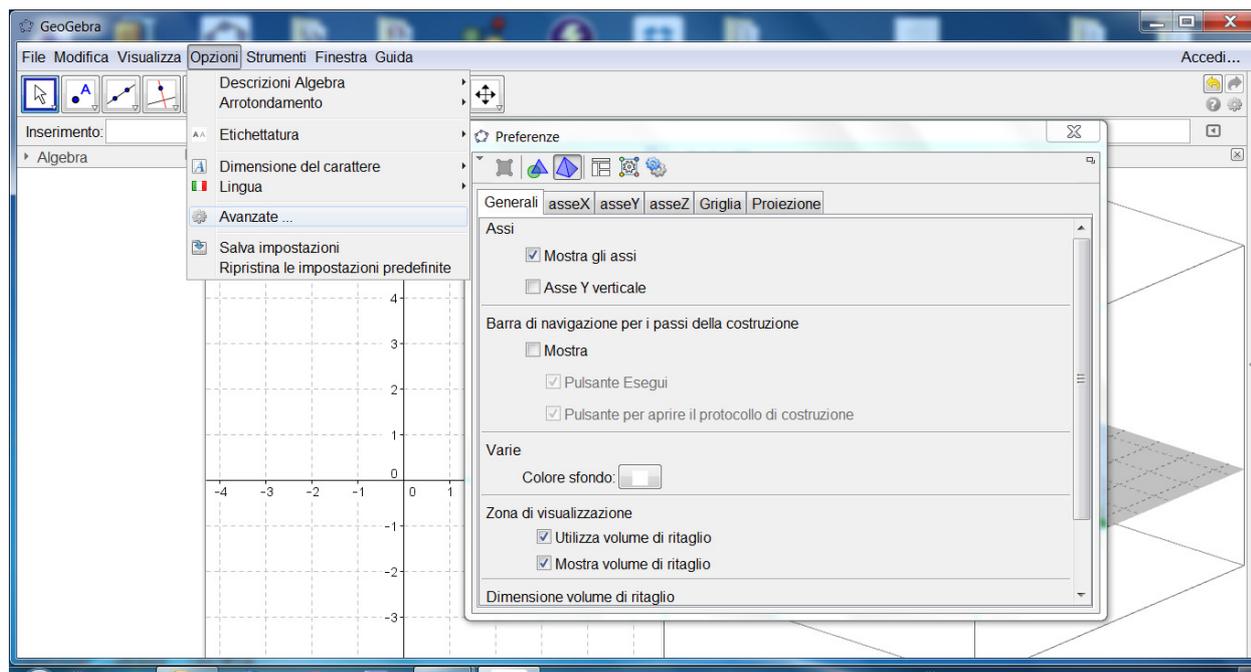
Esercitazioni e proposte per alcune attività di laboratorio sulla geometria analitica 3D con GeoGebra vers.5

La vista Grafici 3D può essere impostata in modo da visualizzare gli assi cartesiani e il “volume di ritaglio” (il box dove appaiono i grafici 3D).

Si va in Opzioni > Avanzate... > Preferenze-Grafici 3D

In questa finestra si possono scegliere varie opzioni di lavoro.

Attuale versione di GeoGebra: vers. 5.0.57.



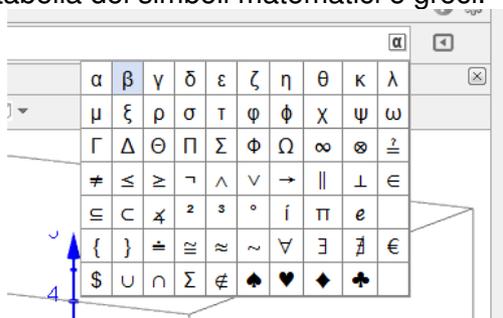
Premessa. L'insegnamento della geometria analitica 3D è previsto nelle *Indicazioni nazionali* per i Licei per il V anno e in alcuni indirizzi nelle *Linee Guida* per gli Istituti Tecnici e per gli Istituti Professionali.

Problemi di apprendimento: il principale è la difficoltà di visualizzazione spaziale da parte degli allievi; questo è dovuto al fatto che si trascura, di solito si dice per mancanza di tempo, la geometria dello spazio sintetica. Un software come GeoGebra può aiutare moltissimo questa visualizzazione (assieme eventualmente alla costruzione di modelli materiali di alcuni solidi geometrici o loro sezioni).

Un'osservazione ovvia: non si può fare geometria analitica dello spazio senza conoscere le nozioni fondamentali di geometria sintetica dello spazio.

1. Punti. I punti possono essere creati in modo interattivo, con un clic. Creare e trascinare dei punti (far variare x e y ; far variare la z : clic sul punto per cambiare la modalità di trascinamento). Oppure si può definire un punto tramite le sue coordinate, con il suo nome; basta scrivere ad esempio $A=(2,1,3)$.
Un punto può essere libero (3 gradi di libertà) oppure può essere definito su un oggetto (con 2 oppure 1 grado di libertà). Punti definiti come intersezione di due oggetti (ad es. retta-piano); in questo caso ha 0 gradi di libertà..
2. Vettori. Per definire un vettore nello spazio, scrivere ad esempio: $a=(2,1,3)$ e $b=(4,-3,1)$.
Attenzione, la lettera deve essere minuscola! Il vettore viene applicato all'origine degli assi cartesiani e viene scritto nella Vista Algebra di GeoGebra come vettore *colonna*.
In GeoGebra si può facilmente determinare o visualizzare

- Il modulo di un vettore: si usa $\text{abs}(a)$, funzione valore assoluto (o modulo)
- le operazioni con i vettori, ad esempio $-a$, $2a$, $-a/2$, $a+b$, $a-b$, $a-2b, \dots$
- prodotto scalare: $a \cdot b$
- prodotto vettoriale: $a \otimes b$ (visualizzare anche $b \otimes a$). Attenzione al simbolo di prodotto vettoriale: si trova nella tabella dei simboli matematici e greci.



3. Piani (costruzione di un piano; piano per tre punti; piano retta-punto, piano definito da due rette incidenti, ...); costruzione di un vettore perpendicolare a un piano; equazione generale di un piano (una dimostrazione) $ax+by+cz+d=0$ (a, b, c non tutti nulli); equazione $ax+by+cz=0$.
Esempi: disegnare il piano $2x-y+3z+1=0$ e il vettore $v=(2,-1,3)$. Che cosa si osserva?
Piani particolari ($a=0$ oppure $b=0$, ecc.).
Disegnare ad esempio i piani
 $y-3z+1=0$ ($a=0$)
 $2x+3z-2=0$ ($b=0$)
 $2x-y+4=0$ ($c=0$)
4. La forma esplicita dell'equazione di un piano (funzione di due variabili): $z=mx+ny+q$. Esempio: trovare l'equazione esplicita (quando esiste?) del piano α passante per i punti $A(2,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,3)$.
5. Piani paralleli; condizione di parallelismo. Fascio improprio di piani. Esempio: visualizzare con GeoGebra il fascio di piani paralleli al piano di equazione $2x-y+3z=0$ (usare uno slider da chiamare d ed eventualmente la traccia del piano).
6. Piani perpendicolari: condizione di perpendicolarità tra piani: $aa'+bb'+cc'=0$ (questa condizione è forse più facile da dimostrare se si usano due vettori, rispettivamente perpendicolari ai piani, e il loro prodotto scalare).
Esempio. Visualizzare i piani (α) $x-2y+z=0$ e (β) $3x+2y+z-2=0$ con GeoGebra. Determinare un vettore v perpendicolare al piano α e un vettore w perpendicolare al piano β . Trovare il prodotto scalare $v \cdot w$.
7. Rette: intersezione di due piani; le equazioni di una retta; le equazioni *ridotte* di una retta. Esempio: disegnare i piani $x+2y-4z=1$ e $x-y-2z=0$. Visualizzare l'intersezione. Trovare un sistema di equazioni ridotte della retta (rispetto a z).
8. Equazioni di una retta per due punti (equazioni in forma *frazionaria*). Parametri direttori (l, m, n) di una retta.
Esempio con GeoGebra: trovare le equazioni frazionarie della retta passante per i punti $A(0,0,2)$ e $B(3,2,0)$. Disegnare la retta. Trovare una terna di parametri direttori (l, m, n) di questa retta (la più semplice terna di parametri direttori è ...).
9. Le equazioni parametriche di una retta (e l'equazione vettoriale di una retta).
Esempio con GeoGebra: trovare una terna di equazioni parametriche della retta passante per i punti $A(0,0,2)$ e $B(3,2,0)$. Disegnare la retta. Osservare nella Vista Algebra come GeoGebra scrive l'equazione della retta AB . Usare uno slider per il parametro (λ) e visualizzare il significato delle equazioni parametriche di una retta.

Equazione vettoriale di una retta definita da due punti A e B; $\vec{X} = \vec{A} + \lambda \vec{AB}$.

10. Posizioni reciproche tra due rette nello spazio: usando GeoGebra visualizzare i vari casi: rette complanari (incidenti o parallele) o non complanari (sghembe), ecc..
11. Posizioni reciproche tra una retta e un piano nello spazio: visualizzare i vari casi.
Esempio: visualizzare la retta AB del precedente esercizio 9 e il piano di equazione $x+2y-z=2$.
Si intersecano? Se sì, dove?
Retta parallela a un piano; Condizione di parallelismo retta piano: $al+bm+cn=0$ (la dimostrazione è veloce se si usano i vettori).
12. Retta perpendicolare a un piano passante per un punto.
Distanza punto-piano. La formula conviene darla per analogia tra la distanza punto-retta nel piano.
Esempio: anche se non si dimostra la formula, conviene fare la costruzione geometrica necessaria per trovare la distanza tra il punto $P(-1,3,2)$ e il piano (α) $3x-2y+z=3$ (si fa passare una retta r per P che sia perpendicolare al piano α e poi si trova l'intersezione H tra questa retta r con il piano α).
13. Piano perpendicolare a una retta passante per un punto.
Condizione di perpendicolarità piano retta: $a/l=b/m=c/n$ (la dimostrazione è veloce se si usano i vettori).
Distanza punto-retta.
Esempio: fare la costruzione per trovare la distanza tra il punto $P(0,-1,0)$ e la retta di equazioni ridotte $x=2z-1$ e $y=z+1$.
14. Sfera: disegnare una sfera (superficie sferica); intersezione sfera-piano.
Esempio con GeoGebra: trovare il centro e il raggio della circonferenza ottenuta intersecando la sfera di centro $C(0,0,1)$ e raggio 5, con il piano $2x-y-2z=4$. Fare la costruzione geometrica della circonferenza e del suo centro.
15. Superfici di equazione esplicita $f(x,y)=$ un'espressione contenente (x,y) .
Esempio: disegnare ad esempio $f(x,y)=x^2+y^2$. Si ottiene quale superficie? Disegnare le curve di livello.
16. Superfici di equazione esplicita $f(x,y)=$ un'espressione contenente (x,y) .
Esempio: disegnare ad esempio $f(x,y)=x^2 - y^2$. Si ottiene quale superficie? Disegnare le curve di livello.
17. Superfici di equazione esplicita $f(x,y)=$ un'espressione contenente (x,y) .
Esempio: disegnare ad esempio $f(x,y)=3x^2+2y^2$. Si ottiene quale superficie? Disegnare le curve di livello.
18. Superfici di equazione esplicita $f(x,y)=$ un'espressione contenente (x,y) .
Esempio: disegnare ad esempio $f(x,y)= 2xy$. Si ottiene quale superficie? Disegnare le curve di livello.
19. Superfici di equazione esplicita $f(x,y)=$ un'espressione contenente (x,y) .
Esempio: disegnare ad esempio $f(x,y)=\sin(x+y)$. Descrivere la superficie ottenuta.
20. Superfici di equazione esplicita $f(x,y)=$ un'espressione contenente (x,y) .
Esempio: disegnare la funzione in due variabili $f(x,y)=\sin(x^2+y^2)$. Descrivere la superficie ottenuta.