Sessione ordinaria 1992

Seconda prova scritta

ESAMI DI MATURITÀ SCIENTIFICA

Tema di: MATEMATICA

Indirizzo: SCIENTIFICO DI ORDINAMENTO

Fra le seguenti questioni il candidato tratti quelle che ritiene più adeguate alla sua preparazione.

1. Presi due vettori $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ non paralleli e con lo stesso punto di applicazione O, sia $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

Tracciare il vettore $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$ e congiungere O con C. Il punto P divida il segmento OC in due parti tali che $\overrightarrow{OP} = 2 \cdot \overrightarrow{PC}$. Dimostrare che i punti A, P e B sono allineati (è allo scopo sufficiente dimostrare che i due vettori $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{PB}$ sono multipli di uno stesso vettore).

Posto $\vec{a} \perp \vec{b}$ e $|\vec{a}| = 1|$ e fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali di centro O con ascissa parallela ed equiversa ad $\vec{a}$ e ordinata parallela ed equiversa a $\vec{b}$, trovare $|\vec{b}|$ affinché i due segmenti OC e AB siano perpendicolari.

Trovare, in questo caso, le due parabole con asse parallelo all'asse delle y e passanti rispettivamente la prima per O, P ed A e la seconda per B, P e C. Verificare che le due parabole sono tra loro tangenti in P. Calcolare infine l'area della parte finita di piano racchiusa tra le due parabole e l'asse delle y.

2. La funzione

$$f(x) = (2x^3 - 4x)e^{-x^2}$$

rappresenti, in opportune unità di misura, la forza $f(x)$ a cui è soggetto un punto P libero di muoversi lungo l'asse delle x. Sapendo che la forza f è data da

$$f(x) = -\frac{dE(x)}{dx}$$

dove $E(x)$ è l'energia potenziale, trovare la funzione $E(x)$ e rappresentarla avendo posto $E(0) = -1$.

Per quali valori di x il punto P è in equilibrio, ossia per quali valori di x la forza è nulla? Per tali valori di x l'energia potenziale quale valore assume?

3. Data una circonferenza γ di raggio unitario e centro O, tracciare una semiretta s uscente da O ed intersecante γ in un punto Q. Indicato con P un generico punto di s esterno alla circonferenza γ, tracciare da esso le due tangenti alla circonferenza: siano A e B i punti di tangenza. Indicata con x la lunghezza del segmento PQ, trovare il limite per x tendente ad infinito del rapporto

$$k = \frac{\overline{AQ} + \overline{QB}}{\overline{AB}}.$$

Studiare quindi la funzione $y = f(x)$, dove $f(x) = k^2$ e calcolare la superficie della regione di piano delimitata dalla curva e dagli assi cartesiani.

Durata massima della prova: 5 ore.

È consentito l'uso della calcolatrice tascabile non programmabile.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.