Sessione ordinaria 1996

Seconda prova scritta

ESAMI DI MATURITÀ SCIENTIFICA

Tema di: MATEMATICA

Indirizzo: SCIENTIFICO DI ORDINAMENTO

Il candidato scelga a suo piacimento ***due*** *dei seguenti problemi e li risolva:*

l. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) sono assegnate le parabole di equazione:

$$y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}ax - a^2$$

dove a è un numero reale positivo.

Tra di esse determinare la parabola p che, con la sua simmetrica q rispetto all'origine O, delimita una regione di area 128/3.

Constatato che per la parabola p risulta a = 2, calcolare l'area del quadrilatero convesso individuato dagli assi di riferimento e dalle tangenti alle due parabole p**,** q nel loro punto comune di ascissa positiva.

Considerato infine il quadrilatero convesso avente per vertici i punti medi dei lati del quadrilatero precedente, dimostrare che si tratta di un parallelogramma e calcolarne l'area.

---

2. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la curva k di equazione

$$y = \frac{x^2}{4 - x^3}$$

Dopo aver studiato la funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{4 - x^3}$$

(dominio, eventuali zeri ed estremi, asintoti di k), disegnare l'andamento di k.

Indicata con t la tangente a k parallela all'asse delle ascisse distinta dall'asse stesso, calcolare l'area della regione piana delimitata da k e da t.

A completamento del problema, prendere in esame le due seguenti proposizioni:

- Una funzione reale di variabile reale non derivabile in un punto non è continua in quel punto.
- Una funzione reale di variabile reale non continua in un punto non è derivabile in quel punto.

Dire di ciascuna se è vera o falsa e fornire una esauriente giustificazione della risposta.

---

3. Considerato il rettangolo ABCD, il cui lato AD è lungo 8a, dove a è una lunghezza nota, sia M il punto medio del lato AB. Sulla perpendicolare al piano del rettangolo condotta per M, prendere un punto V in modo che il piano del triangolo VCD formi col piano del rettangolo un angolo α tale che tg α =3/4.

Mostrare che la superficie laterale della piramide di vertice V e base ABCD è costituita da due triangoli rettangoli e da due triangoli isosceli. Sapendo che l'area di tale superficie laterale è $92a^2$ calcolare la lunghezza di AB.

Constatato che tale lunghezza è 5a, condurre un piano σ parallelo alla base della piramide e proiettare ortogonalmente su tale base il poligono sezione di σ con la piramide stessa, ottenendo in questo modo un prisma retto. Determinare la posizione di σ, per la quale il volume di tale prisma risulta massimo.

A completamente del problema, dimostrare che se i numeri reali positivi x, y variano in modo che la loro somma si mantenga costante allora il prodotto x^2y è massimo quando risulta x = 2y.

Durata massima della prova: 5 ore.

È consentito soltanto l'uso della calcolatrice tascabile non programmabile.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.