ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO 2000-2001
Indirizzo sperimentale: P.N.I.
Tema di MATEMATICA - 21 giugno 2001

Risoluzione a cura del prof. Luigi Tomasi (luigi.tomasi@libero.it)

QUESTIONARIO

1. Provare che una sfera è equivalente ai 2/3 del cilindro circoscritto.
2. Determinare il numero delle soluzioni dell'equazione:
$$xe^{x} + xe^{-x} - 2 = 0$$
3. Dimostrare che se $p(x)$ è un polinomio, allora tra due qualsiasi radici distinte di $p(x)$ c'è una radice di $p'(x)$.
4. Calcolare la derivata della funzione
$$f(x) = \arcsin x + \arccos x$$
Quali conclusioni se ne possono trarre per la $f(x)$?.
5. Calcolare l'integrale
$$\int \frac{\log x}{x} dx$$
6. Con uno dei metodi di quadratura studiati, si calcoli un'approssimazione dell'integrale definito
$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx$$
e si confronti il risultato ottenuto con il valore esatto dell'integrale.
7. Verificato che l'equazione $x - e^{-x} = 0$ ammette una sola radice positiva compresa tra 0 e 1 se ne calcoli un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati.
8. Una classe è composta da 12 ragazzi e 4 ragazze. Tra i sedici allievi se ne scelgono 3 a caso: qual è la probabilità che essi siano tutti maschi?
9. Spiegare il significato di *sistema assiomatico* con particolare riferimento alla sistemazione logica della geometria.
10. Dire, formalizzando la questione e utilizzando il teorema *del valor medio* o di *Lagrange*, se è vero che: «se un automobilista compie un viaggio senza soste in cui la *velocità media* è 60 km/h, allora almeno una volta durante il viaggio il tachimetro dell'automobile deve indicare esattamente 60 km/h».

RISPOSTE AL QUESTIONARIO

Quesito 1
Questo quesito si trova risolto in ogni libro di geometria dello spazio ed in ogni libro di analisi per il liceo scientifico.

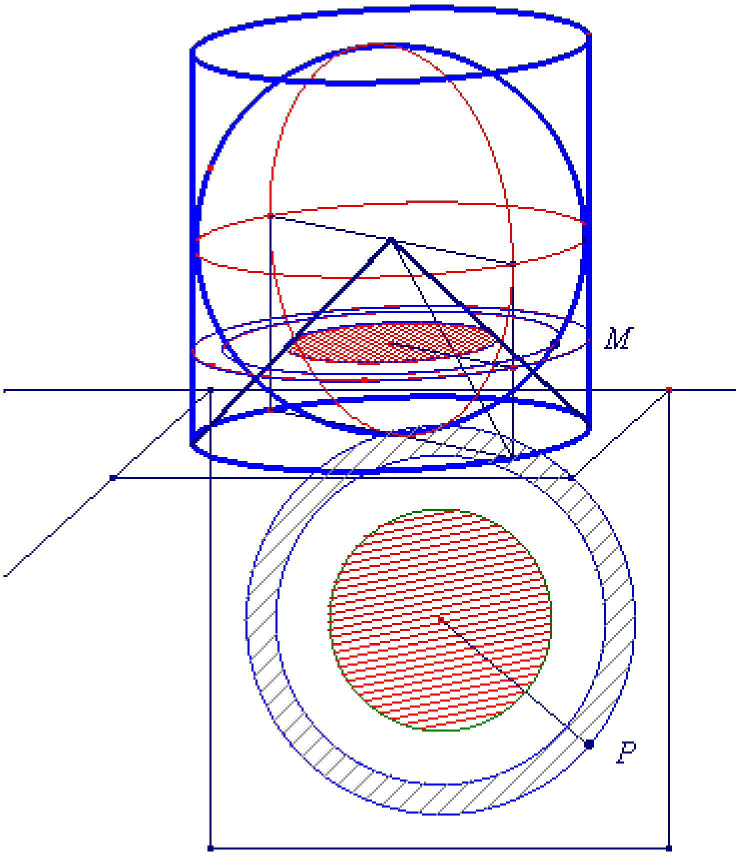


Figura 1. La "scodella di Galileo"

La dimostrazione si può fare senza il calcolo integrale, ma in questo caso occorre usare il principio di Cavalieri e la dimostrazione che fa uso della cosiddetta "scodella di Galileo".
Con il calcolo integrale, basta applicare la formula che fornisce il volume di un solido di rotazione

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

applicata ad una semicirconferenza in un opportuno sistema di assi cartesiani di centro la semicirconferenza. Si ottiene:

$$V = \pi \int_{-r}^{r} \left[\sqrt{r^2 - x^2}\right]^2 dx = 2\pi \int_0^r \left[\sqrt{r^2 - x^2}\right]^2 dx$$

e in conclusione:

$$V = 2\pi \left[r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^r = \frac{4}{3} \pi r^3 .$$

Il rapporto del volume della sfera con il volume del cilindro circoscritto (cilindro "equilatero") è dunque 2/3. C'è da aggiungere, ma la domanda non lo richiedeva, che 2/3 è anche il rapporto tra le superficie dei due solidi (Teorema di Archimede). Questo mirabile risultato di Archimede, che Plutarco testimonia fosse riportato anche sull'epigrafe tombale di Archimede, viene presentato come uno dei grandi teoremi della matematica nel seguente bel libro:
W. Dunham, *Viaggio attraverso il genio. I grandi teoremi della matematica*, Zanichelli, Bologna 1992, pag. 122.

Quesito 2

Per determinare il numero delle soluzioni dell'equazione:

$$xe^x + xe^{-x} - 2 = 0$$

si può procedere graficamente, scrivendo l'equazione nel seguente modo, ad essa equivalente, dopo che si sia osservato che certamente $x = 0$ non è soluzione dell'equazione:

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{x}$$

ovvero, se si ricorda la definizione della funzione coseno iperbolico, all'equazione:

$$\cosh(x) = \frac{1}{x}.$$

Risolvere quest'ultima equazione equivale ad intersecare le funzioni:

$$\begin{cases} y = \cosh(x) \\ y = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

Graficamente si ottiene quindi:

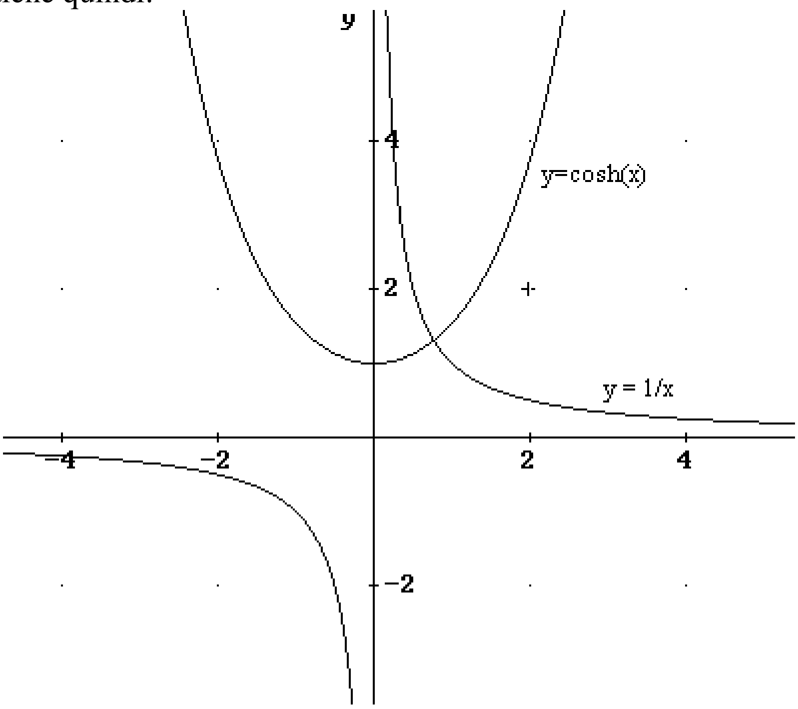


Figura2. Grafico delle funzioni ottenuto con DERIVE.

Esiste quindi una sola soluzione, che sta tra 0 e 1. In modo più rigoroso si può usare il teorema dei valori intermedi nell'intervallo [0, 1].

Quesito 3

A questa domanda si risponde con un'immediata applicazione del teorema di Rolle. Una qualsiasi funzione polinomiale, infatti, è una funzione derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}$; pertanto è anche continua. Inoltre, se α e β sono due radici distinte di $f(x)$, ne segue che nell'intervallo]α, β[esiste almeno un punto z tale che

$$f'(z) = 0.$$

Quesito 4

La funzione:

$$f(x) = \arcsin x + \arccos x$$

definita nell'intervallo chiuso [−1, 1], è derivabile nei punti nell'intervallo aperto]−1, 1[, con derivata:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0 .$$

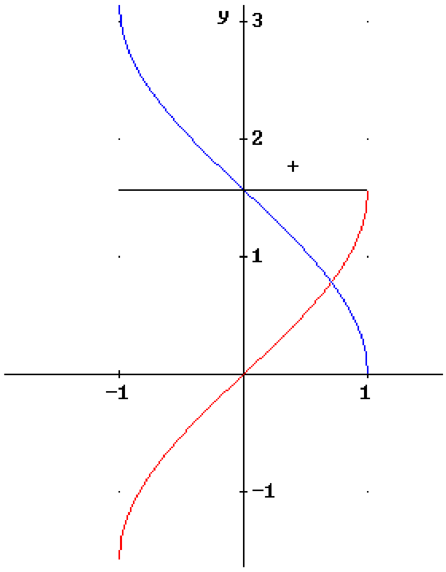
Per un corollario del teorema di Lagrange, segue che, nell'intervallo aperto $]-1,\ 1[$, la funzione è costante. Il suo grafico è dunque un segmento parallelo all'asse delle ascisse di equazione

$$y = \frac{\pi}{2} \quad \text{con } x \in [-1,\ 1] .$$

Naturalmente, se uno studente conosceva già l'identità (sulla quale però non sempre si insiste nella scuola superiore):

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

valida se $x \in [-1,\ 1]$, allora il quesito diventava quasi banale.



Quesito n. 5

Il calcolo dell'integrale dato si può fare immediatamente oppure con il metodo di sostituzione. È un caso particolare della seguente regola:

$$\int [f(x)]^{\alpha} f'(x)\ dx = \frac{1}{\alpha+1}\ [f(x)]^{\alpha+1}\ +\text{c}\ \ (\alpha \neq -1)$$

Si ha quindi:

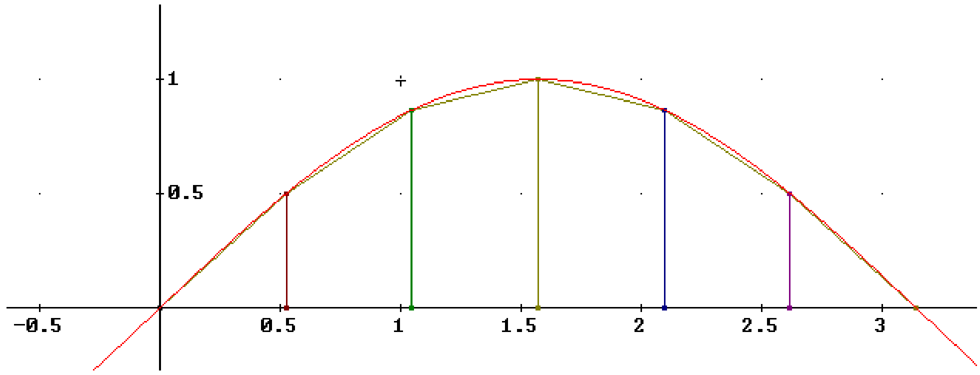
$$\int \frac{\ln x}{x}\ dx = \frac{1}{2}\ (\ln x)^2\ \ +\text{c}$$

Quesito 6

Si ha ovviamente:

$$S = \int_0^{\pi} \sin x\ dx = 2 .$$

Per approssimare tale integrale, si può usare uno dei metodi per calcolare in modo approssimato un integrale definito: metodo dei rettangoli, metodo dei trapezi, metodo di Cavalieri-Simpson, metodo "Montecarlo", ecc. Si rinvia ad un buon libro per i licei scientifici sperimentali.



Con il metodo dei trapezi applicato nell'intervallo [a, b] si ottiene

$$S \approx \frac{h}{2}\left(f(a)+2\cdot f(x_1)+2\cdot f(x_2)+\ldots+2\cdot f(x_{n-1})+f(b)\right).$$

Dividiamo l'intervallo [0, π/2] in 3 parti uguali. Essendo la funzione concava, si trova un valore approssimato per difetto

$$S \approx 2\cdot\frac{\pi}{12}\left(2\cdot\sin\frac{\pi}{6}+2\cdot\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

ovvero

$$S \approx \frac{\pi}{6}\left(2+\sqrt{3}\right)\approx 1{,}954097\,.$$

Quesito 7

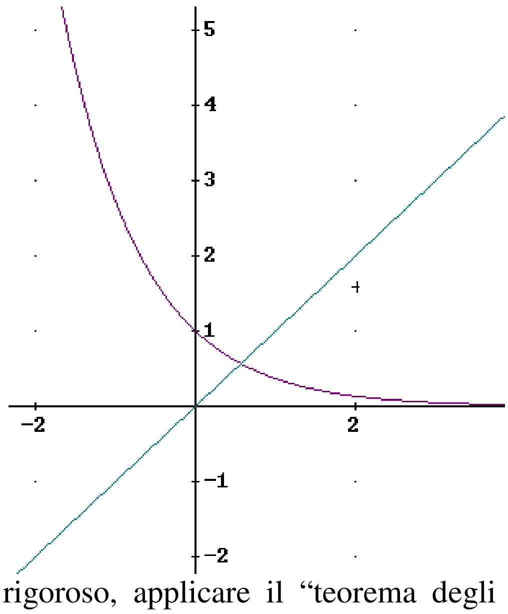
Per verificare che l'equazione

$$x-e^{-x}=0$$

ammette una ed una sola radice positiva compresa tra 0 e 1, si può procedere per via grafica, intersecando le funzioni elementari:

$$\begin{cases} y=x \\ y=e^{-x} \end{cases}$$

Si ottiene il seguente grafico:



Si può anche, in modo più rigoroso, applicare il "teorema degli zeri delle funzioni continue" nell'intervallo [0, 1] alla funzione

$$f(x)=x-e^{-x}\,.$$

Applicando uno dei metodi approssimati, ad esempio il metodo delle tangenti di Newton, si trova (dopo 5 iterazioni) la radice approssimata:

$$\alpha = 0,5671432904...$$

Quesito 8

La probabilità si può calcolare direttamente:

$$p(E) = \frac{\binom{12}{3}}{\binom{16}{3}} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{16 \cdot 15 \cdot 14} = \frac{11}{28} = 0,3928...$$

Oppure si disegna un diagramma ad albero e poi si applica il teorema della probabilità composta. Si pensa ad una estrazione di tre nomi da un'urna, dove sono stati inseriti tutti i nomi degli allievi della classe, senza reimbussolamento.

Si ottiene quindi:

$$p(E) = p(A) \cdot p(B / A) \cdot p(C / A \cap B) = \frac{12}{16} \cdot \frac{11}{15} \cdot \frac{10}{14} = \frac{11}{28} = 0,3928....$$

Quesito n. 9

Spiegare il significato di *sistema assiomatico* con particolare riferimento alla sistemazione logica della geometria.

Questo quesito sembra adatto più alla prova orale che alla prova scritta perché si presta ad un collegamento naturale tra matematica e filosofia. Risulta anche più difficile, per la commissione, costruire una "risposta criterio" che serva poi da guida per la valutazione degli elaborati. Per uno svolgimento adeguato si rinvia a un buon testo di geometria. Si rinvia anche alle voci Assioma/Assiomatico, in S. Baruk, *Dizionario di matematica elementare*, edizione a cura di F. Speranza e L. Grugnetti, Zanichelli, Bologna, 1998, pag. 50. Per i riferimenti storici si rinvia ai capitoli su Euclide ed Hilbert, ad esempio, nella seguente opera di riferimento:

M. Kline, *Storia del pensiero matematico,* vol. I e II, Einaudi, Torino 1991.

Quesito n. 10

Questo quesito richiede non solo l'enunciato del teorema di Lagrange, ma anche di motivare perché si chiama "teorema del valor medio". Molto spesso nei libri di testo si cita il teorema di Lagrange chiamandolo anche "del valor medio", ma non tutti i libri di testo spiegano perché si chiama in questo modo. E' chiaro che per dare questa spiegazione occorre riferirsi alla interpretazione cinematica di una funzione $y = f(x)$ in cui x viene pensato come istante di tempo e y come ascissa di un punto mobile. La funzione deve essere continua in $[a, b]$ e derivabile almeno nei punti interni. Occorre quindi riferirsi al "diagramma orario" e pensare la derivata prima della funzione come velocità istantanea. Con questa interpretazione cinematica l'enunciato del quesito diventa chiaro, perché se per un certo intervallo di tempo ci muoviamo alla velocità media di 60 km/h, vi sarà almeno un istante in cui la velocità è stata esattamente di 60 km/h. Questo si traduce graficamente nel ben noto grafico relativo al significato geometrico del teorema di Lagrange, presente in ogni libro di testo.

COMMENTO AL TEMA DI MATEMATICA DEL P.NI. E ALLA NUOVA STRUTTURA DELLA PROVA D'ESAME

Il tema del PNI assegnato quest'anno all'esame di stato ha presentato la novità, preannunciata da diversi mesi nel sito del Ministero della P.I., del questionario che è andato a sostituire uno dei tre problemi che fino allo scorso anno sono stati dati all'esame di Stato di liceo scientifico. Questa innovazione ha provocato molte discussioni, con giuste critiche, tra gli insegnanti - in particolare nella lista "Cabrinews" (gestita dall'IRRE Emilia Romagna) - sia sul modo scelto dal MPI per introdurre questa novità che sulla valutazione di una tale prova. Dopo le discussioni e le critiche c'è stato un certo miglioramento degli esempi pubblicati in Internet dal MPI.
A conti fatti, dopo la prova, sembra che la novità del questionario sia da apprezzare, soprattutto perché le domande proposte erano facili e formulate in modo da non essere puramente teoriche - come si temeva – e hanno presentato questioni varie che finalmente spaziavano su diversi temi.
Per quasi tutti gli allievi il tema è risultato fattibile e particolarmente facile per quelli più preparati. Il problema 1 del tema sperimentale (PNI), tuttavia, non è dello stesso livello di difficoltà del problema 2; indubbiamente il primo richiedeva più intuizione geometrica (soprattutto nello studio del luogo geometrico) ed anche più competenze di manipolazione trigonometrica (nella parte finale). Se ne è avuta conferma nelle valutazioni degli elaborati. Con la nuova struttura, gli allievi dovevano scegliere un solo problema e cinque dei dieci quesiti. Quasi tutti hanno scelto il problema 2 perché era nettamente più facile. Si tenga presente che i due problemi andavano "pesati"in modo uguale, con lo stesso punteggio, perché il testo della prova richiedeva la risoluzione di un problema e di 5 quesiti del questionario. Quegli allievi, dunque, che hanno scelto il primo problema sono stati penalizzati nel punteggio.
Gli allievi "medi", quelli che hanno sempre studiato guadagnadosi dignitosamente la sufficienza o anche una valutazione discreta, inoltre, mi sembra si siano trovati meglio degli studenti di pari livello che hanno fatto l'esame gli scorsi anni. In genere, al termine della prova sono usciti con più soddisfazione e con l'impressione di aver fatto qualcosa di più, se non bene, rispetto a quello che succedeva di solito negli anni precedenti.
Le domande del questionario, a differenza dei due problemi, sono sembrate abbastanza equilibrate tra loro, anche se in alcuni punti dovevano essere più precise nelle richieste (ad esempio nei quesiti dove si chiedeva di trovare un valore approssimato di una radice era opportuno dire fino a che cifra arrivare). In genere le domamde erano facili e senz'altro adatte a tutti gli allievi.
E allora, va tutto bene in questa nuova struttura della prova di matematica?
In realtà rimangono aperte le questioni (non di poco conto) già più volte sottolineate da molti insegnanti, in particolare quelli intervenuti nella lista di discussione "Cabrinews":
- dello sfondo non ben definito (per usare un eufemismo) dei programmi o dei curricoli, nei quali non sono precisate le conoscenze e le competenze obbligatorie da raggiungere (sulle quali costruire la prova d'esame);
- dell'uso delle calcolatrici programmabili e simbolico-grafiche ancora vietato (anche nei licei sperimentali PNI);
- della valutazione della prova (che a parere di molti insegnanti dovrebbe essere fatta sulla base di una griglia fissata a livello nazionale, per evitare di creare eccessive disparità tra le commissioni, precisando non solo il livello di eccellenza, ma anche quello di sufficienza).

Luigi Tomasi