ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO 2001-2002

Indirizzo sperimentale: P.N.I.
Tema di MATEMATICA - 20 giugno 2002
A cura di Luigi Tomasi (luigi.tomasi@libero.it)

PROBLEMA 2

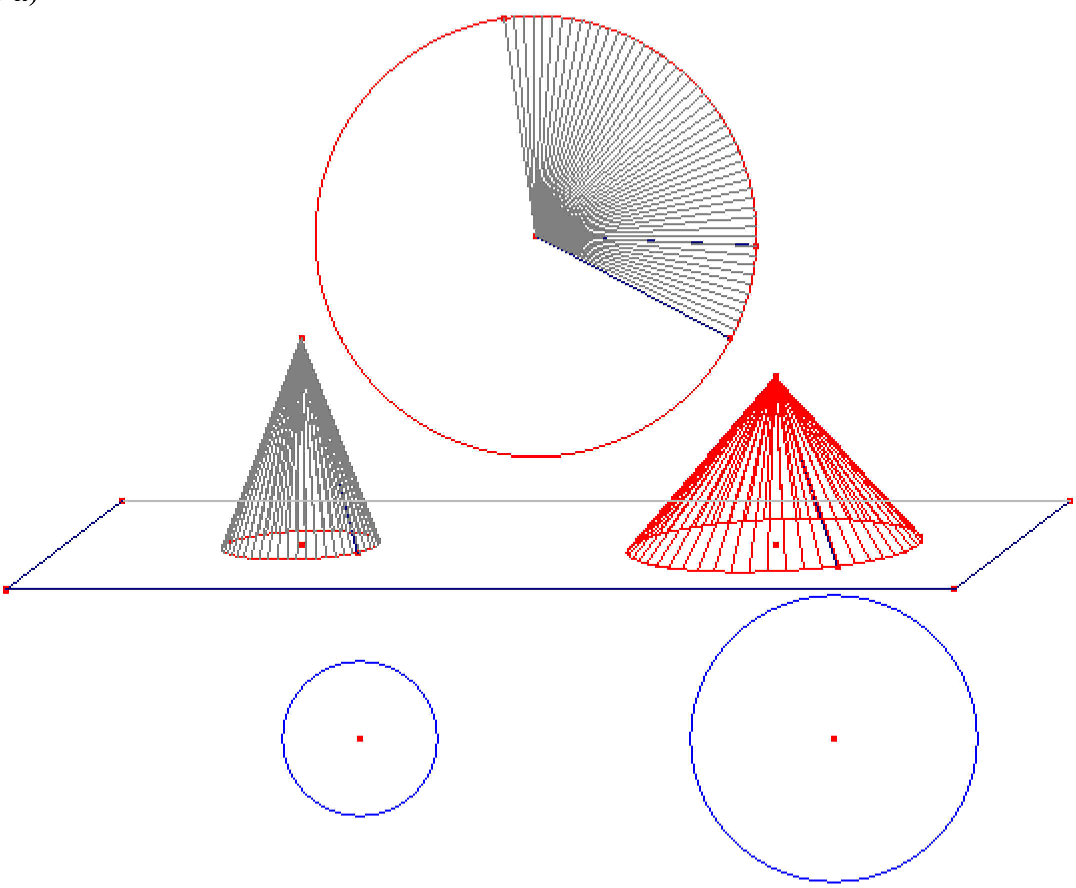
I raggi OA = OB = 1 *metro* tagliano il cerchio di centro O in due settori circolari, ciascuno dei quali costituisce lo sviluppo della superficie laterale di un cono circolare retto.

Si chiede di determinare:

1. il settore circolare (arco, ampiezza e rapporto percentuale con il cerchio) al quale corrisponde il cono C di volume massimo, il valore V di tale volume massimo e il valore V' assunto in questo caso dal volume del secondo cono C';
2. la capacità complessiva, espressa in litri, di C e di C';
3. un'approssimazione della misura, in gradi sessagesimali, dell'angolo di apertura del cono C, specificando il metodo numerico che si utilizza per ottenerla.

SOLUZIONE DEL PROBLEMA 2

Punto a)



La circonferenza è 2π. Il problema diventa più semplice nei calcoli se si chiama x il raggio di base del primo cono. Essendo $0 \le 2\pi x \le 2\pi$, segue che $0 \le x \le 1$. Il raggio base del secondo cono sarà pertanto $1-x$.
Il volume del primo cono, in m^3, diventa:

$$V_1(x) = \frac{1}{3}\pi x^2 \sqrt{1-x^2} \ .$$

Limitandoci alla funzione $f(x) = x^2\sqrt{1-x^2}$, con $0 \le x \le 1$. Eseguendo la derivata prima e studiandone il segno, si trova che il massimo del volume del primo cono si ha per $x = r_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

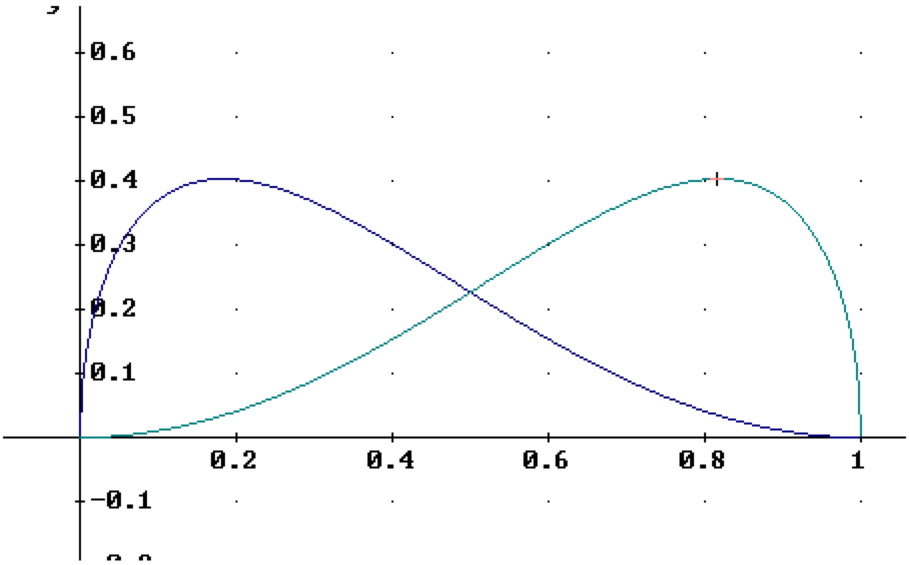
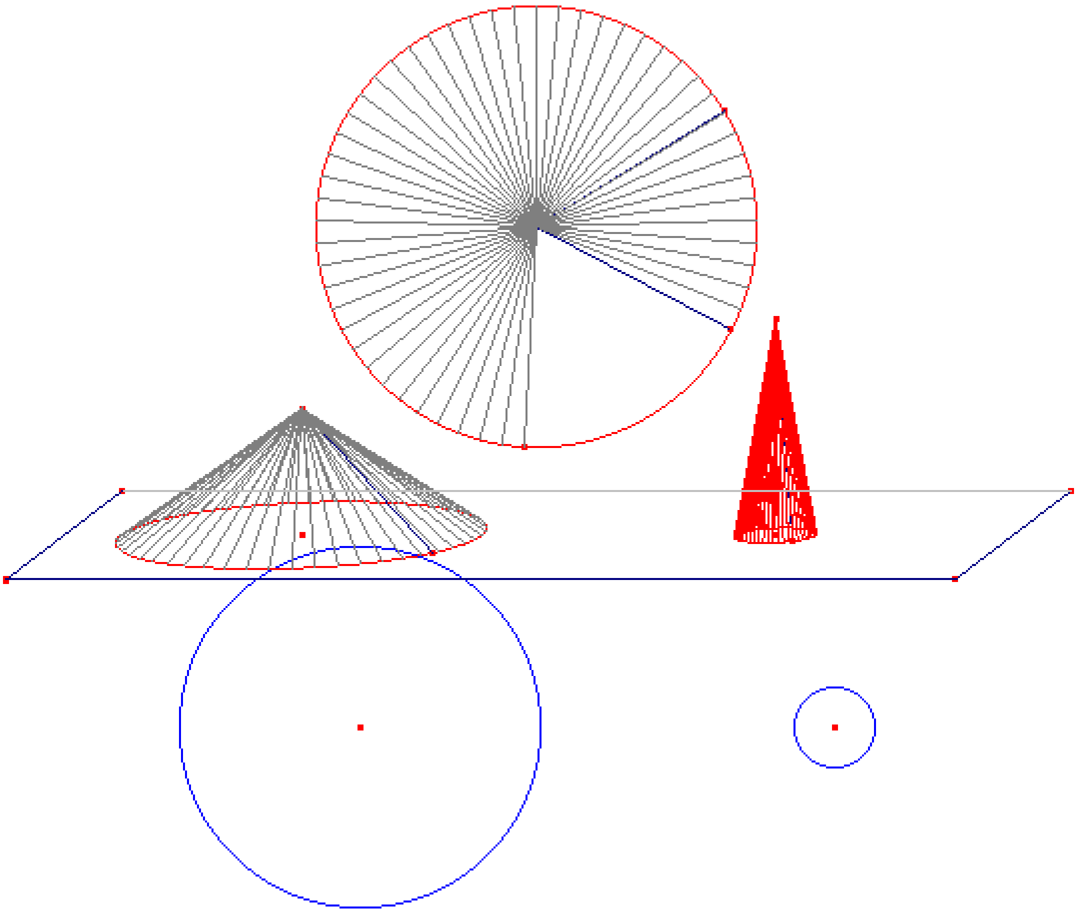


Fig. Grafico del volume dei due coni in funzione
del raggio di base del primo cono



Il volume massimo del primo cono vale dunque:

$$V_1 = \frac{2}{27}\pi\sqrt{3}\ .$$

L'area del settore circolare corrispondente diventa:

$$S_1 = \pi\sqrt{\frac{2}{3}} \approx \pi \cdot 0{,}816\ldots .$$

Quindi, quando il volume del primo cono è massimo, l'area del primo settore circolare è circa l'81,6% del cerchio dato.
Il secondo cono, nel caso in cui il volume del primo cono sia massimo, ha raggio base:

$$r_2 = 1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\ .$$

Quindi il volume del secondo cono è:

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi\left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 \sqrt{1 - \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2}\ .$$

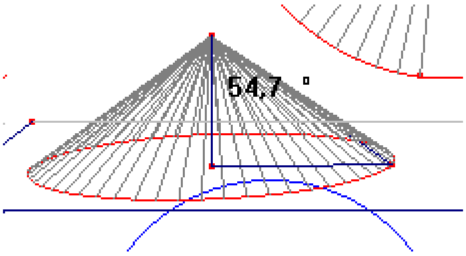
Punto b)
La capacità complessiva dei due coni espressa in litri, nel caso in cui il volume di uno dei due coni sia massimo, è:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{2}{27}\pi\sqrt{3} + \frac{1}{3}\pi\left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 \sqrt{1 - \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2} \approx 437{,}7\ l$$

Punto c)
L'angolo di apertura del cono di volume massimo si ottiene risolvendo l'equazione:

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

nell'intervallo [0, 1]. Si trova un angolo di semiapertura del cono $\theta = arcsen\sqrt{\frac{2}{3}} \approx (54{,}7356...)°$.



Per determinare tale angolo non ci sarebbe bisogno di un metodo numerico, in quanto serve soltanto una calcolatrice scientifica che possieda la funzione arcsen$x$. Volendo tuttavia usare un metodo numerico occorre risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = \sin x \\ y = \sqrt{\frac{2}{3}} \end{cases}$$

ovvero, determinare il minimo zero positivo della seguente funzione:

$$f(x) = \sin x - \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

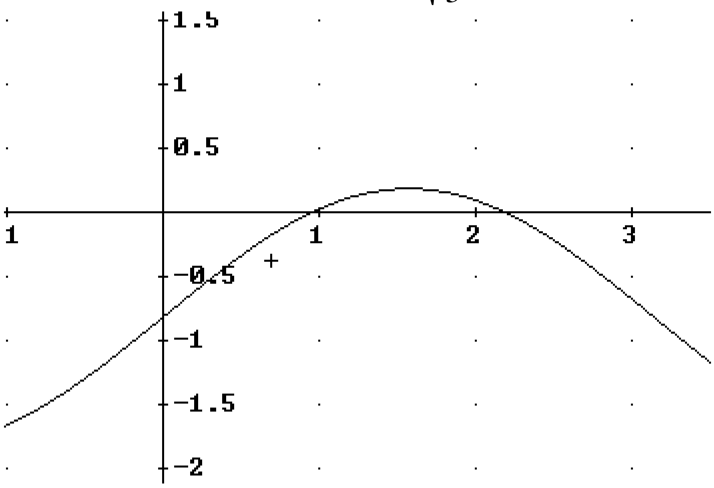


Figura. Grafico della funzione $f(x) = \sin x - \sqrt{\frac{2}{3}}$

Per determinare un valore approssimato della radice, che è compresa tra 0 e 1, si può applicare il metodo di Newton, trovando il valore indicato sopra.