ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO 2002-2003
Corso Sperimentale P.N.I.
Tema di MATEMATICA - 19 giugno 2003

Svolgimento a cura della prof.ssa Sandra Bernecoli e del prof. Luigi Tomasi
(luigi.tomasi@libero.it)

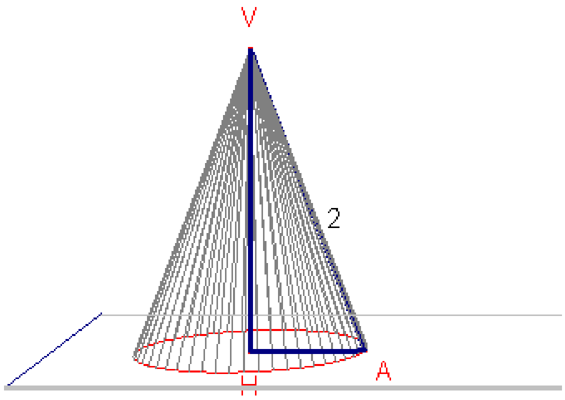
RISPOSTE AI QUESITI DEL QUESTIONARIO

Quesito n. 1
Le partite di calcio della serie A, con 18 squadre, sono in totale (andata e ritorno) in numero di 306 perché si tratta del numero di disposizioni semplici, di classe 2, a partire da 18 oggetti:
$$D_{18,2} = 18 \cdot 17 = 306.$$

Quesito n. 2
Sia *A* l'evento "si estrae la scatola A".
Sia *B* l'evento "si estrae la scatola B".
Sia *C* l'evento "si estrae la scatola C".
D/A rappresenta l'evento "è stata estratta una lampada difettosa condizionata al fatto che è stata estratta la scatola A". Quindi: $p(D/A) = 5/100$.
D/B rappresenta l'evento "è stata estratta una lampada difettosa condizionata al fatto che è stata estratta la scatola B". Quindi $p(D/B) = 20/100$.
D/C rappresenta l'evento "è stata estratta una lampada difettosa condizionata al fatto che è stata estratta la scatola C". Quindi $p(D/C) = 10/100$.
Sia *D* l'evento "si sceglie a caso una scatola e si estrae una lampada".
L'evento *D* è unione degli eventi incompatibili $D \cap A$, $D \cap B$, $D \cap C$:
$$D = (D \cap A) \cup (D \cap B) \cup (D \cap C).$$
Inoltre, si ha:
$$p(D \cap A) = p(A) \cdot p(D/A)$$
$$p(D \cap B) = p(B) \cdot p(D/B)$$
$$p(D \cap C) = p(C) \cdot p(D/C).$$
Pertanto
$$p(D) = p(D \cap A) + p(D \cap B) + p(D \cap C) =$$
$$= p(A) \cdot p(D/A) + p(B) \cdot p(D/B) + p(C) \cdot (D/C) =$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{100} + \frac{1}{3} \cdot \frac{20}{100} + \frac{1}{3} \cdot \frac{10}{100} = \frac{1}{3} \cdot \frac{35}{100} = \frac{7}{60} \approx 11{,}7\%.$$

Quesito n. 3
Chiamiamo *x* la misura dell'altezza del cono. Per il teorema di Pitagora, il raggio di base del cono è:
$$r = \overline{HA} = \sqrt{4 - x^2}.$$
Il volume del cono sarà pertanto:
$$V(x) = \frac{1}{3}\pi\left(4 - x^2\right)x$$

con $0 \le x \le 2$.



Occorre rendere massima la funzione:

$$f(x) = \left(4 - x^2\right)x .$$

La derivata di f è:

$$f'(x) = 4 - 3x^2 .$$

Esaminando il segno della $f'(x)$ si trova che il volume massimo si ha per $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$. In tale caso il raggio di base del cono vale $r = \frac{2\sqrt{6}}{3}$. Il volume massimo, espresso in dm^3, vale dunque

$$V = \frac{16}{27}\pi\sqrt{3} \approx 3,2245...\ dm^3 = 322,45...\ cl .$$

Quesito n.4

Basta prendere un polinomio che abbia quattro zeri, per esempio il polinomio di quarto grado:

$$p(x) = x(x-1)(x-2)(x-3).$$

Consideriamo la funzione polinomiale $p_1(x) = p(x) + 2$ (ottenuta con una traslazione dalla precedente); ovviamente il grafico di $p_1(x)$ intersecherà la retta $y=2$ in quattro punti.

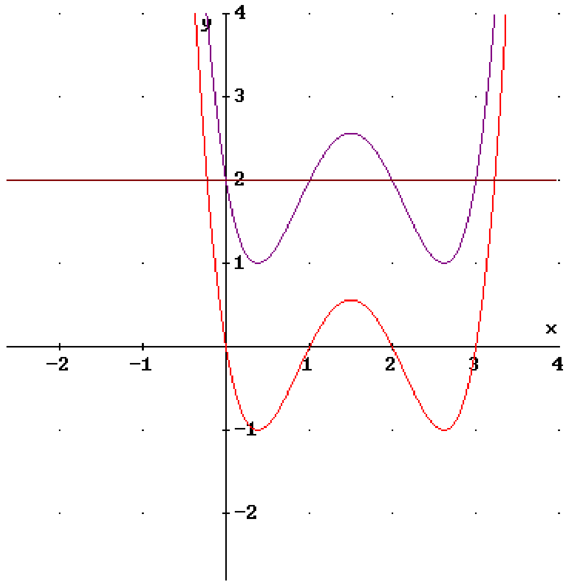


Figura 2

Quesito n. 5

La funzione $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ...a_1 x + a_0$ rappresenta una funzione polinomiale definita in R e, quindi, ivi continua e derivabile. La derivata prima della funzione data è:

$$f'(x) = nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + ...a_1 .$$

Se x_1 e x_2 sono due radici di $y = f(x)$ si potrà applicare il teorema di Rolle alla funzione $f(x)$ relativamente all'intervallo $[x_1,\ x_2]$ e quindi esisterà almeno uno zero, interno a tale intervallo, della funzione $f'(x)$.

Quesito n. 6

L'equazione $x^3 + bx - 7 = 0$ ha almeno una radice reale, per ogni valore di *b,* perché

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(x^3 + bx - 7\right) = \pm\infty .$$

Conviene esaminare la funzione, ovviamente continua e derivabile ovunque, che ha per espressione:

$$g(x) = x^3 + bx .$$

Il centro di simmetria di quest'ultima curva è l'origine degli assi (è dispari), ovvero il suo punto di flesso $O(0,\ 0)$. Affinché $g(x) = x^3 + bx$ abbia tre radici reali, la funzione deve avere un massimo relativo e un minimo relativo. Poiché $g'(x) = 3x^2 + b$, deve essere $b < 0$. In tale ipotesi, le ascisse dei punti di minimo e di massimo relativi sono rispettivamente:

$$x = \pm\sqrt{\frac{-b}{3}} .$$

La funzione $f(x) = x^3 + bx - 7 = g(x) - 7$ può essere vista come la $g(x) = x^3 + bx$ traslata verso il "basso" di 7. Per fare in modo che $f(x)$ abbia tre radici, occorre che il valore del massimo di $g(x)$ sia maggiore di 7. Si ottiene pertanto: $f\left(-\sqrt{\frac{-b}{3}}\right) > 7$, ovvero: $\frac{2\sqrt{3}\,(-b)^{3/2}}{9} > 7$.

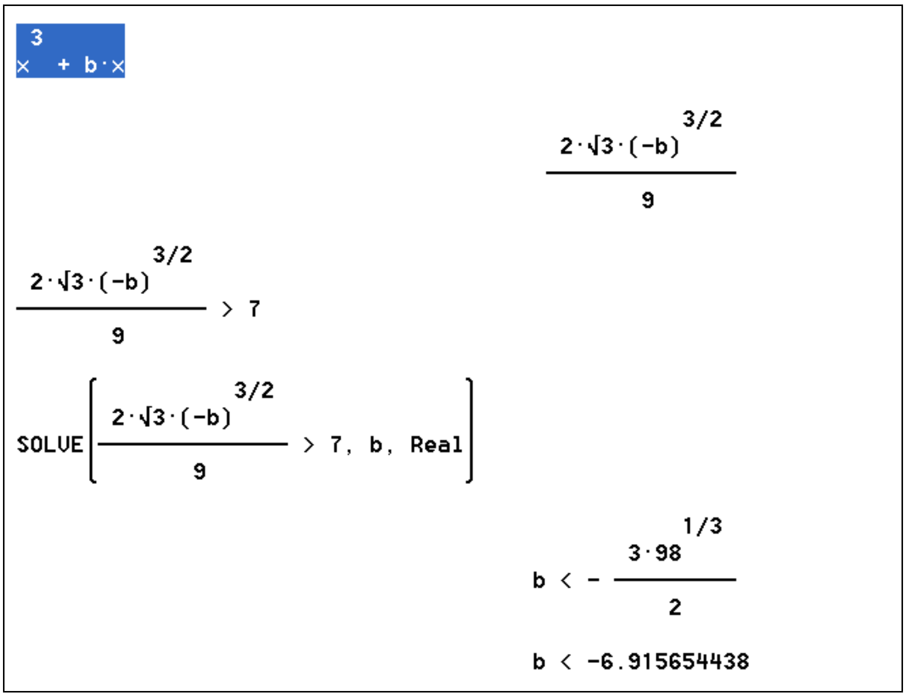


Figura 3

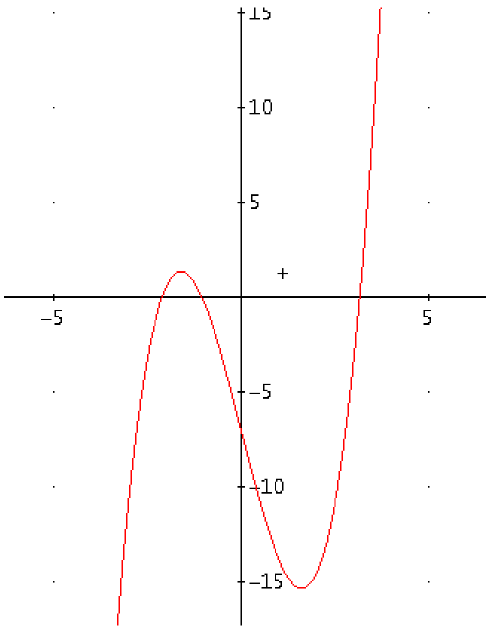
Di conseguenza, si ha

$$b < -\frac{3}{2}\sqrt[3]{98}\,;$$

per b si può prendere un qualunque valore

$$b < -6{,}915654438\ldots,$$

ad esempio, $b = -12$.



Quesito n. 7

La verifica dell'uguaglianza è facile da effettuare. Si ha ovviamente:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \left[\arctan x\right]_0^1 = \frac{\pi}{4},$$

da cui si ottiene l'uguaglianza:

$$4 \cdot \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \pi .$$

L’integrale notevole $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ può essere dunque utilizzato per un calcolo approssimato di π. Si può utilizzare il metodo dei rettangoli e trovare approssimazioni per eccesso e per difetto suddividendo l’intervallo [0, 1] di ampiezza 1 in *n* parti uguali, attribuendo a *n* valori naturali crescenti.

Sia $h = \frac{1}{n}$. Un’approssimazione per eccesso, dal momento che la funzione integranda è decrescente nell’intervallo [0,1], la si ottiene calcolando la seguente somma:

$$4h\left[f(0) + f(h) + f(2h) + ... + f\left((n-1)h \right) \right] > \pi .$$

Un’approssimazione per difetto la si ottiene calcolando la seguente somma:

$$4h\left[f(h) + f(2h) + f(3h) + ... + f\left(nh \right) \right] < \pi .$$

Se si usa invece la formula dei trapezi, con n = 10, si ottiene (figura 4):

$$\pi = 4\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \approx 4 \cdot \frac{1}{n} \cdot \left[\frac{1}{2}\left(f(a) + f(b) \right) + \sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) \right]$$

ovvero, sostituendo:

$$\pi = 4\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \approx 4 \cdot \frac{1}{10} \cdot \left[\frac{1}{2}\left(f(0) + f(1) \right) + \sum_{i=1}^{n-1} f\left(i\frac{1}{10} \right) \right] \approx 3{,}139925....$$

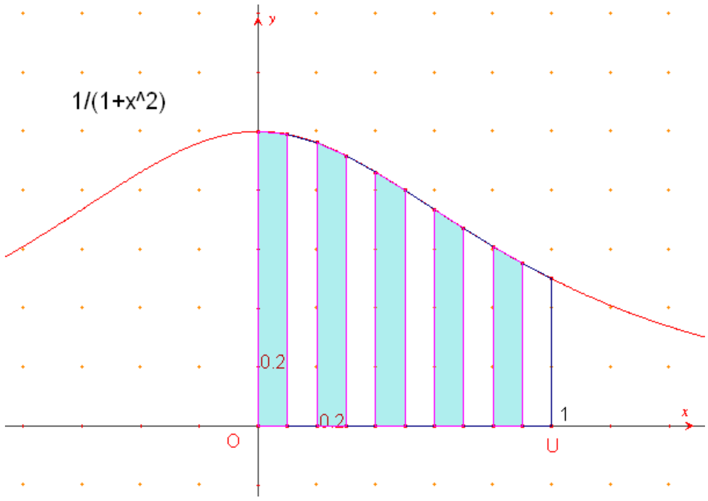
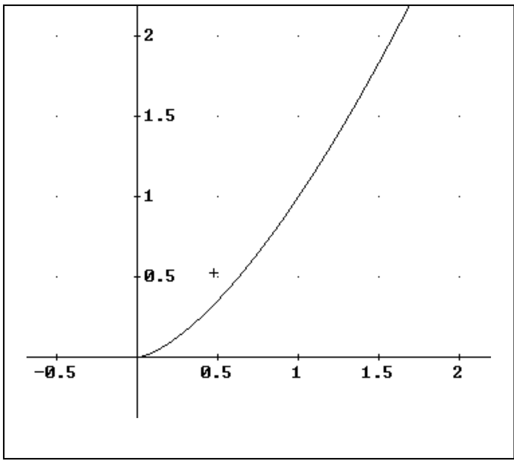


Figura 4

Quesito n. 8

Il valore dell’integrale è ovviamente $\frac{\pi}{4}$. Il solido richiesto potrebbe essere un “solido di rotazione” ottenuto ruotando attorno all’asse delle *x* tra le rette *x*=0 e *x*=1 la curva grafico di $f(x) = x^{3/2}$ (figura 5).



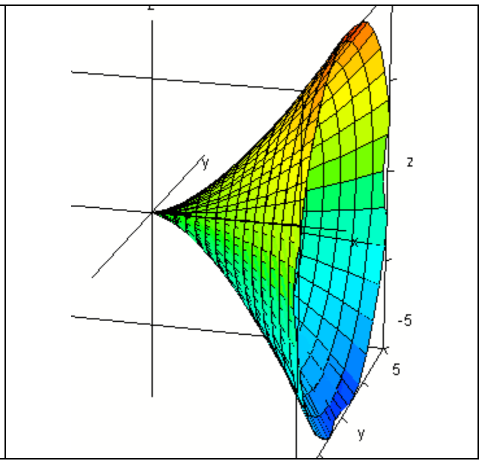


Figura 5

Dal momento che l'integrale definito è un numero potrebbe anche essere un qualsiasi solido il cui volume sia uguale a π/4, per esempio un cilindro di raggio di base 1 e altezza $\frac{1}{4}$. Ma, dato il testo ambiguo, potrebbe anche non essere un solido di rotazione, ad esempio un parallelepipedo rettangolo con base un quadrato di lato 1 e altezza uguale a $\frac{\pi}{4}$. Gli esempi, ovviamente, sono infiniti.

Quesito n.9

Se $f''(x)=\sin x$, allora integrando $f'(x)=-\cos x+c$, con $c\in R$, ed essendo $f'(0)=1$ si avrà $c=2$.
Se $f'(x)=-\cos x+2$, integrando un'altra volta si ottiene $f(x)=-\sin x+2x+k$, con $k\in R$.
Si può allora calcolare $f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f\left(0\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\pi=\pi-1$.

Quesito n.10
Si consideri la funzione $f(x)=x^3-3x+1$. Tale funzione è continua e derivabile in R.
La funzione ha limite $-\infty$ per x che tende a $-\infty$ e limite $+\infty$ per x che tende a $+\infty$.
Si ha che $f'(x)=0$ per $x_1=-1$ e $x_2=1$ e che x_1 è il punto di massimo relativo e x_2 è il punto di minimo relativo per la funzione.
Dal momento che $f(-1)=3>0$ e $f(1)=-1<0$, la funzione ammetterà tre radici distinte di cui una cade tra –2 e –1, una tra –1 e 1 e la terza tra 1 e 2.
Essendo $f(0)=1$ e $f(1)=-1$ allora uno zero cadrà tra 0 e 1.
Per trovarne una approssimazione migliore si potrà ad esempio utilizzare il metodo di bisezione.
Calcolando $f(1/2)=-11/8<0$ si può concludere che la radice cade tra 0 e 1/2;
Calcolando $f(1/4)=17/64>0$ si può concludere che la radice cade tra 1/4 e 1/2;
Calcolando $f(3/8)=-37/512<0$ si può concludere che la radice cade tra 1/4 e 3/8.
Si può proseguire dimezzando ogni volta l'intervallo e assumendo come valore approssimato il punto di mezzo dell'intervallo.
La radice più vicina all'origine (figura 6), compresa tra 0 e 1, vale circa $\alpha=0{,}347296...$

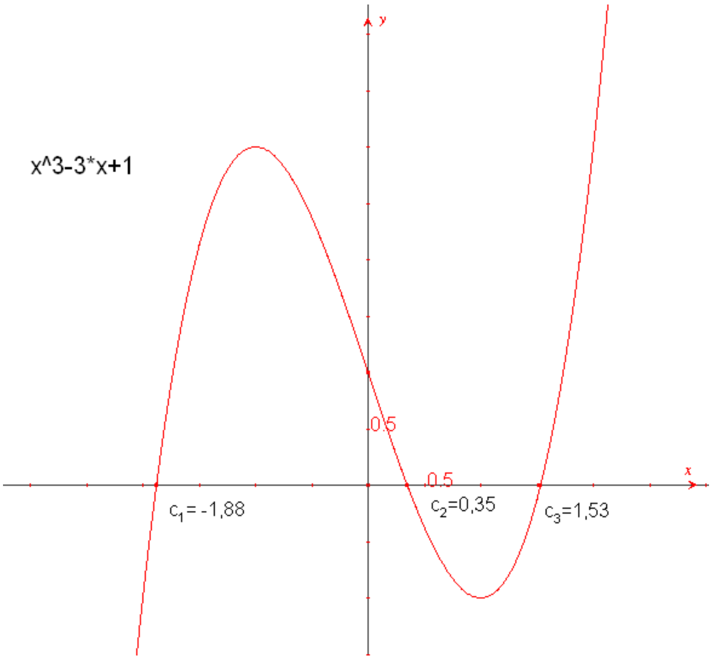


Figura 6