ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO 2003-2004
Corso Sperimentale P.N.I.
Tema di MATEMATICA - 17 giugno 2004

Svolgimento a cura della prof.ssa Sandra Bernecoli e del prof. Luigi Tomasi
(luigi.tomasi@libero.it)

RISOLUZIONE DEL PROBLEMA 2

Punto 1

La funzione data, $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{2b}\right) + x$, è definita in R, dispari, continua e derivabile.

Si osserva che $f(a) = a$, $f(b) = b$. Poiché $\frac{a+b}{2}$ è compreso tra $f(a) = a$ e $f(b) = b$ (è addirittura la media aritmetica dei due valori), per la continuità di $f(x)$ - in conseguenza del "teorema dei valori intermedi" - esiste certamente un valore di *x*, interno all'intervallo di estremi *a*, *b*, per cui vale $f(x) = \frac{a+b}{2}$. Ciò significa che la retta di equazione $y = \frac{a+b}{2}$ interseca sicuramente - almeno una volta - il grafico della funzione $f(x)$.

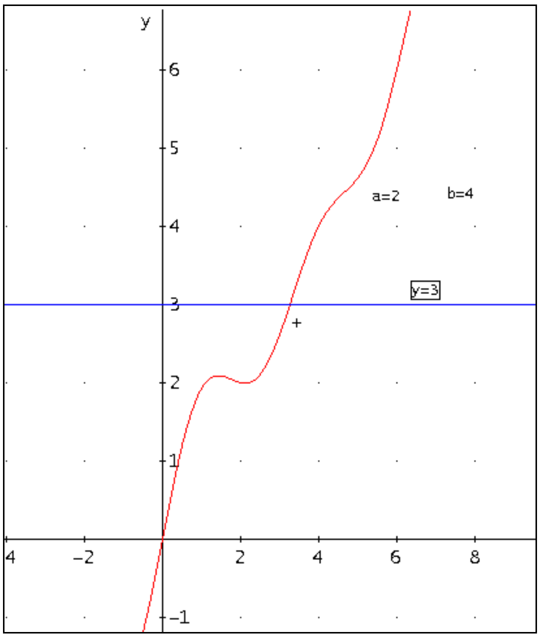

Figura 1. Grafico della $f(x)$ con *a*=2 e *b*=4.

Si poteva anche osservare che il limite della funzione data per *x* che tende a +∞ è +∞ e per *x* che tende a −∞ è −∞, dal momento che la funzione è somma della funzione limitata $f_1(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{2b}\right)$ e della funzione identità $f_2(x) = x$ che tende rispettivamente a +∞ e −∞.
L'insieme delle immagini di $f(x)$ sarà pertanto R. La dimostrazione di questi due limiti è un po' delicata perché richiede l'uso del teorema del confronto (o dei "due carabinieri"). Osservato che:

$$-1 \le \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{2b}\right) \le 1$$

possiamo concludere che, per ogni x, si ha:

$$x-1 \le f(x) \le x+1 .$$

Poiché si ha $\lim_{x\to+\infty}(x-1) = \lim_{x\to+\infty}(x+1) = +\infty$, ne consegue (per il teorema del confronto sui limiti) che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; analogo ragionamento si può fare per $x \to -\infty$ per verificare che $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Dal momento che $\frac{a+b}{2}$ è un numero reale e che la funzione è continua in R, esisterà sicuramente almeno un valore di x per cui $f(x) = \frac{a+b}{2}$.

Punto 2

Ponendo ora $a = 2b = 2$, si ottiene la funzione $g(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + x$, ovviamente definita in R, dispari, continua e derivabile in R. Usando l'identità goniometrica (detta di solito "prima formula di duplicazione"):

$$\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{1}{2} \cdot \sin(2\alpha)$$

si ottiene $g(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin(\pi x) + x$.

La funzione $g(x)$ è quindi somma della funzione sinusoidale (limitata) $f_1(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin(\pi x)$, periodica di periodo 2, il cui insieme delle immagini è l'intervallo chiuso $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$, con la funzione identità $f_2(x) = x$. Il grafico della funzione $g(x)$ interseca la retta di equazione $y = x$ per i valori di x per cui $\sin(\pi x) = 0$ ossia per x=k, con k intero.

La derivata prima della funzione della funzione $g(x)$ è $g'(x) = \frac{1}{2} \cdot \pi \cos(\pi x) + 1$. Per studiarne il segno occorre risolvere la disequazione $g'(x) \ge 0$. Si può risolvere in modo grafico, utilizzando l'intersezione tra due opportune funzioni. Possiamo infatti scrivere la disequazione nella forma seguente: $\cos(\pi x) \ge -\frac{2}{\pi}$. L'equazione $\cos(\pi x) = -\frac{2}{\pi}$ ammette infinite soluzioni. Occorre poi disegnare la funzione $y = \cos(\pi x)$ e la retta $y = -\frac{2}{\pi}$ (vedi figura 2, ottenuta con *DERIVE* nella quale sono anche rappresentate le regioni di piano che verificano la disequazione $g'(x) \ge 0$).

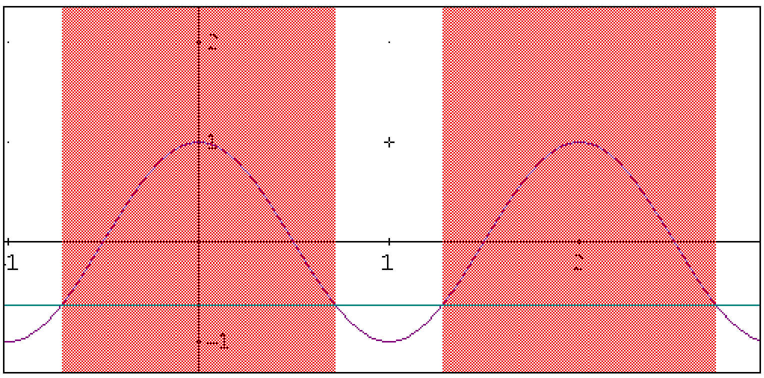

Figura 2. Soluzioni nel piano della disequazione $g'(x) \ge 0$.

Risolvendo l'equazione $\cos(\pi x) = -\dfrac{2}{\pi}$ si ottengono infinite soluzioni, che corrispondono ai punti di massimo e di minimo relativo delle funzione $g(x)$.

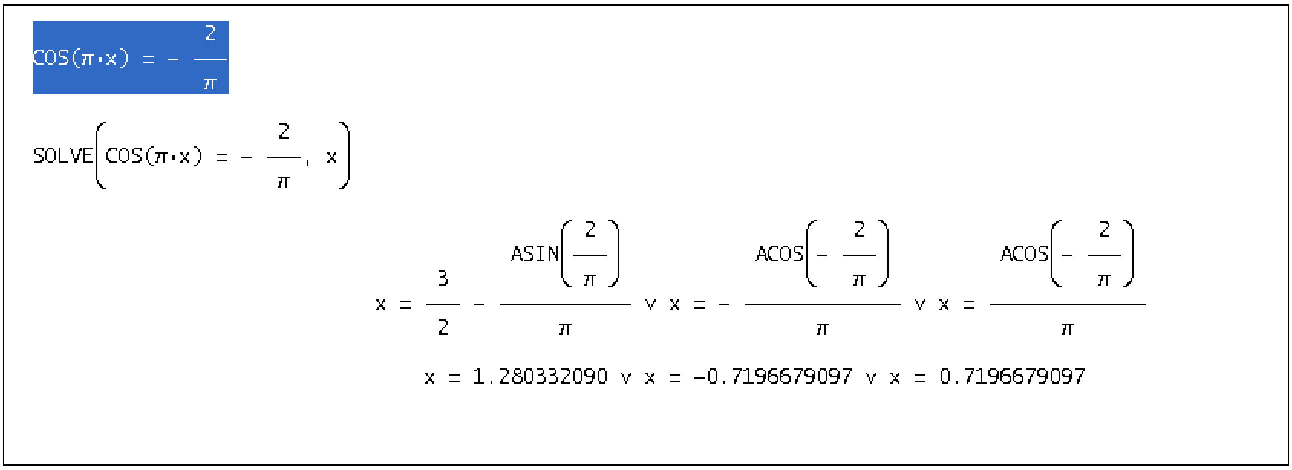

Figura 3. Risoluzione dell'equazione $\cos(\pi x) = -\dfrac{2}{\pi}$ con DERIVE.

La derivata seconda della funzione è: $g''(x) = -\dfrac{1}{2}\cdot \pi^2 \sin(\pi x)$. Studiandone il segno, si vede facilmente che i flessi della funzione $y = g(x)$, si trovano nei punti $x = k$, con k intero, ovvero nei punti di intersezione del grafico di $g(x)$ con la bisettrice del primo e terzo quadrante.
Una volta determinati i punti di massimo e di minimo, si può infine tracciare il grafico della funzione $g(x) = \dfrac{1}{2}\cdot \sin(\pi x) + x$, ottenendo la seguente figura.

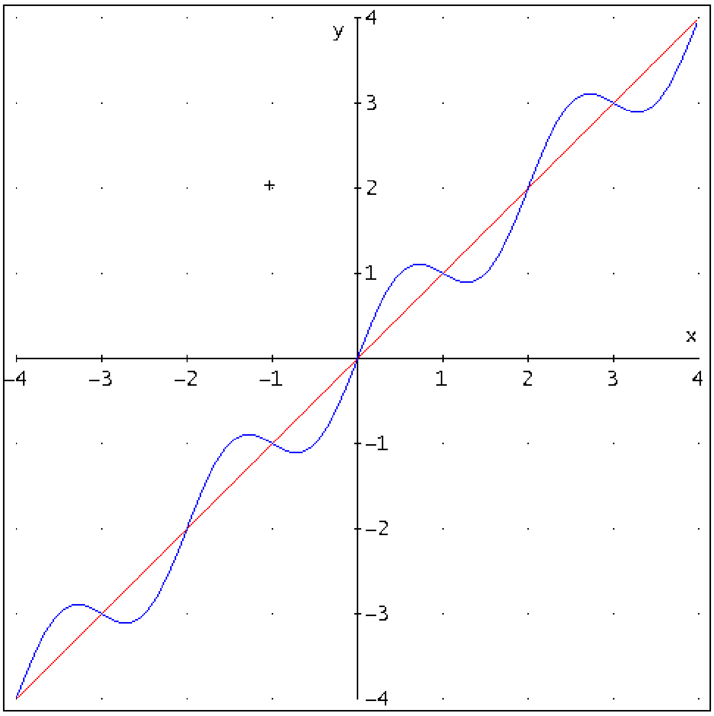

Figura 4. Grafico di $g(x)$ e di y=x.

Punto 3

Per $x > 0$, il primo punto di massimo relativo di $g(x)$ che si incontra ha per ascissa

$x = \frac{1}{\pi} \arccos\left(-\frac{2}{\pi} \right) \approx 0{,}7197...$, che si può calcolare con una normale calcolatrice scientifica.
Volendo invece usare, come era richiesto, un metodo iterativo, si può usare il metodo di bisezione sulla funzione $h(x) = g'(x)$ nell'intervallo [0, 1].

$$h(x) = g'(x) = \frac{1}{2} \cdot \pi \cos(\pi x) + 1 .$$

Si calcola $h(0) = \frac{1}{2} \cdot \pi + 1 > 0$ e $h(1) = -\frac{1}{2} \cdot \pi + 1 < 0$. Si divide l'intervallo [0, 1] in due parti uguali e si calcola la funzione nel punto medio. Poiché $h(0{,}5) = 1 > 0$, la radice deve cadere nell'intervallo $\left[\frac{1}{2}; 1 \right]$;.. e così via.