ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO 2003-2004
Corso sperimentale PNI – sessione ordinaria
Tema di MATEMATICA - 17 giugno 2004

Svolgimento a cura del prof. Luigi Tomasi (luigi.tomasi@libero.it)

RISPOSTE AI QUESITI DEL QUESTIONARIO

Quesito n. 1

1. La misura degli angoli viene fatta adottando una opportuna unità di misura. Le più comuni sono i gradi *sessagesimali*, *i radianti*, i gradi *centesimali*. Quali ne sono le definizioni?

Si definisce grado sessagesimale la 360^a parte dell'angolo giro.
Si definisce angolo radiante quell'angolo i cui lati intercettano su una qualunque circonferenza, con centro nel suo vertice, un arco che, rettificato, è lungo come il raggio.
Si definisce angolo centesimale la 400^a parte dell'angolo giro.
Per le definizioni delle unità di misura degli angoli si rinvia ad un buon libro di matematica (o di fisica), anche se non sempre nei libri vengono citati i gradi *centesimali*, pur essendo presenti in tutte le calcolatrici scientifiche e nei software di geometria che hanno degli strumenti dedicati alla misura degli angoli.

Quesito n. 2

2. Si provi che la superficie totale di un cilindro equilatero sta alla superficie della sfera ad esso circoscritta come 3 sta a 4.

Indicato con r il raggio di base del cilindro e con R il raggio della sfera, con $R = r\sqrt{2}$, abbiamo:

$$S_{\text{tot cilindro}} = 2\pi r \cdot 2r + 2\pi r^2 = 6\pi r^2$$

e

$$S_{\text{sfera}} = 4\pi R^2 = 4\pi^2 r^2 = 8\pi r^2$$

Dunque:

$$\frac{S_{\text{tot cil}}}{S_{\text{sfera}}} = \frac{6\pi r^2}{8\pi r^2} = \frac{3}{4}.$$

Quesito n. 3

3. Un solido viene trasformato mediante una similitudine di rapporto 3. Come varia il suo volume? Come varia l'area della sua superficie?

Se A è un solido e A' la sua immagine nella similitudine di rapporto 3, V e V' sono i volumi rispettivamente di A e A' e S e S' le aree della loro superficie avremo che
$\frac{V}{V'} = 3^3 = 27$ e inoltre $\frac{S}{S'} = 3^2 = 9$. La dimostrazione è immediata.

Quesito n. 4

4. Dati gli insiemi $A = \{1,2,3,4\}$ e $B = \{a, b, c\}$ quante sono le applicazioni (le funzioni) di A in B?

Dati gli insiemi A $= \{1, 2, 3, 4\}$ e B $= \{a, b, c\}$, le applicazioni di A in B sono $3^4 = 81$.

Infatti ci saranno 3 scelte per $f(1)$ e, per ciascuna di queste, 3 scelte per $f(2)$ e quindi 3 scelte per

$f(3)$ e poi 3 scelte per $f(4)$.
In totale si hanno $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ scelte e quindi $3^4 = 81$ funzioni.

Quesito n. 5

5. Dare un esempio di funzione g, non costante, tale che:
$$\lim_{x \to 2} g(x) = 3 \text{ e } g(2) = 4$$

Una funzione, che soddisfa alla richiesta, potrebbe essere così definita:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-2)} & \text{se } x \neq 2 \\ 4 & \text{se } x = 2 \end{cases}$$

$g(x)$ è una funzione che ammette nel punto x=2 una discontinuità detta si solito di "terza specie" o "eliminabile".

Quesito n. 6

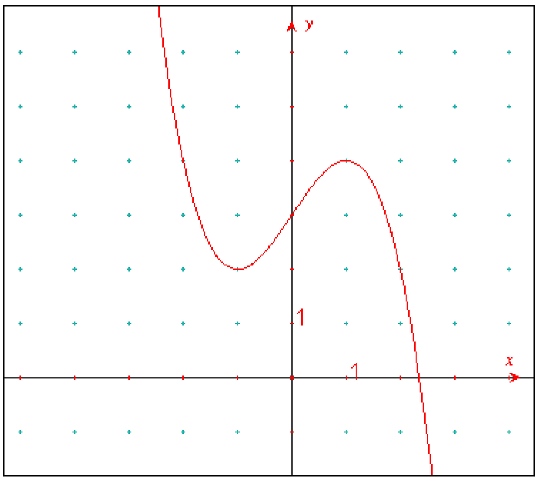
6. Dare un esempio di funzione *f(x)* con un massimo relativo in *(1, 3)* e un minimo relativo in *(-1, 2)*.

Le possibili funzioni sono ovviamente infinite. Volendo che il massimo sia in $(1,3)$, il minimo in $(-1,2)$ e che la funzione sia derivabile, la derivata prima potrebbe ad esempio essere:

$$f'(x) = 1 - x^2.$$

Integrando si ottiene: $f(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + c$. Ponendo $f(1) = 3$, si ottiene $c = \frac{7}{3}$, e

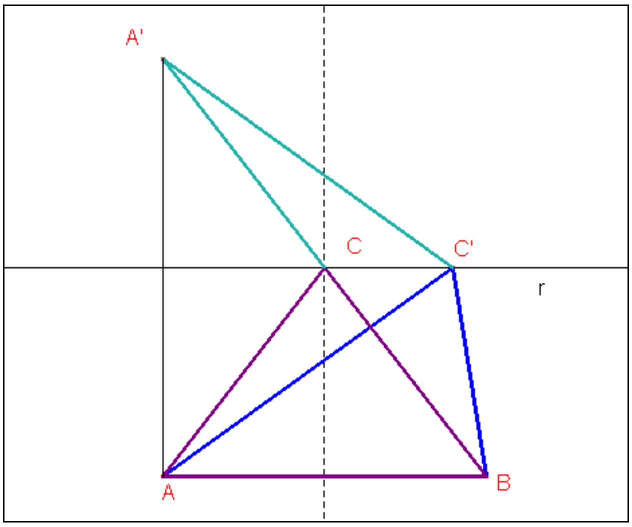
$f(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{3}$.



Quesito n. 7

7. Tra i triangoli di base assegnata e di uguale area, dimostrare che quello isoscele ha perimetro minimo.

Se i triangoli hanno base assegnata AB e la stessa area allora avranno anche la stessa altezza e quindi il vertice C apparterrà a una retta r parallela alla retta di AB e a distanza da AB pari all'altezza.



Sia A' il simmetrico di A rispetto alla retta r; il perimetro sarà minimo quando AC+CB sarà minimo, dal momento che AB è costante.
r è asse del segmento AA' e quindi AC=A'C e pertanto

$$AC+CB=A'C+CB \geq A'B$$

(la somma di due lati di un triangolo è sempre maggiore o uguale al terzo lato).

Si avrà il perimetro minimo quando i tre punti A', C, B sono allineati, ossia quando ABC è un triangolo isoscele

Quesito n. 8

8. Si trovino due numeri reali a e b, a≠ b, che hanno somma e prodotto uguali.

Siano a, b due numeri reali con $a \neq b$.
Si sa che $a+b=p$ e $ab=p$; a e b saranno le soluzioni dell'equazione di secondo grado

$$z^2 - pz + p = 0 .$$

Risolvendola, ponendo la condizione che $p(p-4) \geq 0$, si ottengono le soluzioni:

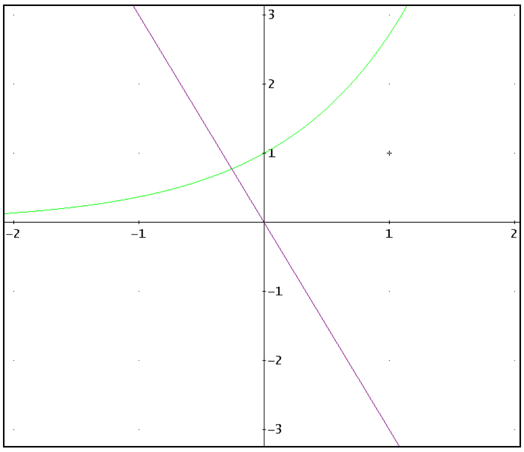
$$z_1 = a = \frac{p-\sqrt{p(p-4)}}{2} \quad \text{e} \quad z_2 = b = \frac{p+\sqrt{p(p-4)}}{2} .$$

A questo punto si possono ottenere delle coppie di numeri che soddisfano alle condizioni poste.

Quesito n.9

9. Si dimostri che l'equazione $e^x + 3x = 0$ ammette una e una sola soluzione e se ne calcoli un valore approssimato utilizzando un metodo iterativo a scelta.

L'equazione $e^x + 3x = 0$ è equivalente al sistema $\begin{cases} y = e^x \\ y = -3x \end{cases}$; rappresentandolo graficamente si deduce che l'equazione data ammette una e una sola soluzione negativa in $[-1, 0]$.



Si consideri la funzione $f(x) = e^x + 3x$. Poiché $f'(x) > 0$ per ogni x del dominio, la funzione è strettamente monotona crescente e dal momento che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e inoltre $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ed essendo la funzione continua, intersecherà l'asse delle x una sola volta. Applicando il metodo di bisezione nell'intervallo [−1, 0], si trova che la radice vale circa $x = -0{,}257...$.

Quesito n.10

10. Nel piano è data la seguente trasformazione:

$$x \to x\sqrt{3} - y$$
$$y \to x + y\sqrt{3}$$

Di quale trasformazione si tratta?

Possiamo scrivere la trasformazione nel seguente modo:

$$\begin{cases} u = x\sqrt{3} - y \\ v = x + y\sqrt{3} \end{cases}.$$

La matrice della trasformazione è $M = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$. La trasformazione data è pertanto una similitudine che ha l'origine degli assi O come punto unito.

Il determinante della matrice è $\det M = 4$; la similitudine è quindi "diretta" ed ha rapporto $k = 2$.

Possiamo riscrivere le equazioni in questo modo:

$$\begin{cases} u = 2\left(x\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}y\right) \\ v = 2\left(\dfrac{1}{2}x + y\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} u = 2\left(x\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) - y\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right) \\ v = 2\left(x\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + y\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right) \end{cases}$$

Da queste ultime equazioni si ricava che la trasformazione è quindi la composizione di una rotazione di $\pi/6$ di centro l'origine con una omotetia di centro l'origine e rapporto 2. Ritroviamo quindi, anche in questo modo, che la trasformazione è una similitudine di rapporto 2.