ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO 2003-2004
Corso di ordinamento – sessione ordinaria
Tema di MATEMATICA - 17 giugno 2004

Svolgimento a cura del prof. Luigi Tomasi (luigi.tomasi@libero.it)

RISPOSTE AI QUESITI DEL QUESTIONARIO

Quesito n. 1

1. Trovate due numeri reali a e b, a≠ b, che hanno somma e prodotto uguali.

Siano a, b due numeri reali con $a \neq b$.
Si sa che $a + b = p$ e $ab = p$; a e b saranno le soluzioni dell'equazione di secondo grado

$$z^2 - pz + p = 0 .$$

Risolvendola, ponendo la condizione che $p(p-4) \geq 0$, si ottengono le soluzioni:

$$z_1 = a = \frac{p - \sqrt{p(p-4)}}{2} \quad \text{e} \quad z_2 = b = \frac{p + \sqrt{p(p-4)}}{2} .$$

A questo punto si possono ottenere delle coppie di numeri che soddisfano alle condizioni poste.

Quesito n. 2

2. Provate che la superficie totale di un cilindro equilatero sta alla superficie della sfera ad esso circoscritta come 3 sta a 4.

Indicato con r il raggio di base del cilindro e con R il raggio della sfera, con $R = r\sqrt{2}$, abbiamo:

$$S_{\text{tot cilindro}} = 2\pi r \cdot 2r + 2\pi r^2 = 6\pi r^2$$

e

$$S_{\text{sfera}} = 4\pi R^2 = 4\pi^2 r^2 = 8\pi r^2$$

Dunque:

$$\frac{S_{\text{tot cil}}}{S_{\text{sfera}}} = \frac{6\pi r^2}{8\pi r^2} = \frac{3}{4} .$$

Quesito n. 3

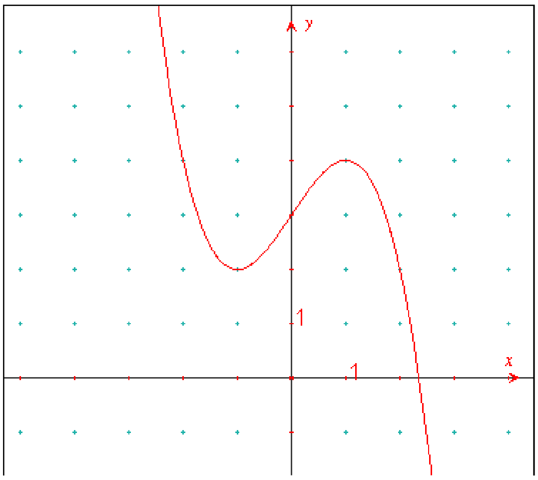
3. Date un esempio di funzione $f(x)$ con un massimo relativo in $(1, 3)$ e un minimo relativo in $(-1, 2)$.

Le possibili funzioni sono ovviamente infinite. Volendo che il massimo sia in $(1,3)$, il minimo in $(-1,2)$ e che la funzione sia derivabile, la derivata prima potrebbe ad esempio essere:

$$f'(x) = 1 - x^2 .$$

Integrando si ottiene: $f(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + c$. Ponendo $f(1) = 3$, si ottiene $c = \frac{7}{3}$, e

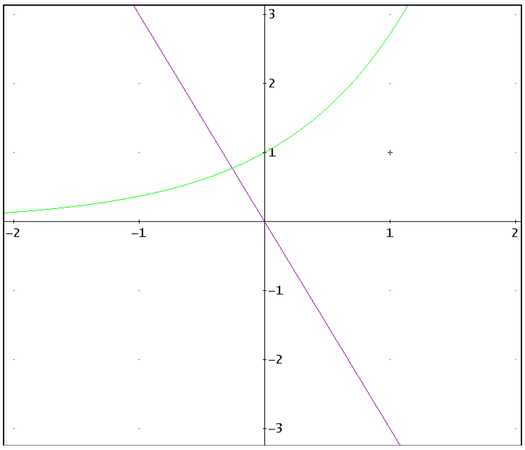
$$f(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{3} .$$



Quesito n. 4

> 4. Dimostrate che l'equazione $e^x + 3x = 0$ ammette una e una sola soluzione reale.

L'equazione $e^x + 3x = 0$ è equivalente al sistema $\begin{cases} y = e^x \\ y = -3x \end{cases}$; rappresentandolo graficamente si deduce che l'equazione data ammette una e una sola soluzione negativa in [–1, 0].



Si consideri la funzione $f(x) = e^x + 3x$. Poiché $f'(x) > 0$ per ogni x del dominio, la funzione è strettamente monotona crescente e dal momento che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ e inoltre $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ed essendo la funzione continua, intersecherà l'asse delle x una sola volta. Applicando il metodo di bisezione nell'intervallo [–1, 0], si trova che la radice vale circa $x = -0{,}257...$.

Quesito n. 5

> 5. Di una funzione $g(x)$, non costante, si sa che:
>
> $$\lim_{x \alpha\ 2} g(x) = 3 \text{ e } g(2) = 4$$
>
> Trovate una espressione di g(x) .

Una funzione, che soddisfa alla richiesta, potrebbe essere così definita:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-2)} & \text{se } x \neq 2 \\ 4 & \text{se } x = 2 \end{cases}$$

$g(x)$ è una funzione che ammette nel punto x=2 una discontinuità detta si solito di "terza specie" o "eliminabile".

Quesito n. 6

6.	Verificate che le due funzioni $f(x)=3\log x$ e $g(x)=\log(2x)^3$ hanno la stessa derivata. Quale giustificazione ne date?

Entrambe le funzioni hanno per dominio l'insieme dei numeri reali positivi. Si ha inoltre

$$f'(x) = \frac{3}{x}.$$

La funzione $g(x) = \log((2x)^3) = 3\log(2x)$ ha per derivata

$$g'(x) = 3 \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2 = \frac{3}{x}.$$

Per giustificare questo risultato, riscriviamo la funzione $g(x)$ nel seguente modo:

$$g(x) = 3 \cdot (\log 2 + \log x) = \log 8 + 3\log x = k + 3\log x$$

dove abbiamo posto $k = \log 8$.

Pertanto le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ differiscono di una costante (graficamente sono una la traslata dell'altra) e quindi hanno la stessa derivata.

Quesito n. 7

7.	Un triangolo ha due lati e l'angolo da essi compreso che misurano rispettivamente a, b e δ. Quale è il valore di δ che massimizza l'area del triangolo?

L'area del triangolo è data da:

$$A(\delta) = \frac{1}{2}ab\sin\delta\ .$$

L'area è massima se $\sin\delta = 1$, ovvero se $\delta = 90°$.

Quesito n. 8

8.	La misura degli angoli viene fatta adottando una opportuna unità di misura. Le più comuni sono i gradi *sessagesimali*, *i radianti*, i gradi *centesimali*. Quali ne sono le definizioni?

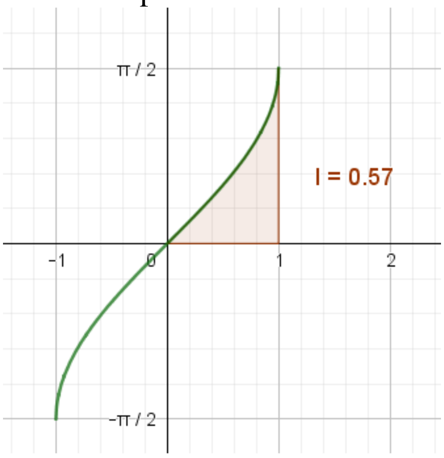
Si definisce grado sessagesimale la 360^a parte dell'angolo giro.
Si definisce angolo radiante quell'angolo i cui lati intercettano su una qualunque circonferenza, con centro nel suo vertice, un arco che, rettificato, è lungo come il raggio.
Si definisce angolo centesimale la 400^a parte dell'angolo giro.
Per le definizioni delle unità di misura degli angoli si rinvia ad un buon libro di matematica (o di fisica), anche se non sempre nei libri vengono citati i gradi *centesimali*, pur essendo presenti in tutte le calcolatrici scientifiche e nei software di geometria che hanno degli strumenti dedicati alla misura degli angoli.

Quesito n.9

9. Calcolate:

$$\int_0^1 arcsenx dx$$

Poiché la funzione $f(x) = \arcsin x$ è non negativa nell'intervallo di integrazione, questo integrale definito si può calcolare ricorrendo al suo significato geometrico (vedi figura seguente).



La figura indica che l'integrale richiesto è dato da

$$\int_0^1 \arcsin x \; dx = \int_0^{\pi/2} (1 - \sin x) dx = [x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0{,}57 \, .$$

Si può procedere anche con una integrazione per parti:

$$\int \arcsin x \; dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} dx = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + c \, .$$

Pertanto si ha:

$$\int_0^1 \arcsin x \; dx = \left[x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0{,}57 \, .$$

Quesito n.10

10. Considerate gli insiemi $A = \{1,2,3,4\}$ e $B = \{a, b, c\}$; quante sono le applicazioni (le funzioni) di A in B?

Dati gli insiemi A $= \{1, 2, 3, 4\}$ e B = $\{a, b, c\}$, le applicazioni di A in B sono $3^4 = 81$.

Infatti ci saranno 3 scelte per $f(1)$ e, per ciascuna di queste, 3 scelte per $f(2)$ e quindi 3 scelte per $f(3)$ e poi 3 scelte per $f(4)$.

In totale si hanno $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ scelte e quindi $3^4 = 81$ funzioni.