

Esame di Stato Liceo Scientifico PNI
Prova di Matematica PNI - 22 giugno 2006
Soluzione del QUESTIONARIO
a cura di Luigi Tomasi (luigi.tomasi@libero.it)

QUESITO 9

La funzione $f(x)$ cercata è sicuramente positiva perché derivabile e quindi continua nel suo dominio, mai nulla e tale che $f(0) = 1$.

Le uniche funzioni che soddisfano all'equazione $f'(x) = f(x)$ sono del tipo $f(x) = c \cdot e^x$. Infatti, se $f(x) = c \cdot e^x$, allora $f'(x) = f(x)$.

Viceversa, se $f'(x) = f(x)$, con $f(x) \neq 0$ per ogni x nel dominio, si ha:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1.$$

Integrando si ottiene

$$\ln|f(x)| = x + k,$$

dove il valore assoluto si può togliere per quanto detto all'inizio:

$$\ln f(x) = x + k.$$

Quindi

$$f(x) = e^{x+k} = e^k e^x = c \cdot e^x$$

con $c \in \mathbb{R}^+$.

Dalla condizione $f(0) = 1$, si ottiene $f(x) = e^x$, ossia la funzione esponenziale di base il numero di Nepero.