Esame di Stato Liceo Scientifico
Prova di Matematica corso di ordinamento - 21 giugno 2007
Soluzione del PROBLEMA 2
Soluzione a cura di Luigi Tomasi (luigi.tomasi@libero.it)

PROBLEMA 2

Si consideri un cerchio C di raggio r.

1. Tra i triangoli isosceli inscritti in C si trovi quello di area massima.
2. Si denoti con S_n l'area del poligono regolare di n lati inscritto in C. Si dimostri che $S_n = \frac{n}{2} r^2 sen \frac{2\pi}{n}$ e si trovi un'analoga espressione per l'area del poligono regolare di n lati circoscritto a C.
3. Si calcoli il limite di S_n per $n \to \infty$.
4. Si spieghi in che cosa consista il problema della quadratura del cerchio e se, e in che senso, si tratti di un problema risolubile o meno.

Risoluzione del problema 2

Punto 1
Consideriamo la figura 1. Indichiamo con *x* la misura dell'altezza HC del triangolo.

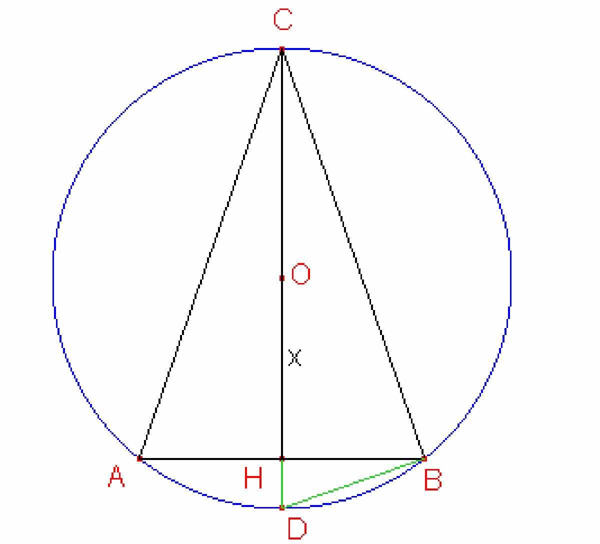

Figura 1

Per i secondo teorema di Euclide, si ha:
$\overline{HB} = \sqrt{x(2r-x)}$
con $0 \le x \le 2r$.
L'area del triangolo ABC è quindi:
$S(x) = x\sqrt{x(2r-x)}$.
Derivando si ottiene:
$$S'(x) = \frac{x(3r-2x)}{\sqrt{x(2r-x)}}.$$
L'area è massima per $x = \frac{3}{2}r$. In questo caso il triangolo è equilatero.

Punto 2)
Consideriamo un poligono regolare di *n* lati. Lo possiamo suddividere in *n* triangoli isosceli uguali. L'area di uno di questi triangoli è data da

$$S_{triangolo} = \frac{1}{2} r^2 \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

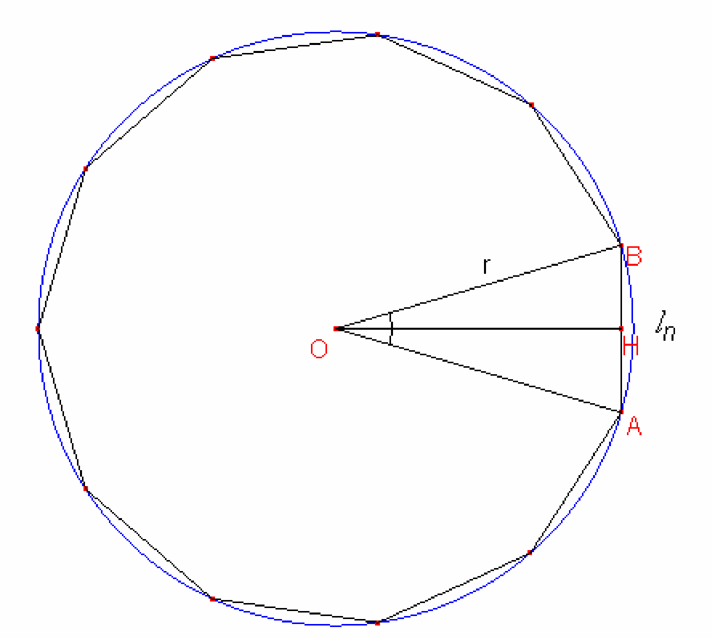

Figura 2

L'area del poligono regolare sarà pertanto:

$$S_n = \frac{n}{2} r^2 \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

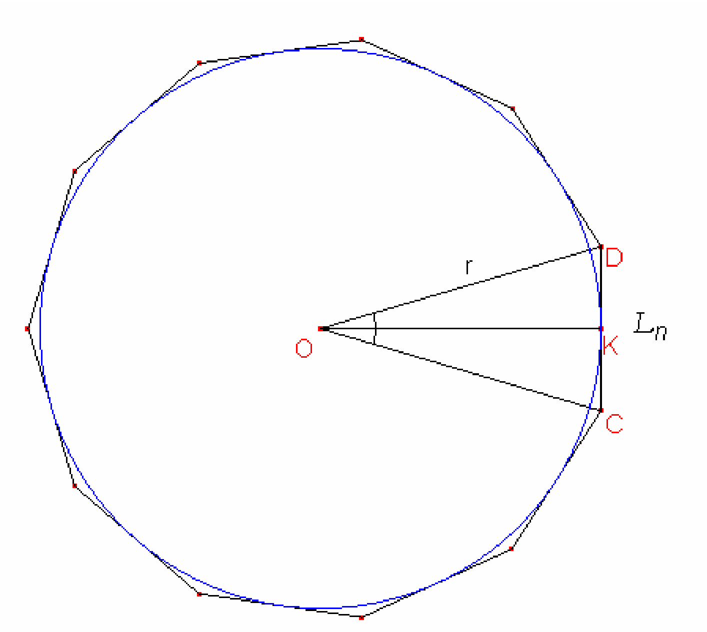

Figura 3

Il poligono regolare circoscritto con lo stesso numero di lati avrà area:

$$S_n^{'} = nr^2 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Punto 3)
Il limite richiesto è il seguente:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{2} r^2 \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\pi r^2 \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\frac{2\pi}{n}}\right] = \pi r^2 \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\frac{2\pi}{n}}\right] = \pi r^2 .$$

Questo limite rappresenta l'area del cerchio.

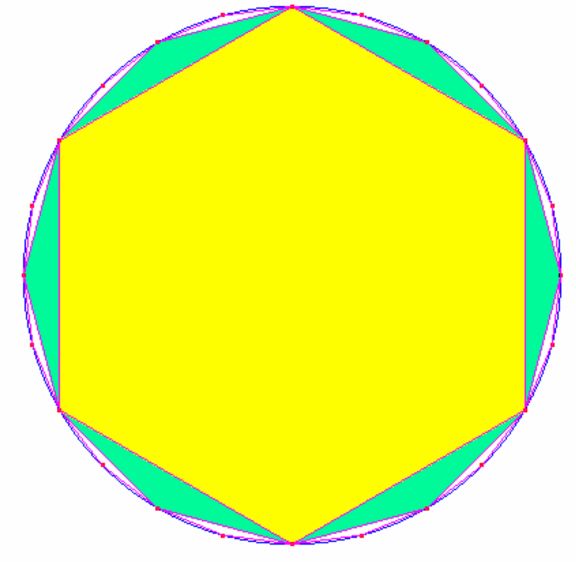

Figura 4

Punto 4)
Si tratta di un famoso problema nato nella matematica greca, ovvero se sia possibile, *usando soltanto la riga e il compasso*, costruire un quadrato equivalente, cioè con la stessa area, di un cerchio dato.

Per il cerchio questo problema non si può risolvere con riga e compasso.

Questo problema è possibile invece per ogni poligono. Ad esempio, è possibile fare la "quadratura di un triangolo"; si può infatti costruire, usando soltanto la riga e il compasso, un quadrato equivalente al triangolo.

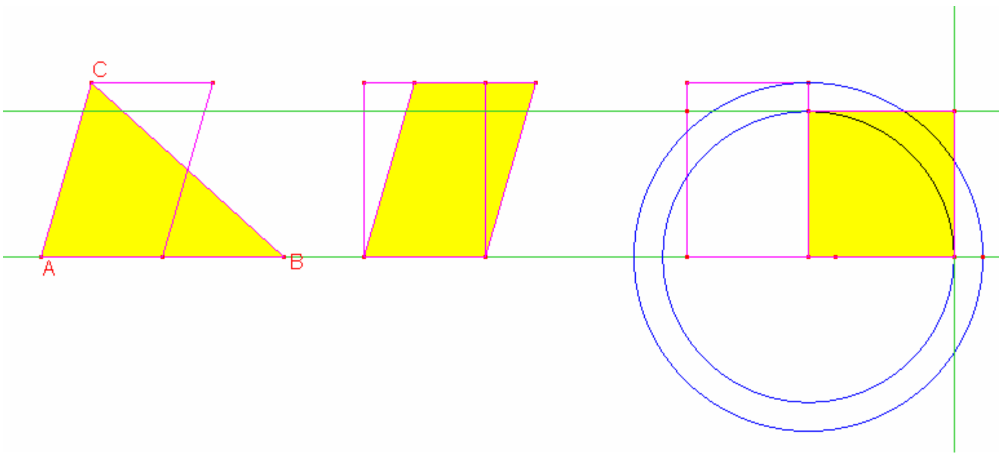

Figura 5

Nell'Ottocento è stato dimostrato che il problema della quadratura del cerchio è impossibile perché il numero π è un numero trascendente (ovvero, non è soluzione di nessuna equazione algebrica a coefficienti interi).