

Esame di Stato Liceo Scientifico

Prova di Matematica corso sperimentale PNI - 21 giugno 2007

Soluzione del QUESTIONARIO

a cura di Luigi Tomasi (luigi.tomasi@libero.it)

QUESITO 5

Si consideri il teorema: «la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto» e si spieghi perché esso non è valido in un contesto di geometria *non-euclidea*. Quali le formulazioni nella geometria *iperbolica* e in quella *ellittica*? Si accompagni la spiegazione con il disegno.

Il teorema “La somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto” è uno dei primi teoremi della geometria piana euclidea. La sua dimostrazione fa uso sostanziale del “V postulato” di Euclide.

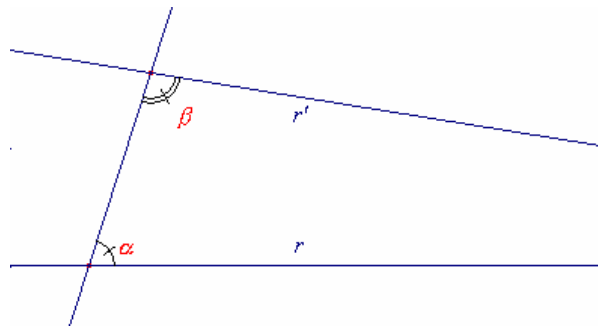


Figura 1

Enunciato del V postulato di Euclide:

Postulato V. *Se [in un piano] una retta, intersecando altre due rette, forma con esse, da una medesima parte, angoli alterni la cui somma è minore di due angoli retti, allora queste due rette indefinitamente prolungate finiscono con l'incontrarsi dalla parte detta.*

Una formulazione diversa (dovuta a Proclo, V sec. d. C.) di questo postulato è la seguente:

“dati nel piano una retta r ed un punto P, per il punto P si può condurre una ed una sola retta parallela a quella data”.

Il teorema citato, sulla somma degli angoli interni di un triangolo, vale dunque solo nella geometria euclidea, in cui si ammette il postulato delle parallele.

Se si nega questo postulato si ottengono delle altre geometrie.

La negazione si può fare in due modi:

- negando l'unicità della parallela ad una retta data passante per un punto: per un punto P passano infinite parallele alla retta data. In questo caso si ottiene una geometria non euclidea di tipo *iperbolico* (Saccheri, Bolyai, Lobacevskij). In questa geometria, se si considera un triangolo, la sommategli angoli è sempre minore di un angolo piatto. Un famoso modello di questa geometria è stato dato da Eugenio Beltrami e successivamente da Henri Poincaré.
- negando l'esistenza stessa di una parallela alla retta r passante per il punto P; in questo caso si ottiene un tipo di geometria non euclidea che viene detta *ellittica* (Riemann). In questa geometria la somma degli angoli di un triangolo è sempre maggiore di un angolo piatto. Un modello di geometria ellittica si ottiene se si considera una superficie sferica e su di essa si considerano come “rette” le circonferenze massime.