

**QUESITO 5**

Si determini un polinomio  $P(x)$  di terzo grado tale che:

$$P(0) = P'(0) = 0, P(1) = 0 \text{ e } \int_0^1 P(x)dx = \frac{1}{12}$$

Risoluzione del quesito 5

Indichiamo con  $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , con  $a \neq 0$ , il polinomio di terzo grado.

Si ha  $p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

e

$$\int p(x)dx = \frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3} + \frac{cx^2}{2} + dx + k.$$

Dalle condizioni assegnate, si ha:

$$\begin{cases} p(0) = d = 0 \\ p'(0) = c = 0 \\ p(1) = a + b + c + d = 0 \\ \int_0^1 p(x)dx = \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2} + d = \frac{1}{12} \end{cases}$$

Quindi

$$\begin{cases} d = 0 \\ c = 0 \\ a = -b \\ 3a + 4b = 1 \end{cases}$$

e in definitiva

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

Quindi  $p(x) = x^2 - x^3 = x^2(1-x)$

