Esame di Stato Liceo Scientifico PNI
Prova di Matematica corso sperimentale PNI - 19 giugno 2008

Soluzione del PROBLEMA 1

PROBLEMA 1

Nel piano riferito a coordinate cartesiane, ortogonali e monometriche, si considerino i triangoli ABC con A(1, 0), B(3, 0) e C variabile sulla retta d'equazione y=2x.

1. Si provi che i punti (1, 2) e $\left(\frac{3}{5}, \frac{6}{5}\right)$ corrispondono alle due sole posizioni di C per cui è $A\hat{C}B = \frac{\pi}{4}$
2. Si determini l'equazione del luogo geometrico γ descritto, al variare di C, dall'ortocentro del triangolo ABC. Si tracci γ.
3. Si calcoli l'area Ω della parte di piano delimitata da γ e dalle tangenti a γ nei punti A e B.
4. Verificato che è $\Omega = \frac{3}{2}(\ln 3 - 1)$ si illustri una procedura numerica per il calcolo approssimato di $\ln 3$.

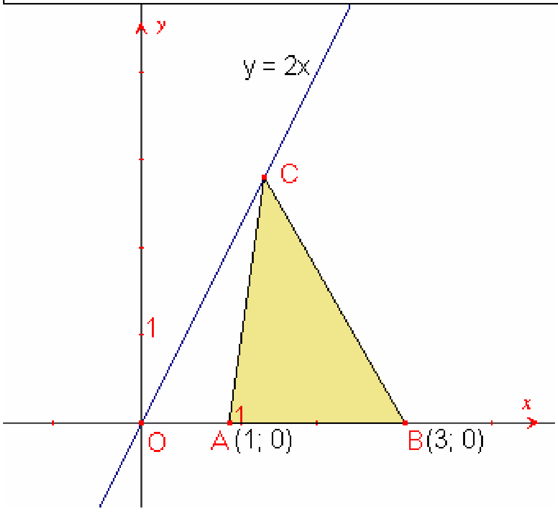

Figura 1

1) Posto C(t, 2t) sulla retta di equazione $y = 2x$, si può usare il teorema di Carnot sul triangolo ABC; deve risultare

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos 45^0$$

che diventa

$$4 = 5t^2 - 2t + 1 + 5t^2 - 6t + 9 - 2\sqrt{5t^2 - 2t + 1}\sqrt{5t^2 - 6t + 9}\,\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ossia isolando le radici

$$\sqrt{5t^2 - 2t + 1}\sqrt{5t^2 - 6t + 9}\sqrt{2} = 10t^2 - 8t + 6$$

Poiché i due membri sono positivi, sotto radice e al secondo membro si hanno trinomi con il discriminante negativo, si può elevare ancora al quadrato e ottenere l'equazione di quarto grado

$$25t^4 - 40t^3 + 30t^2 - 24t + 9 = 0$$
Grazie al testo e usando il teorema di Ruffini è facile verificare che 1 e 3/5 sono soluzioni di tale equazione e le eventuali altre soluzioni sono quelle dell'equazione $25t^2 + 15 = 0$, equazione che non ha evidentemente soluzioni reali.

2) Una delle altezze è la retta di equazione $x = t$, mentre l'altezza relativa al lato BC ha equazione $y = -\frac{t-3}{2t}(x-1)$.

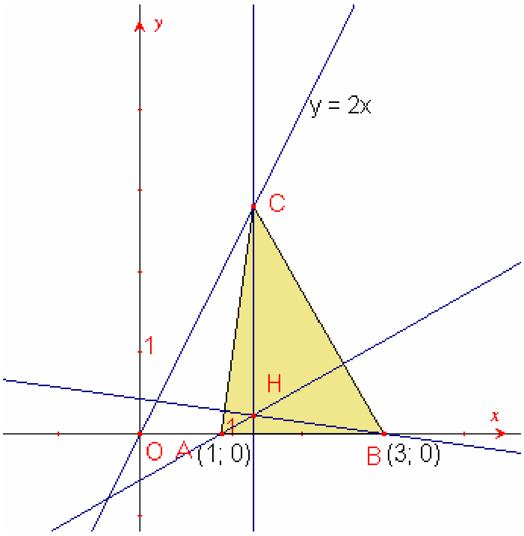

Figura 2

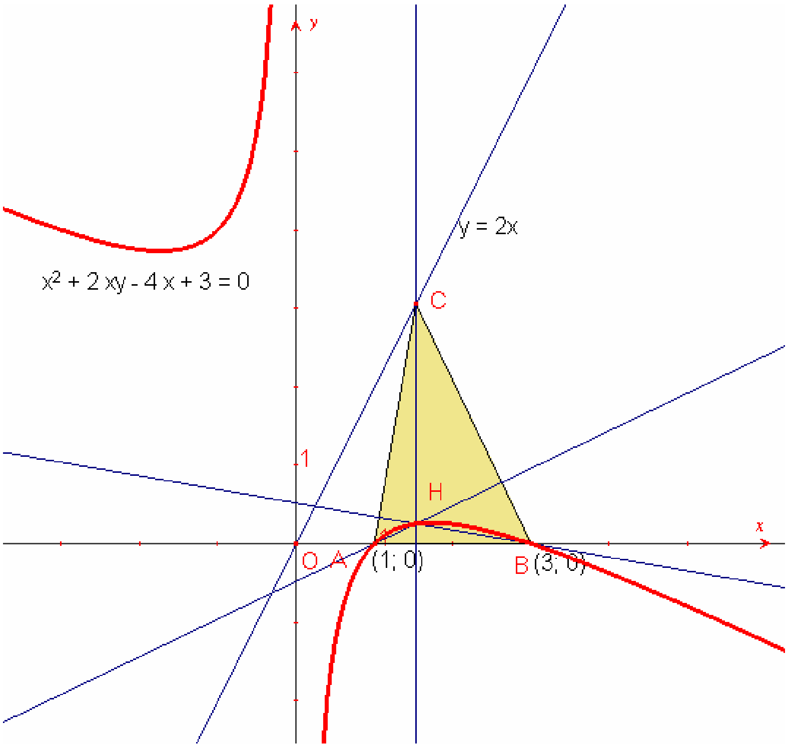

Figura 3

L'equazione del luogo si ottiene eliminando il parametro *t* tra le due equazioni e quindi sostituendo *t* con *x* nella seconda equazione

$$\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{3-t}{2t} \cdot (x-1) \end{cases}$$

Si ottiene quindi

$$y = \frac{3-x}{2x}(x-1) = -\frac{x^2-4x+3}{2x}.$$

Segue lo studio della funzione, che è un'iperbole non equilatera. Positiva per $x<0$ e $1<x<3$, negativa per $0<x<1$ e $x>3$. Intersezione con gli assi coordinati: (1,0) e (3,0).

Asintoti : $x=0$ e $y=-\frac{1}{2}x+2$; $(-\sqrt{3},\sqrt{3}+2)$ minimo relativo, $(\sqrt{3},-\sqrt{3}+2)$ massimo relativo, convessa per $x<0$ e concava per $x>0$.

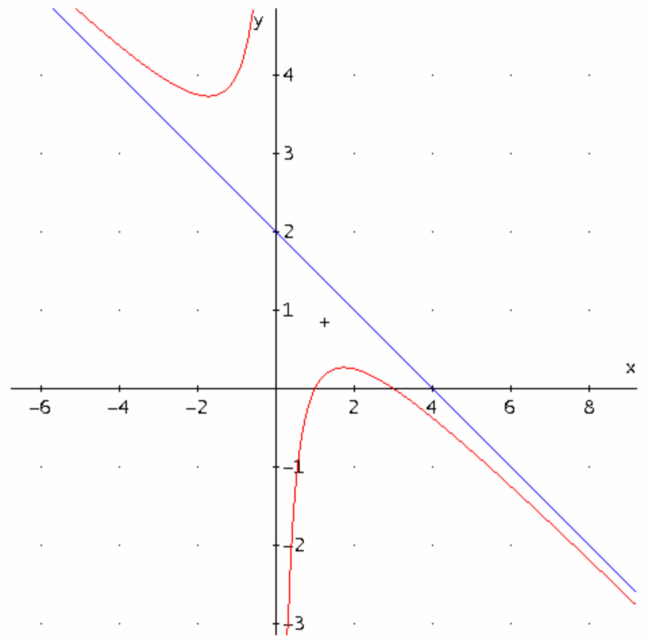

Figura 4

3) Equazione della retta tangente alla curva in A: $y=x-1$; equazione della retta tangente in B alla curva: $y=-\frac{x}{3}+1$. Intersezione delle tangenti P(3/2,1/2).

Per trovare l'area richiesta basta sottrarre dall'area del triangolo APB l'area delimitata dalla curva e dall'asse *x* nel primo quadrante.

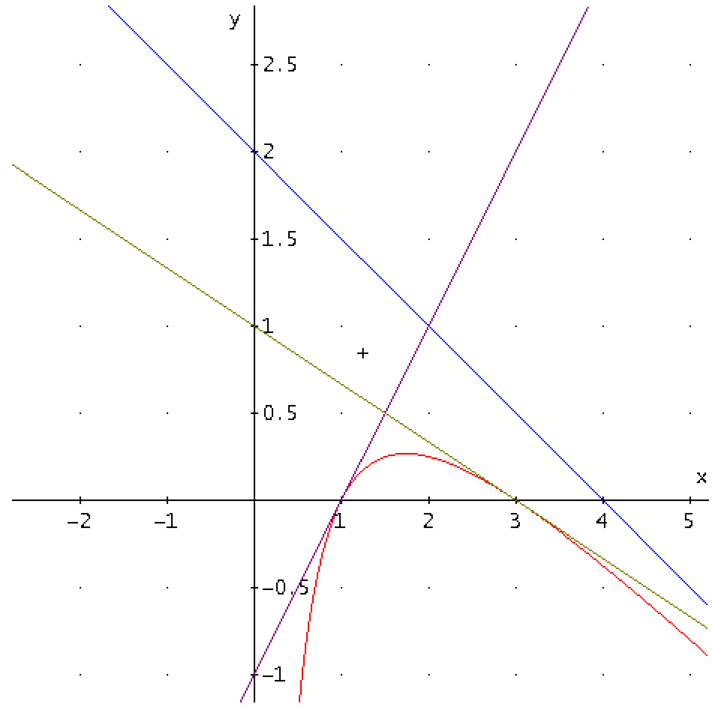

Figura 5

L'area del triangolo APB è 1/2.
L'altra area è data da

$$\int_1^3 -\frac{x^2-4x+3}{2x}dx = -\int_1^3 \left(\frac{x}{2}-2+\frac{3}{2x}\right)dx = -\left[\frac{x^2}{4}-2x+\frac{3}{2}\log x\right]_1^3 = 2-\frac{3}{2}\log 3$$

L'area richiesta è quindi

$$\Omega = \frac{1}{2}-2+\frac{3}{2}\log 3 = \frac{3}{2}\log 3-\frac{3}{2} = \frac{3}{2}(\log 3-1)$$

4) Ricordando che se $x > 0$ si può scrivere:

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt$$

allora ln3 si può pensare come il seguente integrale definito:

$$\ln 3 = \int_1^3 \frac{1}{x}dx,$$

che rappresenta l'area "sotto" l'iperbole equilatera y=1/x, compresa tra x=1 e x=3.

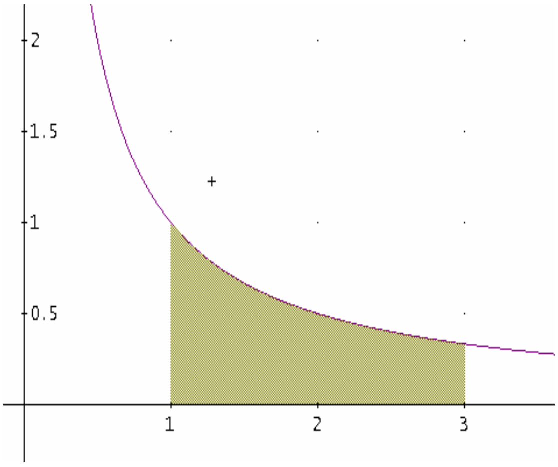

Figura 5

Si può pertanto usare il metodo dei rettangoli, suddividendo, ad esempio, l’intervallo [1,3] in 4 parti uguali e scegliendo il punto medio di ogni intervallo. Si ottiene:

$$\ln 3 = \int_1^3 \frac{1}{x}\,dx \approx \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}+\frac{4}{7}+\frac{4}{9}+\frac{4}{11}\right) = 2\cdot\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}\right) = 1{,}08975...$$

Con una comune calcolatrice scientifica si trova

$$\ln 3 = 1{,}098612...$$