

**Esame di Stato Liceo Scientifico**

**Prova di Matematica corso sperimentale PNI - 23 giugno 2010**

a cura di S. De Stefani e L. Tomasi

**Soluzione del PROBLEMA 2**

**PROBLEMA 2**

Nel piano riferito ad un sistema  $Oxy$  di coordinate cartesiane siano assegnate le parabole d'equazioni:  $y^2 = 2x$  e  $x^2 = y$ .

- a) Si disegnino le due parabole e se ne determinino le coordinate dei fuochi e le equazioni delle rispettive rette direttrici. Si denoti con  $A$  il punto d'intersezione delle due parabole diverso dall'origine  $O$ .
- b) L'ascissa di  $A$  è  $\sqrt[3]{2}$ ; si dica a quale problema classico dell'antichità è legato tale numero e, mediante l'applicazione di un metodo iterativo di calcolo, se ne trovi il valore approssimato a meno di  $10^{-2}$ .
- c) Sia  $D$  la parte di piano delimitata dagli archi delle due parabole di estremi  $O$  e  $A$ . Si determini la retta  $r$ , parallela all'asse  $x$ , che stacca su  $D$  il segmento di lunghezza massima.
- d) Si consideri il solido  $W$  ottenuto dalla rotazione di  $D$  intorno all'asse  $x$ . Se si taglia  $W$  con piani ortogonali all'asse  $x$ , quale forma hanno le sezioni ottenute? Si calcoli il volume di  $W$ .

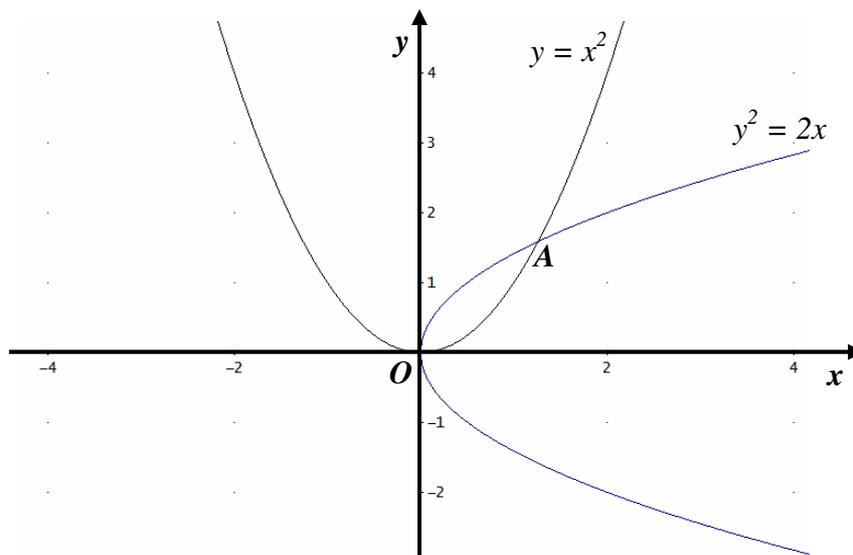
Punto a.

La parabola  $y^2 = 2x$  ha vertice in  $O(0; 0)$ , concavità rivolta verso destra, passa per  $P_1(2; 2)$ .

Il fuoco ha coordinate  $F_1\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ , la direttrice ha equazione  $x = -\frac{1}{2}$ .

La parabola  $y = x^2$  ha vertice in  $O(0; 0)$ , concavità rivolta verso l'alto, passa per  $P_2(1; 1)$ .

Il fuoco ha coordinate  $F_2\left(0; \frac{1}{4}\right)$ , la direttrice ha equazione  $y = -\frac{1}{4}$ .



I punti di intersezione tra le due parabole si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y^2 = 2x \\ y = x^2 \end{cases} \rightarrow x(x^3 - 2) = 0 \text{ che ha come soluzioni i due punti } O(0; 0) \text{ e } A(\sqrt[3]{2}; \sqrt[3]{4})$$

Punto b.

Il problema classico dell'antichità legato a  $\sqrt[3]{2}$  è il problema della duplicazione del cubo con riga e compasso. Non è possibile costruire, *con riga e compasso*, il lato di un cubo avente volume doppio rispetto a quello di un cubo di spigolo dato. In questo caso, se il cubo noto ha spigolo 1, non è possibile costruire utilizzando solo riga e compasso un cubo di spigolo pari a  $\sqrt[3]{2}$ .

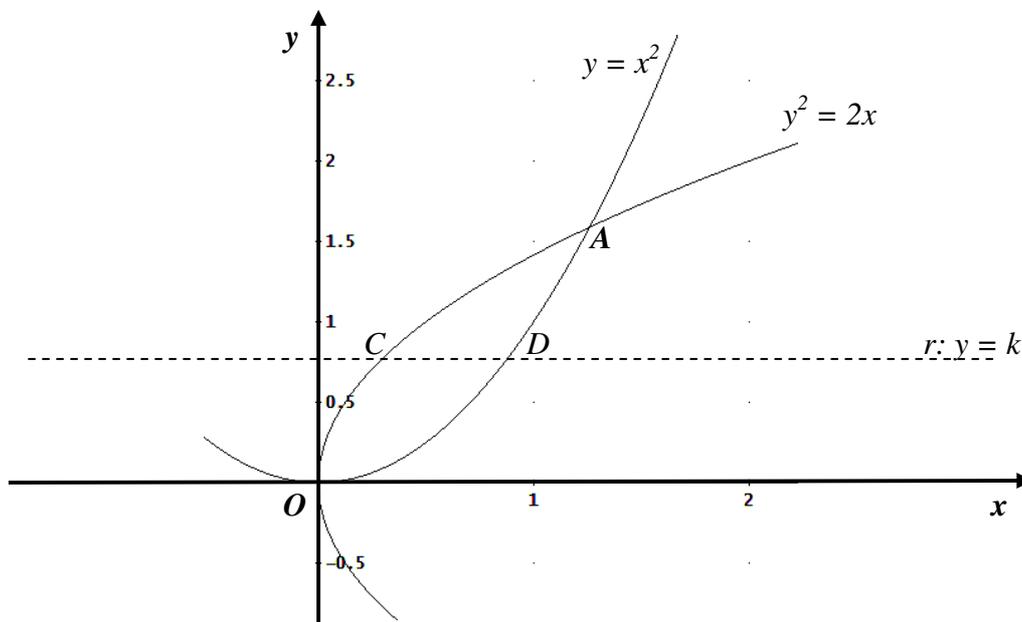
Per trovare un valore approssimato a meno di un centesimo di  $\sqrt[3]{2}$  si può applicare il metodo di bisezione alla funzione  $f(x) = x^3 - 2$ .

Si ha che  $f(1) = -1$  e  $f(2) = 6$ .

$$f\left(\frac{3}{2}\right) > 0, \quad f\left(\frac{5}{4}\right) < 0, \quad f\left(\frac{11}{8}\right) > 0, \quad f\left(\frac{21}{16}\right) > 0, \quad f\left(\frac{41}{32}\right) > 0, \quad f\left(\frac{81}{64}\right) > 0$$

$\frac{81}{64}$  approssima  $\sqrt[3]{2}$  a meno di un centesimo.

Punto c.



Sia  $y = k$  l'equazione della retta  $r$ , con  $0 \leq k \leq \sqrt[3]{2}$ .

Il punto  $C$  di intersezione di  $r$  con la parabola  $y^2 = 2x$  ha coordinate  $C\left(\frac{k^2}{2}; k\right)$ ;

il punto  $D$  di intersezione di  $r$  con la parabola  $y = x^2$  ha coordinate  $D(\sqrt{k}; k)$ .

La misura del segmento CD è:  $\overline{CD} = |x_D - x_C| = \sqrt{k} - \frac{k^2}{2}$ .

Per trovare la lunghezza massima si studia il segno della derivata prima della funzione  $y = \sqrt{x} - \frac{x^2}{2}$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - x = \frac{1 - 2x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

$$y' > 0 \text{ per } x \in \left] 0; \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \right[.$$

La retta  $r$  che stacca su  $\mathbf{D}$  il segmento di lunghezza massima ha equazione  $y = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ .

Punto d.

Le sezioni ottenute tagliando  $W$  con piani perpendicolari all'asse  $x$  sono delle corone circolari.

Il volume del solido di rotazione è  $W = \pi \int_0^{\sqrt[3]{2}} \left[ (\sqrt{2x})^2 - (x^2)^2 \right] dx =$

$$= \pi \int_0^{\sqrt[3]{2}} [2x - x^4] dx = \pi \left[ x^2 - \frac{x^5}{5} \right]_0^{\sqrt[3]{2}} = \frac{3\sqrt[3]{4}}{5} \pi.$$

Giudizio

<b>Livello di difficoltà:</b>	<input type="checkbox"/> Basso	<input checked="" type="checkbox"/> Medio	<input type="checkbox"/> Alto		
<b>È in programma?</b>	<input checked="" type="checkbox"/> Sì	<input type="checkbox"/> No	<input type="checkbox"/> Non si sa		
<b>Normalmente si fa a scuola?</b>	<input checked="" type="checkbox"/> Sì	<input type="checkbox"/> No	<input type="checkbox"/> Non sempre		
<b>È un argomento presente nei libri di testo?</b>	<input type="checkbox"/> Mai	<input type="checkbox"/> Non sempre	<input checked="" type="checkbox"/> Sempre		
<b>Formulazione:</b>	<input type="checkbox"/> Scorretta	<input type="checkbox"/> Ambigua	<input type="checkbox"/> Poco chiara	<input checked="" type="checkbox"/> Corretta	<input type="checkbox"/> Molto chiara
<b>Controlla una conoscenza e/o competenza fondamentale?</b>	<input type="checkbox"/> No		<input checked="" type="checkbox"/> Sì		