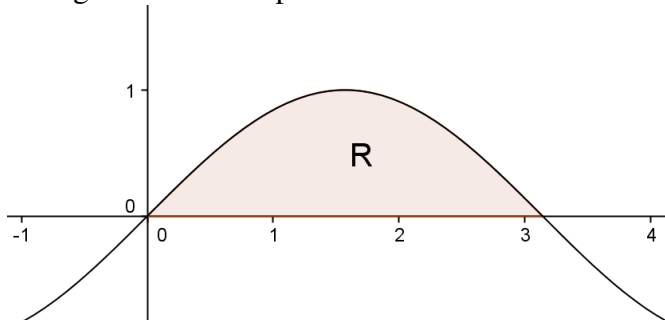


Quesito 3 PNI

Sia R la regione delimitata, per $x \in [0, \pi]$, dalla curva $y = \sin x$ e dall'asse x e sia W il solido ottenuto dalla rotazione di R attorno all'asse y . Si calcoli il volume di W .

La regione R è un trapezoide che ruotando forma un solido di rotazione.



Primo metodo (“metodo dei gusci cilindrici”)

Possiamo pensare il solido generato da “gusci cilindrici” con lo stesso asse, che hanno come circonferenza di base $2\pi x$ e per altezza $\sin x$, con x che varia da 0 a π . Quindi il volume del solido di rotazione W (una specie di “ciambella senza il buco”) è dato dal seguente integrale definito:

$$V = \text{Volume}(W) = \int_0^{\pi} (2\pi x) \sin x \, dx = 2\pi \int_0^{\pi} x \sin x \, dx .$$

Calcolando l'integrale $\int x \sin x \, dx$, per parti, si ottiene:

$$\int x \sin x \, dx = x(-\cos x) - \int (-\cos x) dx = -x \cos x + \sin x + c .$$

Quindi il volume è dato da:

$$V = 2\pi \int_0^{\pi} x \sin x \, dx = 2\pi [-x \cos x + \sin x]_0^{\pi} = 2\pi(\pi - 0) = 2\pi^2 .$$

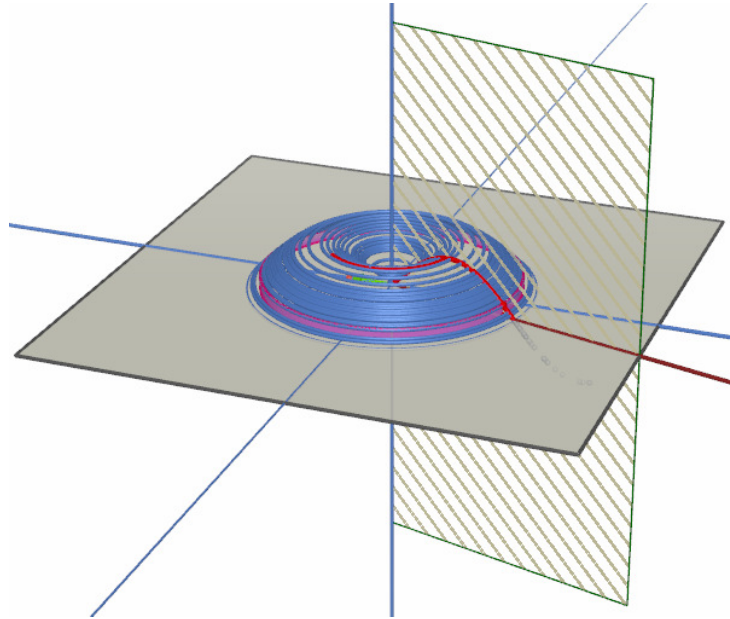


Figura 2

Secondo metodo (con il 2° teorema di Pappo-Guldino)

La regione R è un trapezoide che ruotando forma un solido di rotazione.

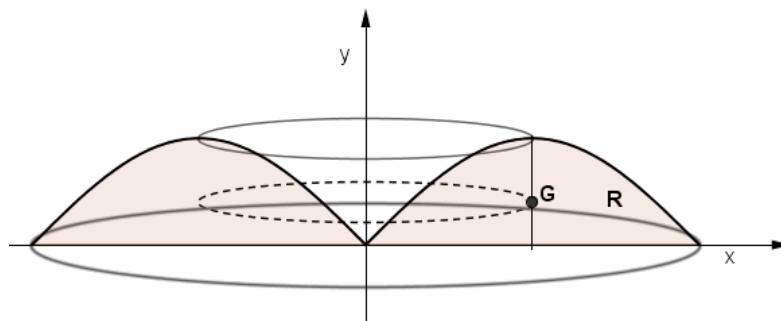


Figura 3

Il volume del solido di rotazione che si ottiene ruotando la regione R attorno all'asse y si può determinare usando il II teorema di Pappo-Guldino. Il volume è dato dal prodotto dell'area della regione R , che è 2, per la lunghezza della circonferenza descritta dal baricentro G della regione R . Non occorre determinare l'ordinata del baricentro di R perché basta conoscere la sua ascissa, che per ragioni di simmetria è $x_G = \frac{\pi}{2}$.

La circonferenza descritta dal baricentro G di R ha quindi lunghezza $C = 2\pi \cdot \frac{\pi}{2} = \pi^2$. Il volume del solido di rotazione W che si ottiene ruotando R attorno all'asse y è dato da:

$$\text{Volume}(W) = 2\pi x_G \cdot \text{Area}(R) = \pi^2 \cdot 2 = 2\pi^2 \approx 19,74 .$$

Commento. Il “metodo dei gusci cilindrici” e i teoremi di Pappo-Guldino non sono (esplicitamente) previsti nel programma dei licei scientifici sperimentali (PNI, Brocca, ecc.).

Livello di difficoltà:	<input type="checkbox"/> basso	<input type="checkbox"/> medio	<input checked="" type="checkbox"/> alto
E' in programma?	<input type="checkbox"/> si'	<input checked="" type="checkbox"/> no	<input type="checkbox"/> non si fa
Normalmente si fa a scuola?	<input type="checkbox"/> si	<input checked="" type="checkbox"/> no	<input type="checkbox"/> non sempre
E' un argomento presente nei libri di testo?	<input type="checkbox"/> si	<input type="checkbox"/> mai	<input checked="" type="checkbox"/> non sempre
Controlla una conoscenza / abilità /competenza fondamentale?	<input type="checkbox"/> si'		<input checked="" type="checkbox"/> no
Formulazione	<input checked="" type="checkbox"/> molto chiara	<input type="checkbox"/> corretta	<input type="checkbox"/> poco chiara
		<input type="checkbox"/> ambigua	<input type="checkbox"/> scorretta