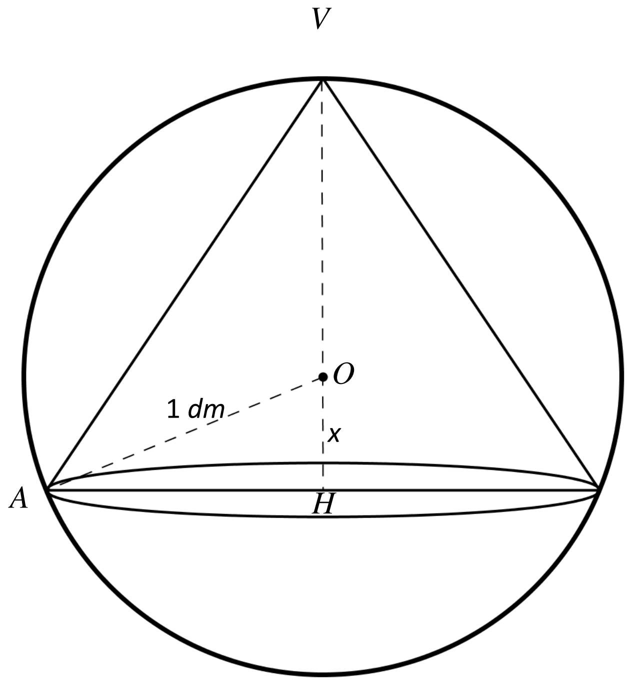
Esame di Stato 2010-2011 - 23 giugno 2011 - Liceo Scientifico - corso sperimentale PNI

QUESITO 6 – PNI



> 6. Di tutti i coni inscritti in una sfera di raggio 10 cm, qual è quello di superficie laterale massima?

Raggio della sfera = 10 *cm* = 1 *dm;* $S_{lat\ cono} = \pi \cdot AH \cdot AV;$ $S_{lat} = \max?$

Sia $\overline{OH} = x$, con $0 \leq x \leq 1$

Per il Teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo AOH, si ha: $\overline{AH} = \sqrt{1-x^2}$,

Per il Teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo AVH, si ha:

$$\overline{AV} = \sqrt{1-x^2+(1+x)^2} = \sqrt{2+2x}$$

da cui $S = \pi \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{2+2x} = \pi\sqrt{(1-x^2)(2+2x)} = \pi\sqrt{2+2x-2x^2-2x^3}$

Per trovare il cono di superficie laterale massima, si studia il segno della derivata prima:

$S' = \pi \dfrac{2-4x-6x^2}{2\sqrt{2+2x-2x^2-2x^3}} = \pi \dfrac{-3x^2-2x+1}{\sqrt{2+2x-2x^2-2x^3}} > 0 \Leftrightarrow$ $3x^2+2x-1<0$, verificata per

$$0 \leq x < \frac{1}{3} \text{ (causa limitazioni)}$$

Si ha il massimo in $x = \dfrac{1}{3}$, accettabile.

Il cono di superficie laterale massima ha raggio $\dfrac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0{,}9$ *dm* e altezza $\dfrac{4}{3} \approx 1{,}3$ *dm*.

Altro metodo (metodo elementare, delle "proprietà note")

Soluzione del prof. V. Roselli

Dette x l'altezza del cono e r il raggio della sfera, il raggio di base del cono è dato, usando il teorema Pitagora, da

$$\sqrt{r^2-(x-r)^2}=\sqrt{2rx-x^2}$$

L'apotema del cono, visto come un cateto del triangolo rettangolo che ha come ipotenusa il diametro della sfera passante per il vertice del cono, è dato da, per il I teorema di Euclide, da $\sqrt{2rx}$. Perciò la superficie laterale del cono è data da

$$A=\pi\sqrt{2rx-x^2}\,\sqrt{2rx}=\pi\sqrt{2r(2rx^2-x^3)}$$

Basterà allora studiare il radicando per $0<x<2r$.

Possiamo scrivere

$$f(x)=2rx^2-x^3=x^2(2r-x)=4\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}(2r-x)$$

e tralasciando la costante 4 , poiché i tre fattori $\frac{x}{2},\frac{x}{2},2r-x$ hanno somma costante $2r$, il loro prodotto è massimo se è possibile che siano uguali, cioè se $\frac{x}{2}=2r-x$, ossia se $x=\frac{4r}{3}$.

Livello di difficoltà:		☒ basso	☐ medio		☐ alto
È in programma?		☒ si'	☐ no		☐ non si fa
Normalmente si fa a scuola?		☒ si'	☐ no		☐ non sempre
È un argomento presente nei libri di testo?		☒ si	☐ mai		☐ non sempre
Controlla una conoscenza /abilità /competenza fondamentale?		☒ si		☐ no	
Formulazione	☒ molto chiara	☐ corretta	☐ poco chiara	☐ ambigua	☐ scorretta