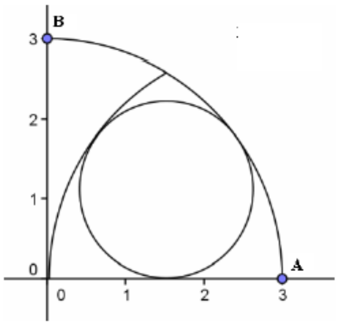
PROBLEMA 2 (a cura di S. De Stefani)

Nel primo quadrante del sistema di riferimento Oxy sono assegnati l'arco di circonferenza di centro O e estremi A(3, 0) e B(0, 3) e l'arco L della parabola d'equazione $x^2 = 9 - 6y$ i cui estremi sono il punto A e il punto (0, 3/2).

1. Sia r la retta tangente in A a L. Si calcoli l'area di ciascuna delle due parti in cui r divide la regione R racchiusa tra L e l'arco AB.
2. La regione R è la base di un solido W le cui sezioni, ottenute tagliando W con piani perpendicolari all'asse x, hanno, per ogni $0 \le x \le 3$, area $S(x) = e^{5-3x}$. Si determini il volume di W.
3. Si calcoli il volume del solido ottenuto dalla rotazione di R intorno all'asse x.
4. Si provi che l'arco L è il luogo geometrico descritto dai centri delle circonferenze tangenti internamente all'arco AB e all'asse x. Infine, tra le circonferenze di cui L è il luogo dei centri si determini quella che risulta tangente anche all'arco di circonferenza di centro A e raggio 3, come nella figura a lato.



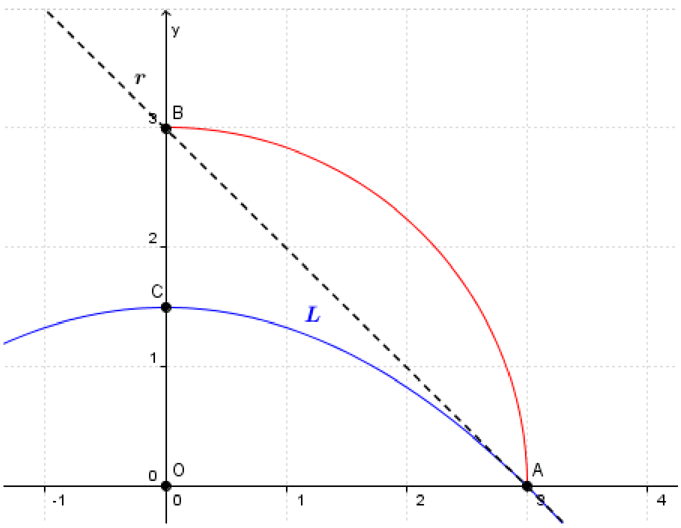
Punto 1

La circonferenza di centro O e passante per A e B ha equazione $x^2 + y^2 = 9$, quindi l'arco di circonferenza situato nel I quadrante ha equazione $y = \sqrt{9 - x^2}$, $\quad con\ 0 \le x \le 3$.

La retta r passante per $A(3;0)$ e tangente all'arco della parabola di equazione $y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{2}$ ha coefficiente angolare $m = f'(3) = -\frac{1}{3} \cdot 3 = -1$.

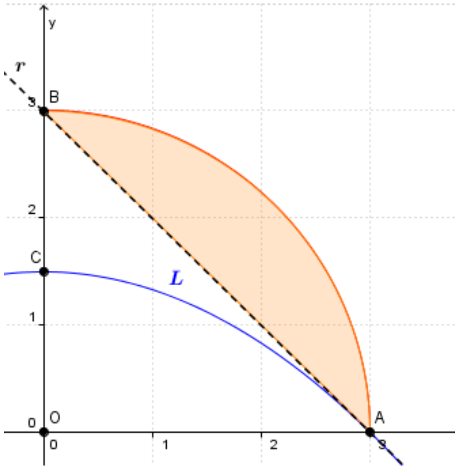
L'equazione della tangente a L in A è: $y - 0 = -1(x-3)$

$\boxed{r: \quad y = -x + 3}$

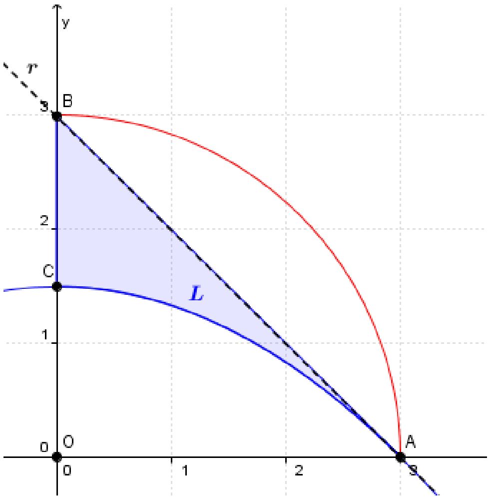


L'area del segmento circolare compreso tra l'arco di circonferenza e la retta *r* vale:

$$A_1 = \frac{9\pi}{4} - \frac{9}{2} = \frac{9\pi - 18}{4} \cong 2,57$$



L'area della parte di piano compresa tra la retta *r* e l'arco *L* di parabola vale:



$$A_2 = \frac{9}{2} - \frac{\frac{2}{3} \cdot 6 \cdot \frac{3}{2}}{2} = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}$$

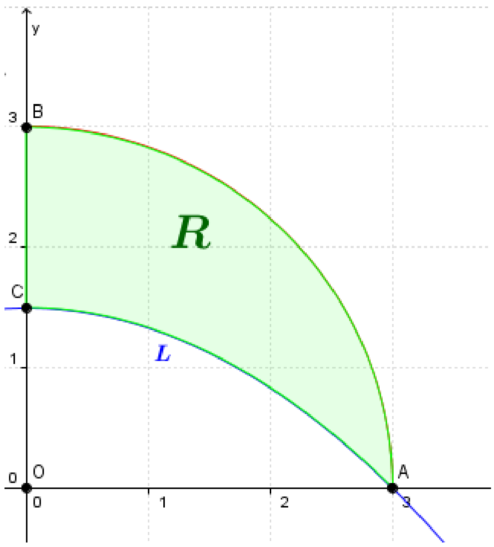
Punto 2

Il volume del solido *W* vale:

$$W = \int_0^3 S(x)\,dx = \int_0^3 e^{5-3x}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{3}\left[e^{5-3x}\right]_0^3 = -\frac{1}{3}\left(e^{-4} - e^{5}\right) =$$

$$= \frac{e^5 - e^{-4}}{3} \cong 49,46$$



Punto 3

Il volume del solido ottenuto dalla rotazione di R intorno all'asse x è:

$$V=\pi\int_0^3\left[\left(\sqrt{9-x^2}\right)^2-\left(\frac{9-x^2}{6}\right)^2\right]dx=\pi\int_0^3\left(9-x^2-\frac{81+x^4-18x^2}{36}\right)dx=$$

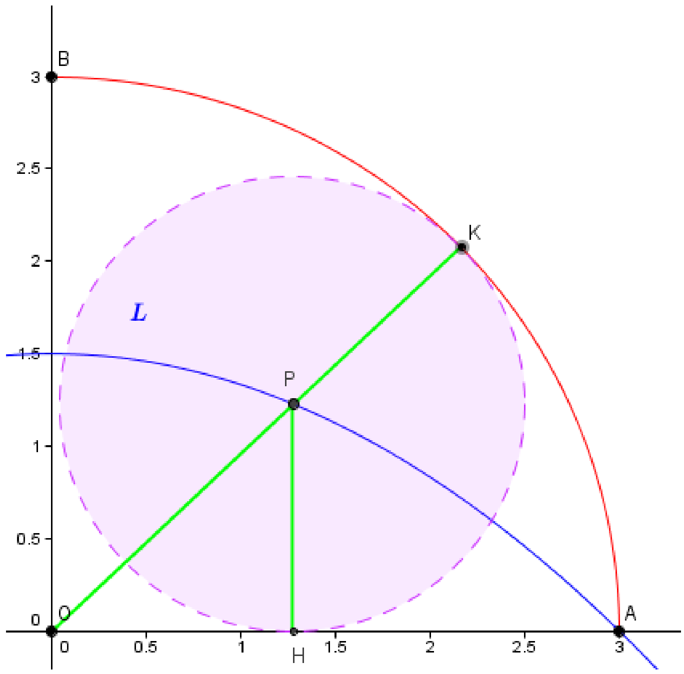
$$=\pi\int_0^3\left(\frac{324-36x^2-81-x^4+18x^2}{36}\right)dx=\pi\int_0^3\left(\frac{-x^4-18x^2+243}{36}\right)dx=$$

$$=\pi\int_0^3\left(-\frac{1}{36}x^4-\frac{1}{2}x^2+\frac{27}{4}\right)dx=\frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{18}\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}+\frac{27}{2}x\right]_0^3=$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{18}\cdot\frac{243}{5}-\frac{27}{3}+\frac{27}{2}\cdot 3-0\right)=\frac{\pi}{2}\left(-\frac{27}{10}-9+\frac{81}{2}\right)=$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{-27-90+405}{10}\right)=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{144}{5}=\frac{72}{5}\pi\cong 45,24$$

Punto 4



Sia P un generico punto appartenente all'arco L, di coordinate: $P\left(\alpha;-\frac{1}{6}\alpha^2+\frac{3}{2}\right)$, $\quad con\ 0\le\alpha\le 3$.

Sia $H(\alpha;0)$, con $0\le\alpha\le 3$, la sua proiezione sull'asse delle ascisse.

Se l'arco L rappresenta il luogo dei centri delle circonferenze tangenti all'asse x e all'arco AB di circonferenza, deve essere $\overline{PH}=\overline{PK}$.

Si ha:

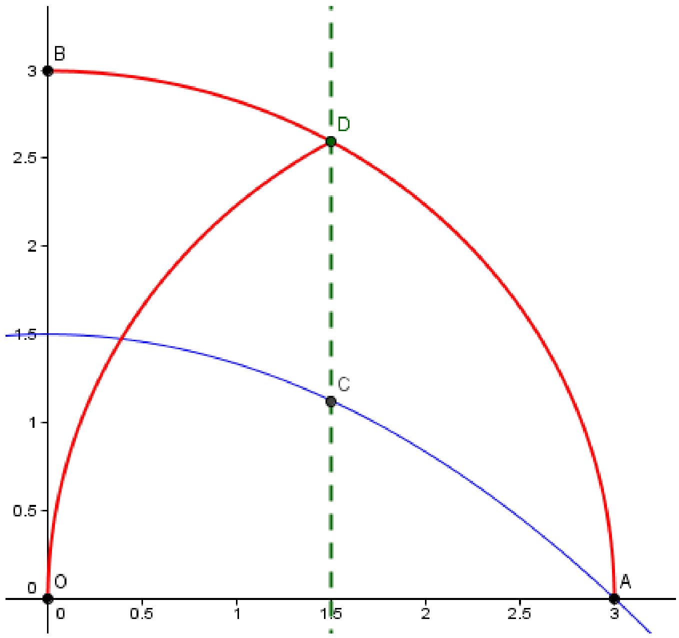
$\overline{PH} = -\frac{1}{6}\alpha^2 + \frac{3}{2}$,

$$\overline{PK} = \overline{OK} - \overline{OP} = 3 - \sqrt{\alpha^2 + \left(-\frac{1}{6}\alpha^2 + \frac{3}{2}\right)^2} = 3 - \sqrt{\alpha^2 + \frac{1}{36}\alpha^4 + \frac{9}{4} - \frac{1}{2}\alpha^2}\,.$$

$\overline{PH} = \overline{PK} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{6}\alpha^2 + \frac{3}{2} = 3 - \sqrt{\alpha^2 + \frac{1}{36}\alpha^4 + \frac{9}{4} - \frac{1}{2}\alpha^2}$, da cui

$$\sqrt{\alpha^2 + \frac{1}{36}\alpha^4 + \frac{9}{4} - \frac{1}{2}\alpha^2} = \frac{1}{6}\alpha^2 + \frac{3}{2}\,.$$

Elevando ambo i membri al quadrato si ha $\frac{1}{36}\alpha^4 + \frac{9}{4} + \frac{1}{2}\alpha^2 = \frac{1}{36}\alpha^4 + \frac{9}{4} + \frac{1}{2}\alpha^2$, *cvd.*



Essendo i due archi di circonferenza considerati simmetrici rispetto alla retta di equazione $x = \frac{3}{2}$, il centro della circonferenza tangente ai due archi e all'asse delle ascisse ha coordinate $C\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{6}\cdot\frac{9}{4} + \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}; \frac{9}{8}\right)$.

La circonferenza richiesta ha equazione $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{8}\right)^2 = \frac{81}{64}$, ossia

$$4x^2 + 4y^2 - 12x - 9y + 9 = 0\,.$$

Commento

Livello di difficoltà:	☐ basso ☒ medio ☐ alto
E' in programma?	☒ si ☐ no ☐ di solito non si fa
Normalmente si fa a scuola?	☒ si ☐ no ☐ non sempre
E' un argomento presente nei libri di testo?	☒ si ☐ no ☐ non sempre
Controlla conoscenze / abilità / competenze fondamentali?	☒ si ☐ no
Formulazione	☐ molto chiara ☒ corretta ☐ poco chiara ☐ ambigua ☐ scorretta