

Esame di Stato Liceo Scientifico
Prova di Matematica corso di ordinamento - 20 giugno 2013

PROBLEMA 1

La funzione f è definita da $f(x) = \int_0^x \left[\cos\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2} \right] dt$ per tutti i numeri reali x appartenenti all'intervallo chiuso $[0, 9]$.

1. Si calcolino $f'(\pi)$ e $f'(2\pi)$ ove f' indica la derivata di f .
2. Si tracci, in un sistema di coordinate cartesiane, il grafico Σ di $f'(x)$ e da esso si deduca per quale o quali valori di x , $f(x)$ presenta massimi o minimi. Si tracci altresì l'andamento di $f(x)$ deducendolo da quello di $f'(x)$.
3. Si trovi il valor medio di $f'(x)$ sull'intervallo $[0, 2\pi]$.
4. Sia R la regione del piano delimitata da Σ e dall'asse x per $0 \leq x \leq 4$; R è la base di un solido W le cui sezioni con piani ortogonali all'asse x hanno, per ciascun x , area $A(x) = 3 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}x\right)$.
Si calcoli il volume di W .

Soluzione del PROBLEMA 1 (a cura di S. De Stefani)

Punto 1

Per il teorema di Torricelli-Barrow si ha che: $f'(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}$. Quindi si ha:

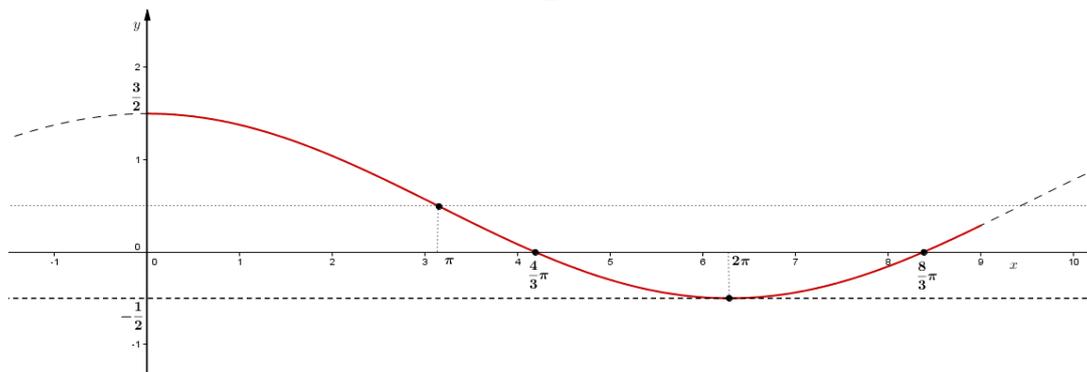
$$f'(\pi) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$f'(2\pi) = \cos\left(\frac{2\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Punto 2

$$\Sigma: f'(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}, \quad x \in [0; 9]$$

Grafico deducibile da $y = \cos x$, di periodo $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$, traslato verso l'alto di $\frac{1}{2}$.

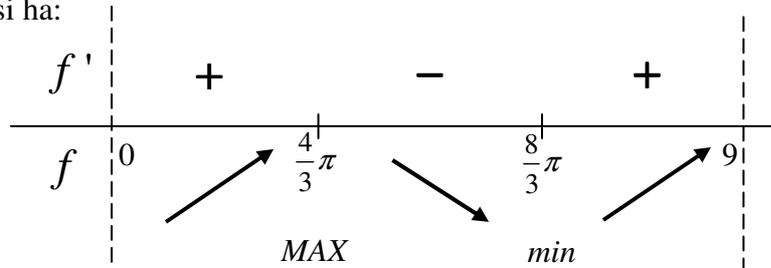


La funzione $f(x)$ presenta massimi o minimi per i valori che annullano la sua derivata prima, quindi tali che:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{2} \rightarrow \frac{x}{2} = \pm\frac{2}{3}\pi + 2k\pi \rightarrow x = \pm\frac{4}{3}\pi + 4k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

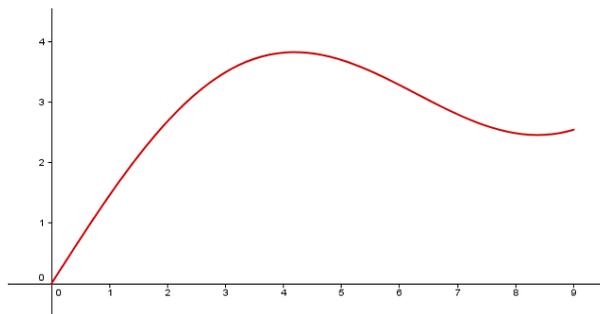
$$f'(x) = 0 \rightarrow x = \frac{4}{3}\pi \vee x = \frac{8}{3}\pi$$

In particolare, si ha:



$$f(x) = \int_0^x \left[\cos\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2} \right] dt, \quad x \in [0; 9]$$

$$f(0) = 0$$



Punto 3

Per il *Teorema della media integrale*, si ha:

$$f'(c) = \frac{\int_0^{2\pi} \left(\cos \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right) dx}{2\pi - 0} = \frac{\left[2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} + \frac{1}{2} x \right]_0^{2\pi}}{2\pi} = \frac{0 + \pi - 0}{2\pi} = \frac{1}{2}.$$

Il valor medio di $f'(x)$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$ vale $\frac{1}{2}$. Questo valor medio poteva essere calcolato

anche in modo elementare ragionando sul grafico della funzione $f'(x)$.

Punto 4

Il volume del solido W , calcolabile con il *metodo delle "sezioni normali"*, è pari a:

$$W = \int_0^4 A(x) dx = \int_0^4 3 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}x\right) dx = \frac{12}{\pi} \int_0^4 \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}x\right) dx, \text{ ossia:}$$

$$W = \frac{12}{\pi} \left[-\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) \right]_0^4 = \frac{12}{\pi} (-\cos \pi + \cos 0) = \frac{24}{\pi}.$$

Giudizio

Si noti che al Punto 4 viene richiesto di utilizzare il metodo “delle sezioni normali”. Si osserva che questo argomento non è presente nel programma.

Livello di difficoltà:	<input type="checkbox"/> Basso	<input checked="" type="checkbox"/> Medio	<input type="checkbox"/> Alto		
È in programma nel liceo scientifico di ordinamento?	<input type="checkbox"/> Sì	<input type="checkbox"/> No	<input checked="" type="checkbox"/> Non si sa		
Normalmente viene svolto?	<input checked="" type="checkbox"/> Sì	<input type="checkbox"/> No	<input type="checkbox"/> Non sempre		
È un argomento presente nei libri di testo?	<input type="checkbox"/> Mai	<input type="checkbox"/> Non sempre	<input checked="" type="checkbox"/> Sempre		
Formulazione:	<input type="checkbox"/> Scorretta	<input type="checkbox"/> Ambigua	<input type="checkbox"/> Poco chiara	<input checked="" type="checkbox"/> Corretta	<input type="checkbox"/> Molto chiara
Controlla conoscenze/abilità/competenze fondamentali?	<input type="checkbox"/> No		<input checked="" type="checkbox"/> Sì		