Esame di Stato Liceo Scientifico
Prova di Matematica corso di ordinamento - 20 giugno 2013

PROBLEMA 2

Sia f la funzione definita, per tutti gli x reali, da $f(x)=\dfrac{8}{4+x^2}$

1. Si studi f e se ne disegni il grafico Φ in un sistema di coordinate cartesiane Oxy. Si scrivano le equazioni delle tangenti a Φ nei punti $P(-2;1)$ e $Q(2;1)$ e si consideri il quadrilatero convesso che esse individuano con le rette OP e OQ. Si provi che tale quadrilatero è un rombo e si determinino le misure, in gradi e primi sessagesimali, dei suoi angoli.
2. Sia Γ la circonferenza di raggio 1 e centro $(0;1)$. Una retta t, per l'origine degli assi, taglia Γ oltre che in O in un punto A e taglia la retta d'equazione $y=2$ in un punto B. Si provi che, qualunque sia t, l'ascissa x di B e l'ordinata y di A sono le coordinate $(x;y)$ di un punto di Φ.
3. Si consideri la regione R compresa tra Φ e l'asse x sull'intervallo $[0,2]$. Si provi che R è equivalente al cerchio delimitato da Γ e si provi altresì che la regione compresa tra Φ e tutto l'asse x è equivalente a quattro volte il cerchio.
4. La regione R, ruotando attorno all'asse y, genera il solido W. Si scriva, spiegandone il perchè, ma senza calcolarlo, l'integrale definito che fornisce il volume di W.

Soluzione del PROBLEMA 2 (a cura di S. De Stefani)

Il grafico della funzione *f* è una curva nota con il nome di **versiera di Agnesi** (da *Maria Gaetana Agnesi*, matematica milanese, 1718-1799).
La si poteva studiare rapidamente come il reciproco della parabola $y=4+x^2$, moltiplicato per il fattore 8.

Punto 1

Studio della funzione $f(x)=\dfrac{8}{4+x^2}$

Dominio: $D=\mathbf{R}$

Simmetrie: per ogni x nel dominio, anche $-x$ appartiene al dominio e $f(-x) = f(x)$ $\rightarrow$ pari

Intersezione con gli assi cartesiani: Asse y: $x=0 \rightarrow y=2$; Asse x: $y=0 \rightarrow$ mai
Intersezione con l'asse y in $A(0;2)$.

Segno della funzione: $f(x)>0 \quad \rightarrow \quad \forall\, x \in D$.

Limiti della funzione agli estremi del dominio: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$ $\rightarrow$ L'asse x è asintoto orizzontale.

Studio della derivata prima per determinare i massimi, i minimi e i flessi con tangente orizzontale:

$$\boxed{f'(x)=-\frac{16x}{\left(4+x^2\right)^2}}$$

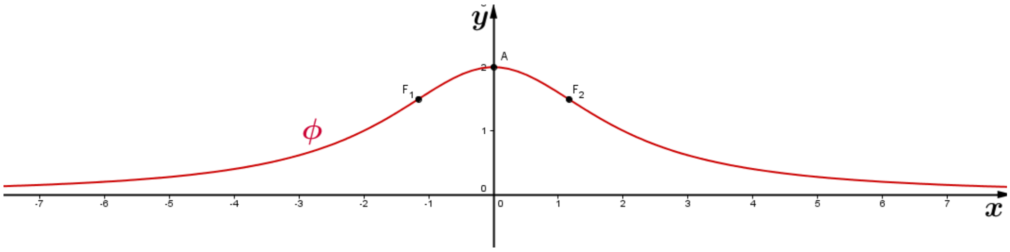
$f'(x)>0 \quad \rightarrow \quad x<0 \quad \rightarrow$ massimo in $A(0;2)$.
Studio della derivata seconda per determinare la concavita, la convessità e i flessi:

$$f''(x) = -16 \cdot \frac{\left(4+x^2\right)^2 - 2x\left(4+x^2\right)\cdot 2x}{\left(4+x^2\right)^4} = -16 \cdot \frac{\left(4+x^2\right)\cdot\left(4-x^2+4x^2\right)}{\left(4+x^2\right)^4} \quad \rightarrow$$

$$\boxed{f''(x) = 16 \cdot \frac{3x^2-4}{\left(4+x^2\right)^3}}$$

$$f''(x) > 0 \qquad \rightarrow \qquad x < -\frac{2\sqrt{3}}{3} \cup x > \frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \rightarrow$$

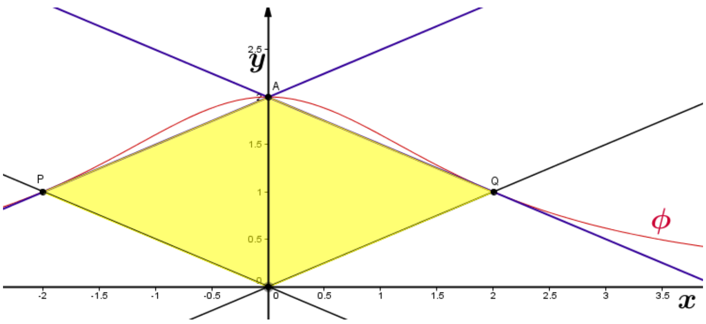
Flessi a tangente obliqua in $F_1\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3};\frac{3}{2}\right)$ e $F_2\left(\frac{2\sqrt{3}}{3};\frac{3}{2}\right)$.



Retta tangente a Φ in $P(-2;1)$: $\quad y-1 = f'(-2)\cdot(x+2) \quad \rightarrow \quad y = \frac{1}{2}x + 2$

Retta tangente a Φ in $Q(2;1)$: $\quad y-1 = f'(2)\cdot(x-2) \quad \rightarrow \quad y = -\frac{1}{2}x + 2$

Le due rette si intersecano in $A(0;2)$.



Il quadrilatero di vertici $O(0;0)$, $P(-2;1)$, $A(0;2)$, $Q(2;1)$ è un rombo dato che le diagonali PQ e AO sono tra loro perpendicolari e si dividono scambievolmente a metà.

L'angolo acuto formato dalle due rette tangenti a Φ è isometrico ad $A\hat{Q}O$ perché alterni interni.

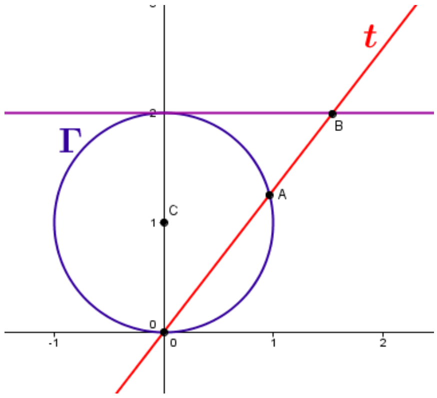
Si ha:

$$\mathrm{tg}\left(A\hat{Q}O\right) = \frac{m_P - m_Q}{1 + m_P \cdot m_Q} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}\text{, da cui si ha: } \mathrm{arctg}\left(\frac{4}{3}\right) \cong 53{,}13°.$$

Gli angoli (tra loro supplementari) del rombo hanno ampiezza circa: **126°52′** e **53°8′**.

Punto 2

L'equazione di Γ è: $x^2 + (y-1)^2 = 1$



Le rette passanti per l'origine degli assi (ad eccezione dell'asse y) hanno equazione $y = mx$, con $m \in \boldsymbol{R}$.

Il punto A è la soluzione del sistema: $\begin{cases} y = mx \\ x^2 + (y-1)^2 = 1 \end{cases} \rightarrow$

$$x^2 + m^2x^2 + 1 - 2mx = 1 \quad \rightarrow \quad x \cdot \left[\left(1+m^2\right)x - 2m \right] = 0$$

da cui: $A\left(\dfrac{2m}{1+m^2}; \quad \dfrac{2m^2}{1+m^2} \right)$

Il punto B è la soluzione del sistema $\begin{cases} y = mx \\ y = 2 \end{cases}$, da cui $B\left(\dfrac{2}{m}; \quad 2 \right)$, con $m \neq 0$.

Si tratta di provare che, al variare di m reale diverso da 0, il punto $P\left(\dfrac{2}{m}; \quad \dfrac{2m^2}{1+m^2} \right)$ appartiene a Φ.

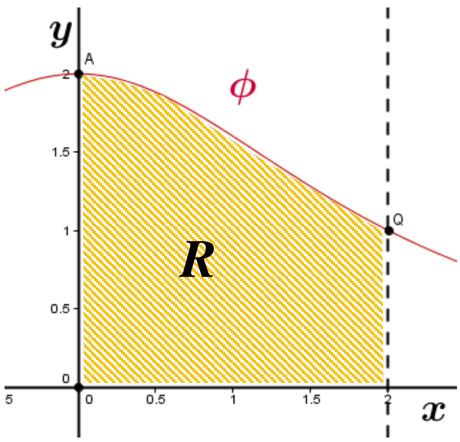
Il luogo descritto dal punto P è dato dalle equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{m} \\ y = \dfrac{2m^2}{1+m^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \dfrac{2}{x} \qquad (x \neq 0) \\ y = \dfrac{2 \cdot \dfrac{4}{x^2}}{1 + \dfrac{4}{x^2}} \end{cases} \Rightarrow \quad y \; = \dfrac{\dfrac{8}{x^2}}{\dfrac{x^2+4}{x^2}} = \dfrac{8}{4+x^2} = f(x).$$

La retta del fascio coincidente con l'asse y non è contemplata nell'espressione esplicita [$y = mx$] del fascio di rette passanti per l'origine. Esaminiamo a parte tale caso, in cui t ha equazione $x = 0$. In tale caso i punti A e B coincidono in (0; 2), punto che appartiene a Φ.

Punto 3

L'area del cerchio delimitato da Γ misura π.



$$\text{Area}(R) = \int_0^2 \frac{8}{4+x^2}dx = 2 \cdot \int_0^2 \frac{1}{1+\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}dx = 4 \cdot \int_0^2 \frac{1/2}{1+\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}dx$$

$$\text{Area}(R) = 4 \cdot \left[\text{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) \right]_0^2 = 4 \cdot (\text{arctg}\,1 - \text{arctg}\,0) = 4 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi$$

L’area della regione di piano compresa tra Φ e l’asse x è data dall’integrale improprio:

$$A=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{8}{4+x^2}dx=(\text{la funzione è pari })=2\cdot\int_{0}^{+\infty}\frac{8}{4+x^2}dx=8\cdot\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{1/2}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}dx\,.$$

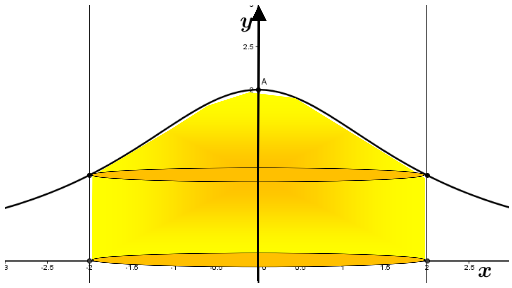
Si ottiene pertanto:

$$A=8\cdot\lim_{b\to+\infty}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^b=8\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{b}{2}-0\right)=8\cdot\frac{\pi}{2}=4\pi\,,$$

equivalente a 4 volte l’area del cerchio Γ.

Punto 4

Il volume del solido W è dato dalla risoluzione (non richiesta) del seguente integrale definito, calcolabile attraverso il “*metodo dei gusci cilindrici*” di superficie generica $2\pi x\cdot f(x)$:



$$W=\int_0^2 2\pi x\cdot f(x)\,dx=2\pi\int_0^2 x\cdot f(x)\,dx=2\pi\int_0^2 x\cdot\frac{8}{4+x^2}dx=8\pi\int_0^2\frac{2x}{4+x^2}dx\,.$$

Giudizio

Si osservi che al Punto 3 viene richiesto di calcolare un integrale improprio; questo argomento non è in programma nel liceo scientifico di ordinamento.
Si noti inoltre che al Punto 4 viene richiesto di utilizzare il metodo “dei gusci cilindrici” per calcolare un volume; si osserva che anche questo argomento non è presente nel programma.

<table>
<tr><td colspan="2">Livello di difficoltà:</td><td colspan="2">☐ Basso</td><td colspan="2">☒ Medio</td><td colspan="2">☐ Alto</td></tr>
<tr><td colspan="2">È in programma nel liceo scientifico di ordinamento?</td><td colspan="2">☐ Si’</td><td colspan="2">☐ No</td><td colspan="2">☒ Non si sa</td></tr>
<tr><td colspan="2">Normalmente viene svolto?</td><td colspan="2">☒ Si’</td><td colspan="2">☐ No</td><td colspan="2">☐ Non sempre</td></tr>
<tr><td colspan="2">È un argomento presente nei libri di testo?</td><td colspan="2">☐ Mai</td><td colspan="2">☐ Non sempre</td><td colspan="2">☒ Sempre</td></tr>
<tr><td>Formulazione:</td><td colspan="2">☐ Scorretta</td><td>☐ Ambigua</td><td>☐ Poco chiara</td><td colspan="2">☒ Corretta</td><td>☐ Molto chiara</td></tr>
<tr><td colspan="3">Controlla conoscenze/abilità/ competenze fondamentali?</td><td colspan="2">☐ No</td><td colspan="3">☒ Si’</td></tr>
</table>