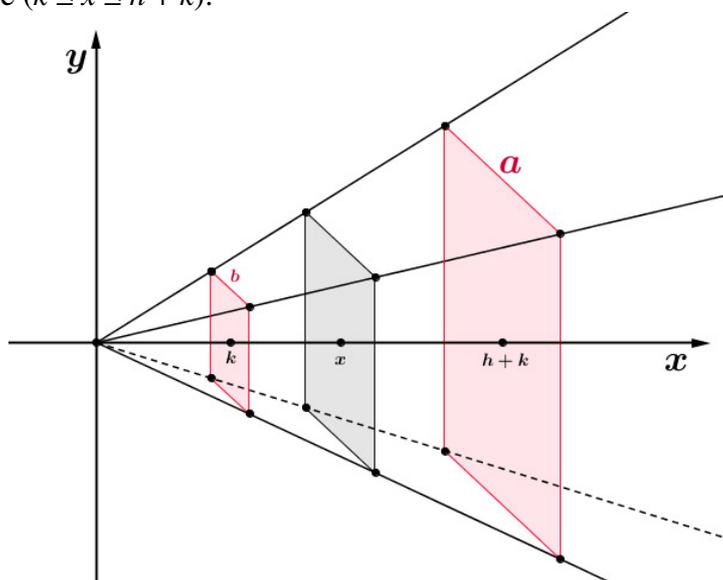


QUESITO 4

Di un tronco di piramide retta a base quadrata si conoscono l'altezza h e i lati a e b delle due basi. Si esprima il volume V del tronco in funzione di a , b e h , illustrando il ragionamento seguito.

1° METODO (con il calcolo integrale):

Si consideri la piramide retta di altezza $h + k$ e si prenda una qualsiasi sezione parallela alla base della piramide, ottenuta sezionando il tronco con un piano ortogonale all'asse delle ascisse e posto a distanza x dal vertice ($k \leq x \leq h + k$):



Le aree delle sezioni sono proporzionali ai quadrati delle rispettive distanze dal vertice (sia α la

costante di proporzionalità) $\Rightarrow \frac{a^2}{(h+k)^2} = \frac{b^2}{k^2} = \alpha$, da cui $ab = \alpha k \cdot (h+k)$.

Si ha dunque: $Area_{\text{base minore}} = S(k) = \alpha k^2 = b^2$, $Area_{\text{base maggiore}} = S(h+k) = \alpha (h+k)^2 = a^2$,

in generale, $S(x) = \alpha x^2$.

Il volume richiesto è dato dalla risoluzione del seguente integrale definito:

$$V = \int_k^{h+k} \alpha x^2 dx = \left[\alpha \cdot \frac{x^3}{3} \right]_k^{h+k} = \frac{\alpha}{3} \cdot [(h+k)^3 - k^3]$$

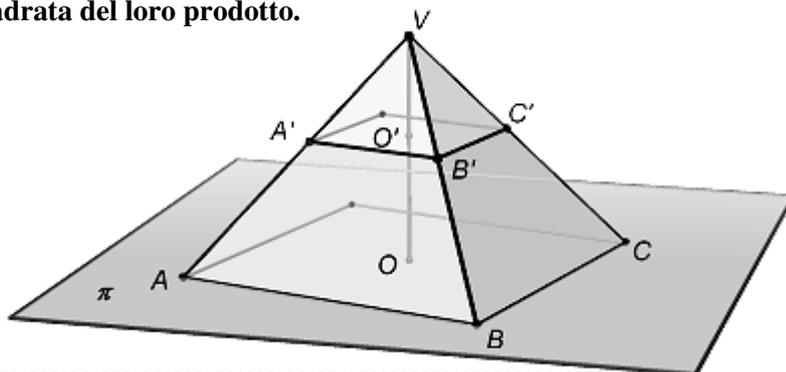
Scomponendo la differenza di cubi:

$$V = \frac{\alpha}{3} \cdot (h+k-k) \cdot [(h+k)^2 + k^2 + k \cdot (h+k)] = \frac{h}{3} \cdot [\alpha (h+k)^2 + \alpha k^2 + \alpha k \cdot (h+k)],$$

da cui:

$$V = \frac{h}{3} \cdot [a^2 + b^2 + ab]$$

Il volume di un tronco di piramide è uguale al prodotto di un terzo della sua altezza per la somma delle superfici delle due basi con la radice quadrata del loro prodotto.



2° METODO (via geometrica):

Sia:

| | |
|---|--------------------------------------|
| V = volume del tronco di piramide | h = altezza del tronco di piramide |
| a^2 = superficie della base maggiore | b^2 = superficie della base minore |
| x = distanza del vertice della piramide dalla base minore | |

Nota dalla geometria solida la formula per calcolare il volume di una piramide di superficie di base A ed altezza h ($Volume = \frac{1}{3} A \cdot h$), il volume V del tronco di piramide è dato dalla differenza tra il volume V' della piramide “grande” e il volume v della piramide “piccola”:

$$V = V' - v = \frac{1}{3} a^2 \cdot (h + x) - \frac{1}{3} b^2 \cdot x$$

Raccogliendo: $V = \frac{1}{3} \cdot [a^2 h + (a^2 - b^2) x]$ (1)

Essendo la piramide *piccola* **simile** alla piramide *grande*, si ha:

$$a : b = (h + x) : x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} \text{proprietà} \\ \text{dello} \\ \text{scomporre} \end{matrix} (a - b) : b = (h + x - x) : x \quad \rightarrow$$

$$(a - b) : b = h : x \quad \rightarrow \quad x = \frac{b \cdot h}{a - b}$$

Andando a sostituire nella (1), si ha:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \left[a^2 h + (a^2 - b^2) \frac{b \cdot h}{a - b} \right] = \frac{1}{3} h \cdot [a^2 + (a + b) \cdot b], \text{ quindi:}$$

$$\boxed{V = \frac{h}{3} \cdot (a^2 + b^2 + ab)}$$

Giudizio

| | | | | | |
|--|--|--|--|--|---------------------------------------|
| Livello di difficoltà: | <input type="checkbox"/> Basso | <input checked="" type="checkbox"/> Medio | <input type="checkbox"/> Alto | | |
| È in programma nel liceo scientifico di ordinamento? | <input checked="" type="checkbox"/> Sì | <input type="checkbox"/> No | <input type="checkbox"/> Non si sa | | |
| Normalmente viene svolto? | <input type="checkbox"/> Sì | <input type="checkbox"/> No | <input checked="" type="checkbox"/> Non sempre | | |
| È un argomento presente nei libri di testo? | <input type="checkbox"/> Mai | <input checked="" type="checkbox"/> Non sempre | <input type="checkbox"/> Sempre | | |
| Formulazione: | <input type="checkbox"/> Scorretta | <input type="checkbox"/> Ambigua | <input type="checkbox"/> Poco chiara | <input checked="" type="checkbox"/> Corretta | <input type="checkbox"/> Molto chiara |
| Controlla conoscenze/abilità/competenze fondamentali? | <input checked="" type="checkbox"/> No | | <input type="checkbox"/> Sì | | |