Esame di Stato Liceo Scientifico PNI
Prova di Matematica - corso sperimentale PNI - 20 giugno 2013

Soluzione del PROBLEMA 2
a cura di L. Rossi

> Sia f la funzione definita per tutti gli x positivi da $f(x)=x^3\ln x$.
>
> 1. Si studi f e si tracci il suo grafico γ su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali e monometrici Oxy; accertato che γ presenta sia un punto di flesso che un punto di minimo se ne calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ascisse arrotondate alla terza cifra decimale.
> 2. Sia P il punto in cui γ interseca l'asse x. Si trovi l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse y, passante per l'origine e tangente a γ in P.
> 3. Sia R la regione delimitata da γ e dall'asse x sull'intervallo aperto a sinistra $]0,1]$. Si calcoli l'area di R, illustrando il ragionamento seguito, e la si esprima in mm^2 avendo supposto l'unità di misura lineare pari a 1 *decimetro*.
> 4. Si disegni la curva simmetrica di γ rispetto all'asse y e se ne scriva altresì l'equazione. Similmente si faccia per la curva simmetrica di γ rispetto alla retta $y=-1$.

Punto 1

$y=f(x)=x^3\log x$ (il logaritmo è in base naturale).

DOMINIO $\quad D:\ x>0$

SIMMETRIE: nessuna

INTERSEZIONE ASSI: $(1,0)$

SEGNO: $\quad f(x)>0 \quad \Rightarrow \quad \forall\ x>1$

LIMITI: $\quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=[0\cdot\infty]$ forma indeterminata ,

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\log x}{\frac{1}{x^3}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\ F.I.\ \underset{=}{H}\ \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-3\frac{1}{x^4}}=\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{1}{3}x^3\right)=0$$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ (no asintoti obliqui poiché $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}x^2\log x=+\infty$)

MASSIMI, MINIMI, FLESSI A TG ORIZZONTALE:

$$f'(x)=3x^2\log x+x^2=x^2(3\log x+1)$$

DOMINIO $\quad x>0$

$f'(x)>0 \quad \to \quad x>\frac{1}{\sqrt[3]{e}} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{1}{\sqrt[3]{e}}\approx 0{,}717$ punto di minimo locale, $A\left(\frac{1}{\sqrt[3]{e}},-\frac{1}{3e}\right)$

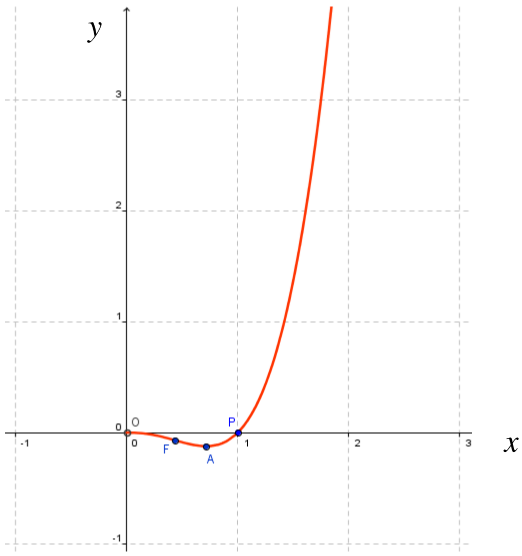
$\lim_{x\to 0^+} x^2(3\log x+1)=[0\cdot\infty]$ $F.I.$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{3\log x+1}{\frac{1}{x^2}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right] \; F.I. \quad \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{3}{x}}{-2\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{3}{2}x^2\right)=0$$

La tangente a 0^+ alla funzione è l'asse delle ascisse.

$$f''(x)=x(6\log x+5)$$

$f''(x)>0 \quad \to \quad x>\frac{1}{\sqrt[6]{e^5}} \quad ➔ \quad x=\frac{1}{\sqrt[6]{e^5}}\approx 0.435$ punto di flesso a tangente obliqua, $F\left(\frac{1}{\sqrt[6]{e^5}},-\frac{5}{6e\sqrt{e}}\right)$



Punto 2

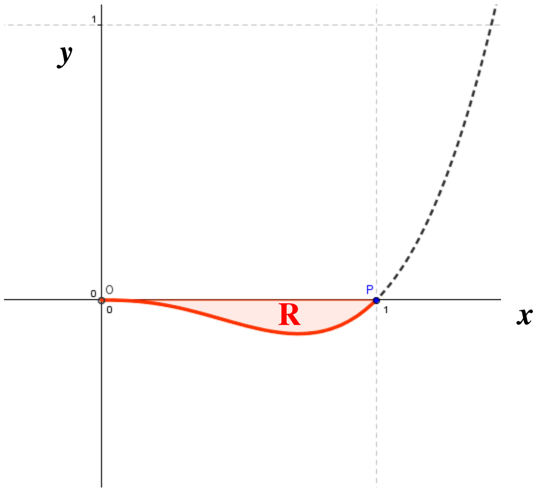
Tangente a γ in P:
$t: y=f'(1)(x-1) \quad \to \quad y=x-1$.

L'equazione della parabola è del tipo: $\wp: y=ax^2+bx+c$.
Le condizioni da imporre sono:

- passaggio per O: $c=0$
- passaggio per P: $a+b+c=0$
- tangenza a γ in P: $D\left[ax^2+bx+c\right]_{x=1}=1 \quad \to \quad [2ax+b]_{x=1}=1 \quad \to \quad 2a+b=1$

risolvendo si ottiene: $a=1, b=-1, c=0$, la parabola ha dunque equazione: $\wp: y=x^2-x$.

Punto 3



Area della regione R si calcola con un integrale improprio:

$$S(R) = -\int_0^1 x^3 \log x \ \ dx$$

Calcolo a parte l'integrale indefinito: $\int x^3 \log x \ \ dx$.

Applico il metodo di integrazione per parti:

$$f(x) = \log x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = x^3 \quad \rightarrow \quad g(x) = \frac{x^4}{4}$$

$$\int x^3 \log x \ \ dx = \frac{x^4}{4}\log x - \int \frac{x^3}{4} \ \ dx = \frac{x^4}{4}\log x - \frac{x^4}{16} + c, \ c \in R$$

Dunque:

$$S(R) = -\int_0^1 x^3 \log x \ \ dx = -\lim_{a\to 0^+}\left[\frac{x^4}{4}\log x - \frac{x^4}{16}\right]_a^1 = -\lim_{a\to 0^+}\left[\left(-\frac{1}{16}\right) - \left(\frac{a^4}{4}\log a - \frac{a^4}{16}\right)\right] = \frac{1}{16}$$

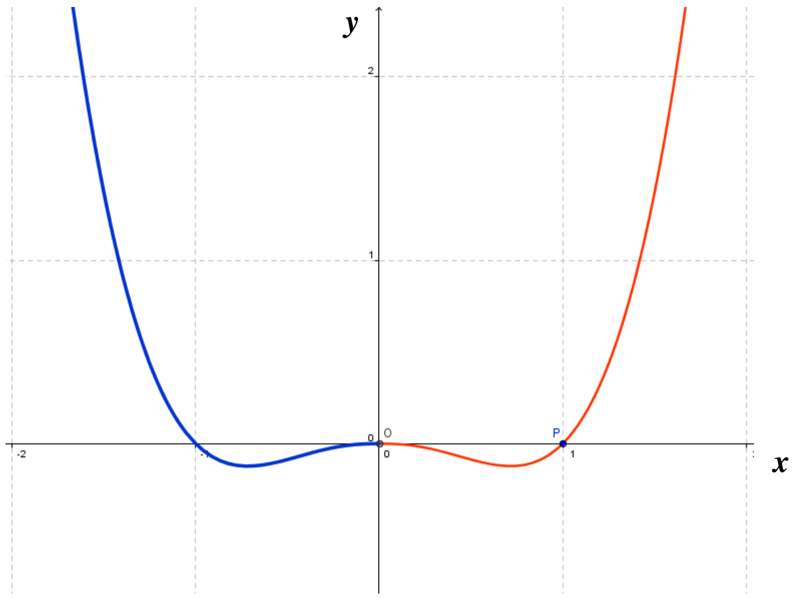
Infatti:

$$\lim_{a\to 0^+}\frac{a^4}{4}\log a = [0\cdot\infty]\, F.I. \qquad \lim_{a\to 0^+}\frac{1}{4}\frac{\log a}{\frac{1}{a^4}} \overset{H}{=} \lim_{a\to 0^+}\frac{1}{4}\frac{\frac{1}{a}}{-4\frac{1}{a^5}} = \lim_{a\to 0^+}\left(-\frac{1}{16}a^4\right) = 0$$

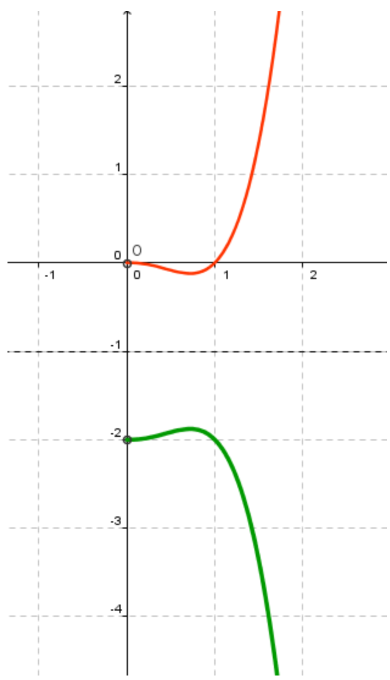
$$S(R) = \frac{1}{16} = 0{,}0625\ dm^2 = 625 mm^2.$$

Punto 4

La curva simmetrica di γ rispetto l'asse y ha equazione $y = f(-x) = -x^3 \log(-x)$. Il suo grafico è evidenziato in blu in figura.



La curva simmetrica di γ rispetto la retta $y = -1$ ha equazione $y = -f(x) - 2 = -x^3 \log(x) - 2$. (Il suo grafico è evidenziato in verde in figura)



Giudizio

<table>
<tr><td>Livello di difficoltà:</td><td colspan="2">☐ Basso</td><td colspan="2">☒ Medio</td><td>☐ Alto</td></tr>
<tr><td>È in programma nel liceo scientifico PNI?</td><td colspan="2">☒ Si’</td><td colspan="2">☐ No</td><td>☐ Non si sa</td></tr>
<tr><td>Normalmente viene svolto?</td><td colspan="2">☒ Si’</td><td colspan="2">☐ No</td><td>☐ Non sempre</td></tr>
<tr><td>È un argomento presente nei libri di testo?</td><td colspan="2">☐ Mai</td><td colspan="2">☐ Non sempre</td><td>☒ Sempre</td></tr>
<tr><td>Formulazione:</td><td>☐ Scorretta</td><td>☐ Ambigua</td><td>☐ Poco chiara</td><td>☒ Corretta</td><td>☐ Molto chiara</td></tr>
<tr><td colspan="2">Controlla conoscenze/abilità/ competenze fondamentali?</td><td colspan="2">☐ No</td><td colspan="2">☒ Si’</td></tr>
</table>