Esame di Stato Liceo Scientifico
Prova di Matematica - corso sperimentale PNI - 20 giugno 2013
Soluzione del QUESTIONARIO (a cura di L. Rossi)

QUESITO 10

Si stabilisca per quali valori $k \in R$ l'equazione $x^2(3-x)=k$ ammette due soluzioni distinte appartenenti all'intervallo $[0,3]$. Posto $k=3$, si approssimi con due cifre decimali la maggiore di tali soluzioni, applicando uno dei metodi iterativi studiati.

Risolviamo graficamente l'equazione $x^2(3-x)=k$ valutando il numero di intersezioni della curva $y=f(x)=x^2(3-x)$ con il fascio improprio di rette parallele all'asse x, $y=k$:

$$\begin{cases} y = x^2(3-x) \\ y = k \end{cases}$$

$y=f(x)$ è una funzione polinomiale.

Dominio $\quad D$: ***R***

Simmetrie notevoli: nessuna

Intersezioni con gli assi coordinati: $(0,0);(3,0)$

Segno della funzione: $\quad f(x)>0 \quad \Rightarrow \quad x<3 \wedge x \neq 0$

Limiti agli estremi del dominio: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ non ci sono asintoti

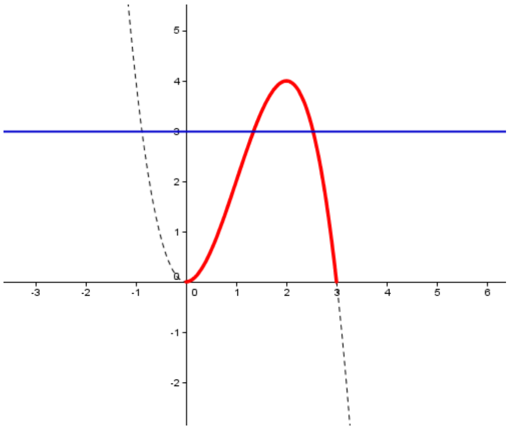
Massimi, minimi, flessi a tangente orizzontale:

$$f'(x)=6x-3x^2$$

$f'(x)>0 \quad \rightarrow \quad 0<x<2 \quad \Rightarrow \quad x=0$ punto di minimo locale, $x=2$ punto di massimo locale

$$f''(x)=6-6x$$

$f''(x)>0 \quad \rightarrow \quad x<1 \quad \Rightarrow \quad x=1$ punto di flesso a tangente obliqua



Come si vede dal grafico $k \in [0,4[$.

Posto $k = 3$, dalla figura vedo che l'equazione $x^2(3-x)=3$ ammette 2 soluzioni, di cui la maggiore $\in \,]2,3[$.

Considero la funzione polinomiale continua in R, $y = f(x) = x^2(3-x)-3$; per il Teorema di Bolzano-Weierstrass (esistenza degli zeri) essa assume almeno uno zero nell'intervallo $]2,3[$, infatti $f(2)=1$, $f(3)=-3$ (assume valori di segno opposto agli estremi). Esso è unico poiché la funzione è monotona decrescente in tale intervallo.

Applico il metodo delle tangenti (o di Newton) partendo dall'estremo *x=3* in cui la funzione e la sua derivata seconda hanno lo stesso segno:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	3	-3	-9	2,666666667
1	2,666666667	-0,62962963	-5,333333333	2,548611111
2	2,548611111	-0,068040217	-4,19458912	2,532390162
3	2,532390162	-0,00121814	-4,044658825	2,532088989

Approssimazione con due cifre decimali esatte 2,53.

<u>Giudizio</u>

<table>
<tr><td colspan="2">Livello di difficoltà:</td><td colspan="2">☐ Basso</td><td>☒ Medio</td><td>☐ Alto</td></tr>
<tr><td colspan="2">È in programma nel liceo scientifico PNI?</td><td colspan="2">☒ Si'</td><td>☐ No</td><td>☐ Non si sa</td></tr>
<tr><td colspan="2">Normalmente viene svolto?</td><td colspan="2">☒ Si'</td><td>☐ No</td><td>☐ Non sempre</td></tr>
<tr><td colspan="2">È un argomento presente nei libri di testo?</td><td colspan="2">☐ Mai</td><td>☐ Non sempre</td><td>☒ Sempre</td></tr>
<tr><td>Formulazione:</td><td>☐ Scorretta</td><td>☐ Ambigua</td><td>☐ Poco chiara</td><td>☐ Corretta</td><td>☒ Molto chiara</td></tr>
<tr><td colspan="2">Controlla conoscenze/abilità/ competenze fondamentali?</td><td colspan="2">☐ No</td><td colspan="2">☒ Si'</td></tr>
</table>